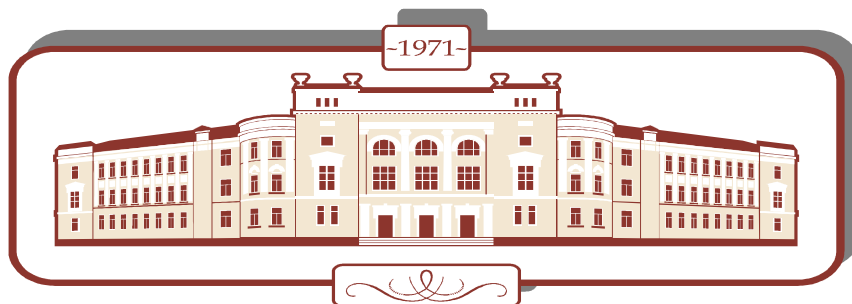


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра строительной механики

Лободенко Е.И., Кутрунова З.С. Шагисултанова Ю.Н.,
Куриленко Е.Ю., Белова О.Ю.



МЕХАНИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ (РАЗДЕЛ «СТАТИКА») И ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Для студентов направления 270800 – «Строительство» (бакалавриат)

«Рекомендовано УМО РАЕ по классическому университетскому и техническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки: 270800 – «Строительство» (Бакалавриат)»

Тюмень, 2012

УДК 531 : 620.1

М – 55

Лободенко Е.И., Кутрунова З.С., Шагисултанова Ю.Н., Куриленко Е.Ю., Белова О.Ю. Механика: учебное пособие по теоретической механике (раздел «Статика») и технической механике для студентов, обучающихся по направлению 270800 – «Строительство» / под ред. Е.И. Лободенко. – Тюмень: РИО ФГБОУ ВПО «ТюмГАСУ», 2012. – 229 с.

Учебное пособие составлено в соответствии с государственными образовательными стандартами и рабочей программой направления подготовки 270800 – «Строительство» очной и заочной форм обучения.

Пособие рассчитано на приобретение минимального объема теоретических знаний по дисциплинам «Теоретическая механика» раздел: «Статика» и «Техническая механика». Оно может быть использовано в качестве руководства при выполнении домашних контрольных заданий для студентов указанного направления подготовки.

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. Тюм ГУ Кутрунов В.Н.
канд. физ.-мат. наук, доц. Нарута Т.А.

Тираж 500 экз.

Заказ № 172

© ФГБОУ ВПО «Тюменский государственный архитектурно - строительный университет»

© Лободенко Е.И., Кутрунова З.С., Шагисултанова Ю.Н., Куриленко Е.Ю., Белова О.Ю.

Редакционно-издательский отдел ФГБОУ ВПО «Тюменский государственный архитектурно-строительный университет»

Содержание:

	Предисловие	7
1.	Основные понятия и определения статики	8
1.1.	Понятие силы	8
1.2.	Равнодействующая сил, разложение силы и проекция силы на ось	8
1.3.	Момент силы относительно точки	10
1.4.	Пара сил	12
1.5.	Распределенные силы	13
1.6.	Некоторые типы связей и их реакции	14
1.6.1.	Гладкая поверхность или опора	14
1.6.2.	Нерастяжимая нить	14
1.6.3.	Невесомый стержень	15
1.6.4.	Шарнирно-подвижная опора	15
1.6.5.	Цилиндрический шарнир или шарнирно-неподвижная опора	16
1.6.6.	Скользкая заделка	16
1.6.7.	Жесткая заделка	16
1.7.	Уравнения равновесия	16
1.8.	Центр тяжести тела или системы тел	17
1.8.1.	Способы определения координат центров тяжести простейших плоских тел	19
2.	Методические указания, примеры решения и задания по статике	21
2.1.	Последовательность решения задач по статике	21
2.2.	Примеры решения задания № 1. Определение усилий в стержнях механической системы, находящейся в равновесии	21
2.3.	Методические указания к заданию № 1	25
2.4.	Варианты задания № 1	25
2.5.	План решения задач по определению опорных реакций (задания 2 а, б, в; 3, 4)	30
2.6.	Примеры решения задания № 2. Нахождение опорных реакций простых и составных балок при действии заданных сил	32

2.6.1.	задание № 2 а .	32
2.6.2.	задание № 2 б	34
2.6.3.	задание № 2 в	36
2.7.	Методические указания к заданию № 2	43
2.8.	Варианты задания № 2	43
2.9.	Примеры решения задания № 3. Определение реакций опор стержневых конструкций	58
2.10.	Методические указания к заданию № 3	61
2.11.	Варианты задания № 3	61
2.12.	Пример решения задания № 4. Нахождение опорных реакций составной конструкции	65
2.13.	Методические указания к заданию № 4	68
2.14.	Варианты задания № 4	68
2.15.	Примеры решения задания № 5. Определение центра тяжести тела или системы тел	72
2.16.	Методические указания к заданию № 5	77
2.17.	Варианты задания № 5	77
3.	Геометрические характеристики плоских сечений	85
3.1.	Основные сведения из теории	85
3.2.	Моменты инерции относительно параллельных осей	87
3.3.	Главные оси и главные моменты инерции сечения	87
3.4.	Примеры решения задания № 6. Геометрические характеристики плоских сечений	89
3.5.	Методические указания к заданию № 6	94
3.6.	Варианты задания № 6	94
4.	Основные понятия и определения по курсу сопротивления материалов	95
4.1.	Объекты изучения сопротивления материалов	95
4.2.	Нагрузки	95
4.3.	Опорные реакции. Внутренние усилия	97
4.4.	Определение внутренних усилий	98
4.5.	Эпюры внутренних усилий	103
4.6.	Дифференциальные зависимости между внутренними	

	нагрузками и внутренними усилиями	104
4.7.	Виды деформаций стержня	106
4.8.	Метод характерных сечений	106
4.9.	Примеры построения эпюр внутренних усилий	107
4.10.	Методические указания к заданию № 7. Построение эпюр внутренних усилий	122
4.11.	Варианты задания № 7	122
5.	Расчеты на прочность и жесткость при центральном растяжении-сжатии	123
5.1.	Понятие о напряжениях	123
5.2.	Условие прочности при центральном растяжении-сжатии	124
5.3.	Условие жесткости при центральном растяжении-сжатии	127
5.4.	Пример решения задания № 8. Расчеты на прочность и жесткость при центральном растяжении-сжатии	129
5.5.	Методические указания к заданию № 8	130
5.6.	Варианты задания № 8	130
6.	Расчет балки на прочность и жесткость	135
6.1.	Напряжения в поперечных сечениях	135
6.2.	Расчет балки на прочность	137
6.3.	Примеры решения задания № 9. Определение размеров поперечного сечения из условия прочности	139
6.4.	Методические указания к заданию № 9	143
6.5.	Варианты задания № 9	143
6.6.	Перемещения балки при изгибе. Расчет на жесткость	144
6.7.	Примеры решения задания № 10. Расчеты на жесткость при изгибе	148
6.8.	Методические указания к заданию № 10	156
6.9.	Варианты задания № 10	156
7.	Сложное сопротивление	157
7.1.	Косой изгиб	158
7.2.	Определение напряжений при косом изгибе	158
7.3.	Нейтральная линия и силовая плоскость при косом изгибе	159
7.4.	Наибольшие нормальные напряжения при косом изгибе	160

7.5.	Пример решения задания № 11. Расчет на прочность при косом изгибе	161
7.6.	Методические указания к заданию № 11	164
7.7.	Варианты задания № 11	165
7.8.	Расчет на прочность при внецентренном действии продольных сил	168
7.9.	Нейтральная линия при внецентренном действии продольных сил	170
7.10.	Ядро сечения	171
7.11.	Примеры решения задания № 12. Расчеты на прочность и жесткость при внецентренном действии продольных сил	179
7.12.	Методические указания к заданию № 12	180
7.13.	Варианты задания № 12	184
8.	Устойчивость сжатых стержней	184
8.1.	Понятие об устойчивости	184
8.2.	Задача Эйлера	186
8.3.	Определение критической силы с помощью формулы Ясинского	189
8.4.	Практический расчет сжатых стержней на устойчивость	189
8.5.	Пример решения задания № 13. Расчет на устойчивость сжатых стержней	191
8.6.	Методические указания к заданию № 13	195
8.7.	Варианты задания № 13	196
9.	Динамическое действие нагрузки	199
9.1.	Ударное действие нагрузок. Динамический расчет	199
9.2.	Пример решения задания № 14. Ударное действие нагрузок. Динамический расчет	202
9.3.	Методические указания к заданию № 14	204
9.4.	Варианты задания № 14	205
	Библиографический список	209
	Приложения	211

Предисловие

Учебное пособие «Механика» включает в себя лишь некоторые разделы теоретической механики и сопротивления материалов, в соответствии с рабочей программой бакалавров направления «Строительство». В настоящем сборнике представлено 14 заданий по самым важным разделам, чтобы наглядно показать взаимосвязь данных дисциплин. На выполнение каждого задания студенту дается неделя. Столь жесткий график выполнения домашних работ необходим для того, чтобы студенты получили качественные практические навыки. Кроме того, при решении домашних заданий студенты постепенно овладевают достаточно обширным теоретическим материалом курса. Задания довольно простые и не требуют больших временных затрат, но при этом позволяют запомнить методику и выработать устойчивый навык их решения.

Авторы не претендуют на полноту изложения материала, перед каждым заданием есть необходимый теоретический минимум и примеры решения типовых задач. Приложения содержат некоторые данные из сортамента и другие справочные материалы, достаточные для выполнения заданий.

Сборник был подготовлен под общей редакцией Е.И. Лободенко. Первые два раздела написаны Е.И. Лободенко и Ю.Н. Шагисултановой. Разделы 3, 7, 8 – З.С. Кутруновой, разделы 4 и 6 – Е.Ю. Куриленко, раздел 5 – Е.И. Лободенко и З.С. Кутруновой, раздел 9 – О.Ю. Беловой.

1. Основные понятия и определения статики

1.1. Понятие силы

Сила – это мера механического взаимодействия материальных тел. Действие её на тело определяется:

1. модулем (числовым значением);
2. направлением;
3. точкой приложения.

Силу, как векторную величину, будем обозначать буквой с чертой над ней (например \vec{F}), а модуль силы – F .

Размерность силы $[H]$ или $[кН]$ (ньютон или килоньютон).

Внешние силы, или нагрузки по способу приложения их к элементам конструкции делятся на объемные (например, сила тяжести) и поверхностные, т.е. приложенные к поверхности тела на некоторой его площади или длине. Поверхностные силы в свою очередь делятся на сосредоточенные и распределенные. Нагрузка называется **сосредоточенной**, если она приложена к элементу конструкции в одной точке, т.е. как бы «сосредоточена» в ней. В действительности передачу нагрузки через одну точку осуществить нельзя, но если площадка, по которой передается нагрузка, мала, то можно ввести модель – «**сосредоточенная сила**». Например, конец балки передает нагрузку на стену по некоторой площадке, размеры которой по сравнению с площадью стены незначительны.

Линией действия силы называется прямая, вдоль которой направлена сила. **Системой сил** будем называть совокупность сил, действующих на рассматриваемое тело (или тела).

1.2. Равнодействующая сил, разложение силы и проекция силы на ось

Если действие системы сил можно заменить одной силой, то эта сила называется **равнодействующей** данной системы сил. **Равнодействующая \vec{R} сходящихся сил** – это вектор, равный геометрической сумме сил системы и приложенный в точке пересечения

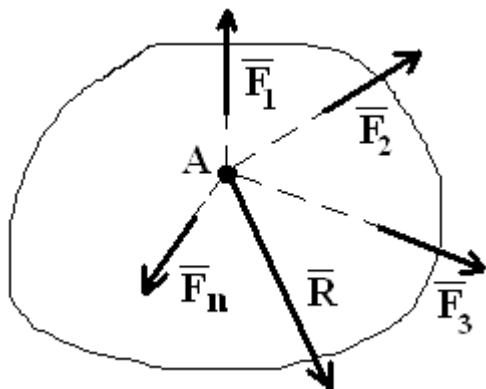


Рис. 1.1

чения их линий действия (см. рис. 1.1).

Разложить силу на несколько **составляющих** – значит, найти такую систему сил, для которой данная сила является равнодействующей. Эта задача имеет однозначное решение лишь при задании дополнительных условий:

например, мы хотим разложить силу \vec{F} по двум заданным направлениям осей координат X и Y, тогда \vec{F}_X и \vec{F}_Y – составляющие силы \vec{F} (рис. 1.2).

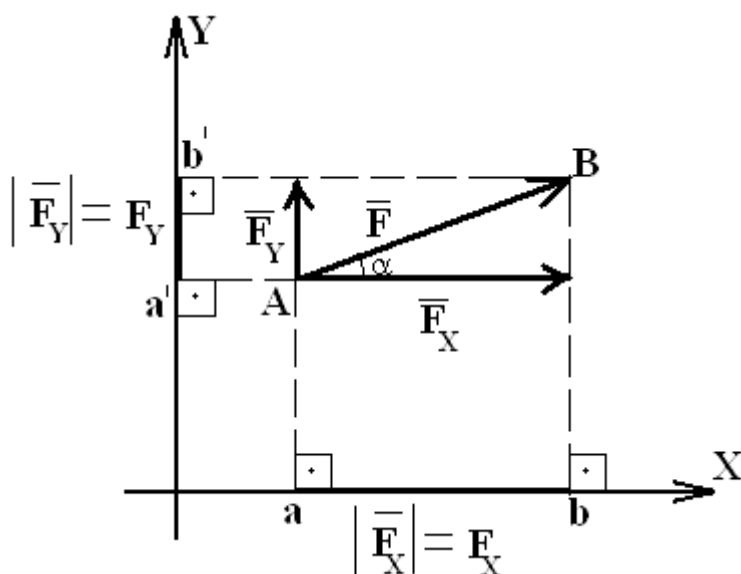


Рис. 1.2

Проекция силы \vec{F} на координатную ось является **алгебраической величиной**, которая может быть

определена как расстояние между проекциями конца B и начала A этой силы на соответствующую ось:

$$F_x = |a b| = F \cdot \cos \alpha,$$

$$F_y = |a' b'| = F \cdot \cos (90 - \alpha) = F \cdot \sin \alpha.$$

Таким образом, **проекция силы \vec{F} на ось** определяется произведением модуля силы на косинус угла, образованного линией действия силы и положительным направлением этой оси (рис. 1.2). При нахождении проекции силы на ось можно пользоваться следующим приемом: вычислять модуль проекции силы как произведение модуля силы на косинус острого угла между линией действия силы и соответствующей осью, а знак проекции определять в зависимости от

ситуации. Для сил, изображенных на рис. 1.3, а, проекции положительны:

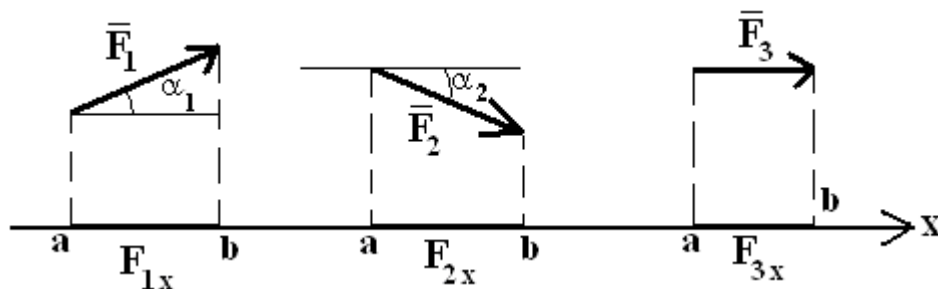


Рис.1.3, а

$$F_{1x} = F_1 \cos \alpha_1; \quad F_{2x} = F_2 \cos \alpha_2; \quad F_{3x} = F_3 \cos 0 = F_3,$$

а на рис. 1.3, б – отрицательны:

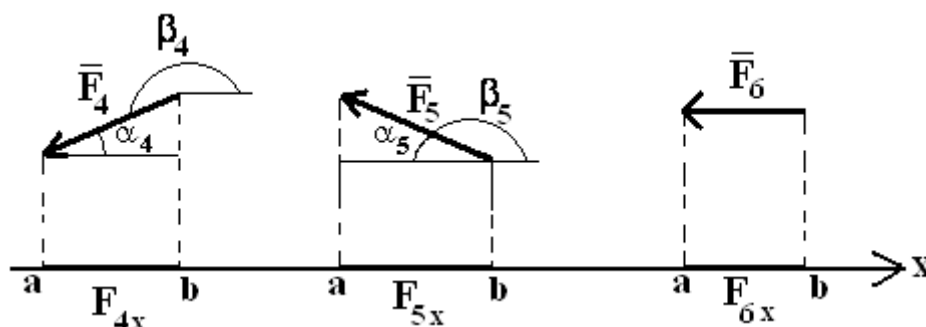


Рис.1.3, б

$$F_{4x} = F_4 \cos \beta_4 = -F_4 \cos \alpha_4;$$

$$F_{5x} = F_5 \cos \beta_5 = -F_5 \cos \alpha_5;$$

$$F_{6x} = F_6 \cos 180^\circ = -F_6.$$

1.3 Момент силы относительно точки

Для характеристики вращательного действия силы относительно неподвижной точки вводят понятие момента силы. Точку, относительно которой берется момент, называют **центром момента**, или **моментной точкой**, а момент силы относительно этой точки – **моментом относительно центра** (рис. 1.4). Длину перпендикуляра h , опущенного из моментной точки на линию действия силы, называют **плечом силы \vec{F}** относительно центра O .

Алгебраическим моментом силы \vec{F} относительно центра O

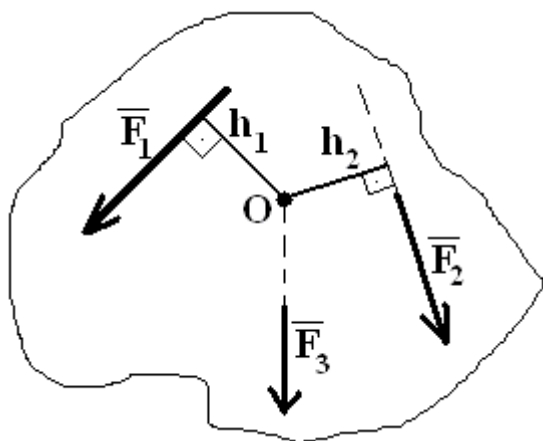


Рис. 1.4

называется произведение модуля силы на плечо, взятое со знаком плюс или минус


$$M_O(\bar{F}) = \pm F \cdot h.$$

Размерность момента силы $[H \cdot м]$ или $[кН \cdot м]$.

Если сила стремится повернуть тело против хода часовой стрелки



, то момент силы берется со знаком «+», если же по ходу часовой стрелки, то со

знаком «-» . Так, для сил, изображенных на рис. 1.4, моменты равны:

$$M_O(\bar{F}_1) = + F_1 \cdot h_1,$$

$$M_O(\bar{F}_2) = - F_2 \cdot h_2,$$

а момент силы \bar{F}_3 равен нулю $M_O(\bar{F}_3) = 0$, так как линия действия силы проходит через моментную точку и плечо $h_3 = 0$.

В тех случаях, когда определение величины плеча h связано с трудностями вычислений, удобнее разложить силу \bar{F} на составляющие \bar{F}_x и \bar{F}_y , а затем применить теорему Вариньона. Она формулируется следующим образом: «Момент силы \bar{F} относительно центра O равен алгебраической сумме моментов сил ее составляющих (\bar{F}_x и \bar{F}_y) относительно той же точки».

$$M_O(\bar{F}) = M_O(\bar{F}_x) + M_O(\bar{F}_y). \quad (1.1)$$

Изобразим схематически применение формулы (1.1): разложим силу \bar{F} на две составляющие силы \bar{F}_x и \bar{F}_y (рис. 1.5). Тогда момент силы \bar{F} относительно точки O будет $M_O(\bar{F}) = -F \cdot h = -F_x \cdot a + F_y \cdot b$ или

$$M_O(\bar{F}) = -F \cdot \cos \alpha \cdot a + F \cdot \sin \alpha \cdot b. \quad (1.2)$$

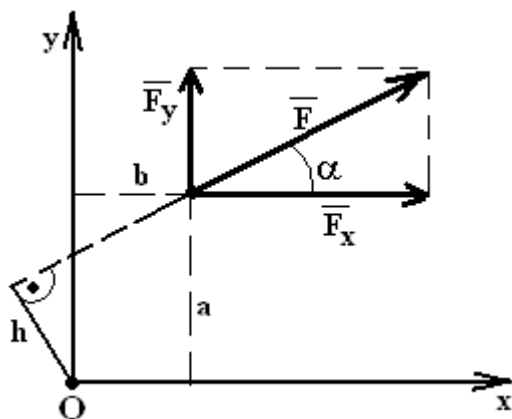


Рис. 1.5

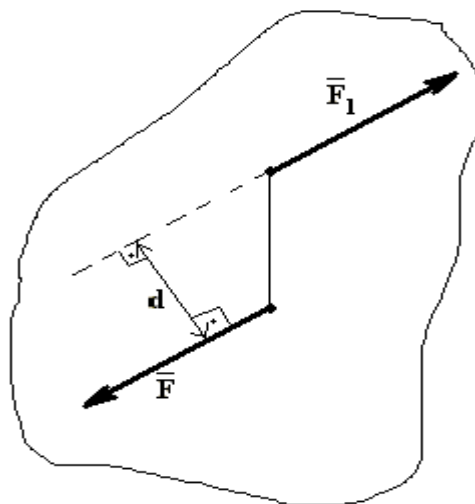


Рис. 1.6

1.4. Пара сил

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в разные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело (рис 1.6). Система сил \vec{F} , \vec{F}_1 , образующих пару, не находится в равновесии, в то же время пара сил не имеет равнодействующей, так как $\vec{R} = \vec{F} + \vec{F}_1 = 0$. Действие пары сводится к вращательному эффекту, потому что она стремится повернуть твердое тело, к которому приложена.

Кратчайшее расстояние d между линиями действия сил (\vec{F} , \vec{F}_1) называется **плечом пары**. Вращательный эффект создаваемый парой сил характеризуется её алгебраическим моментом, равным произведению модуля одной из сил пары на плечо, взятое со знаком «+» или «-»

$$M(\vec{F}, \vec{F}_1) = \pm F \cdot d. \quad (1.3)$$

Момент пары берется со знаком плюс \oplus , если вращает против хода часовой стрелки, и со знаком минус \ominus – по ходу часовой стрелки. Изображают действие момента пары или ломаной стрелкой, или дуговой стрелкой (рис. 1.7) и обозначают буквой М.

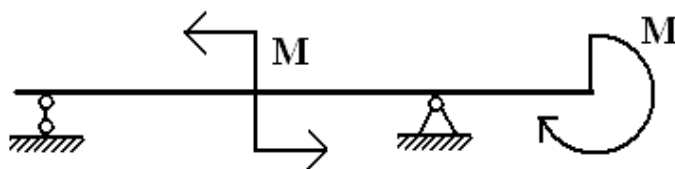


Рис. 1.7

1.5. Распределенные силы

К распределенным нагрузкам относятся силы, которые непрерывно приложены по некоторой площади или длине элемента конструкции (снег, засыпка в междуэтажных перекрытиях). **Нагрузки распределены** вдоль данной поверхности по тому или иному закону. Далее будем рассматривать распределенные силы, лежащие в одной плоскости. Плоская система распределенных сил характеризуется ее интенсивностью q , то есть значением силы, приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка. Измеряется интенсивность нагрузки в $[Н/м]$ или $[кН/м]$.

а) *Силы, равномерно распределенные вдоль отрезка прямой.*

Если нагрузка распределена по длине равномерно, то она называется **равномерно распределенной**, или **погонной**. Интенсивность q имеет постоянное значение (рис. 1.8, а).

В случае определения опорных реакций распределенную нагрузку необходимо заменить равнодействующей силой R , приложенной в середине отрезка АВ и по модулю равной $R = q \cdot \ell$.

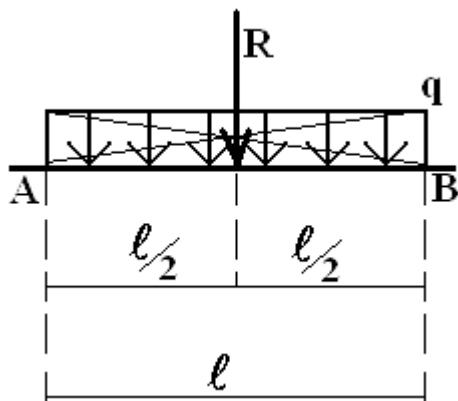


Рис. 1.8, а

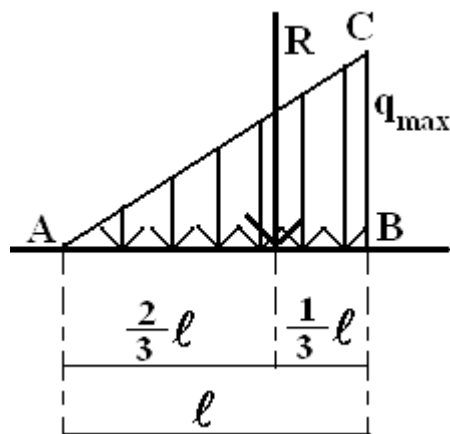


Рис. 1.8, б

б) *Силы, распределенные по линейному закону вдоль отрезка прямой.*

Если интенсивность q является величиной переменной, растущей от нуля до максимального значения q_{\max} по прямой, то нагрузка называется **линейно распределенной** (рис. 1.8, б).

Такую распределенную нагрузку заменяем равнодействующей силой R , приложенной на расстоянии $\frac{\ell}{3}$ от стороны ВС (q_{\max}) треугольника ABC и по модулю равной $R = \frac{1}{2} q_{\max} \cdot \ell$.

1.6. Некоторые типы связей и их реакции

Тело, перемещение которого ограничено в пространстве, называется **несвободным**. Все то, что ограничивает перемещение этого тела, есть **связь**. Сила, с которой данная связь действует на тело, называется **силой реакции** (противодействия) **связи**, или просто **реакцией связи**. Она направлена в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу.

1.6.1. Гладкая поверхность или опора

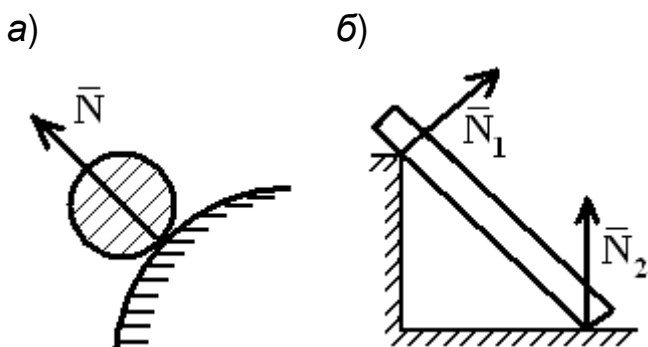


Рис. 1.9

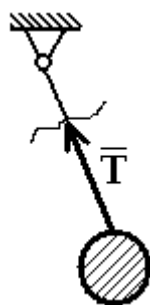
Реакция \bar{N} гладкой поверхности или опоры направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел и приложена в точке их касания (рис. 1.9).

Когда одна из соприкасающихся поверхностей является точкой (рис. 1.9, б), то реакция направлена по нормали к другой поверхности.

1.6.2. Нерастяжимая нить

Эта связь не дает телу удаляться от точки подвеса, поэтому реакция \bar{T} направлена вдоль нити к точке ее подвеса (рис. 1.10, а).

а)



б)

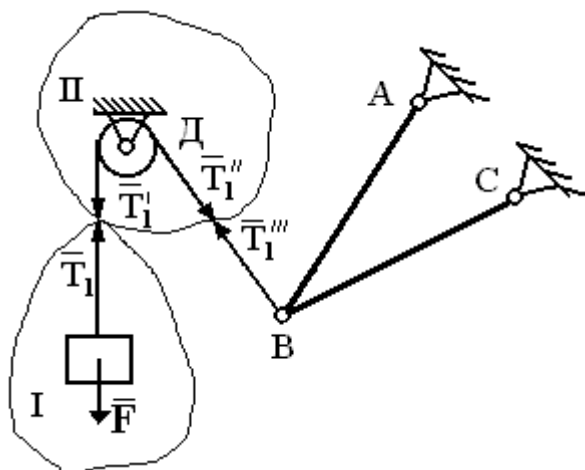


Рис. 1.10

Нерастяжимая нить может соединять различные части конструкции, при этом натяжение нити в каждой ее точке будет одно и то же по величине \bar{T} , ведь нить нерастяжима, но различно по направлению, и **всегда** направлена вдоль нити. В качестве примера рассмотрим конструкцию, изображенную на рис. 1.10, б, и проанализируем каждую ее часть в отдельности. Рассматривая равновесие груза F (область I), видим, что на него действуют две вертикальные силы: вес \bar{F} , направленный вниз, и

реакция (натяжение) нити \bar{T}_1 – вверх. Эти силы уравновешены, поэтому они должны быть равны друг другу по модулю, т.е. $T_1 = F$.

Если мы теперь хотим рассмотреть равновесие блока Д, то объектом равновесия становится этот блок (рис. 1.10, б, область II). Силы трения на блоке учитывать не будем, считая поверхность блока идеально гладкой. Тогда мысленно рассекая левый и правый конец нити вблизи блока Д, заменим действие отброшенных частей нити её натяжениями \bar{T}_1' и \bar{T}_1'' . Эти силы равны по модулю силе \bar{F} , т.е. $T_1 = T_1' = T_1'' = F$, но линии их действия различны по направлению. Таким образом, можно сделать вывод, что гладкий блок в конструкции не изменяет величину силы, а лишь меняет ее направление.

В случае, когда мы хотим в данной конструкции в качестве объекта равновесия рассмотреть узел В, то от него вдоль рассматриваемой нити навстречу \bar{T}_1'' направлена сила \bar{T}_1''' , которая по

принципу равенства действия и противодействия должна быть равна по модулю силе \bar{T}_1'' , т.е. $T_1''' = T_1'' = F$.

1.6.3. Невесомый стержень

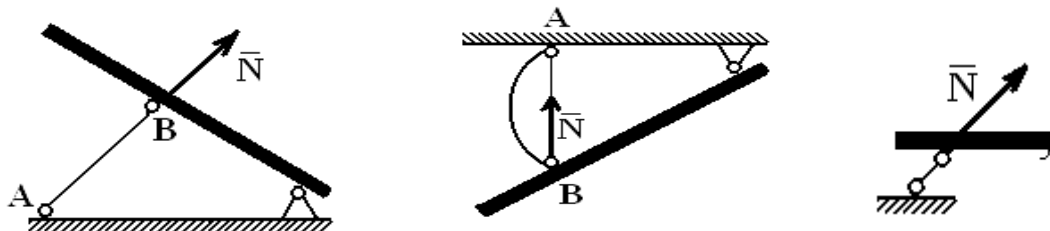


Рис. 1.11

Невесомым стержнем называют стержень, весом которого по сравнению с воспринимаемой им нагрузкой можно пренебречь. Его реакция \bar{N} направлена от шарнира к шарниру (рис. 1.11).

1.6.4. Шарнирно-подвижная опора

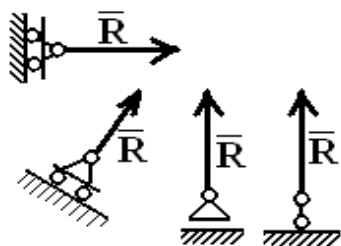


Рис. 1.12

Реакция такой опоры \bar{R} всегда перпендикулярна плоскости опирания. На расчетных схемах она изображается, как показано на рис. 1.12.

1.6.5. Цилиндрический шарнир или шарнирно-неподвижная опора

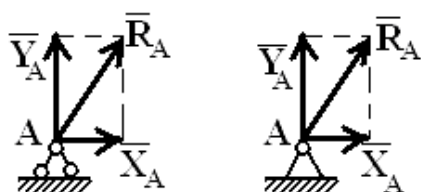


Рис. 1.13

Реакция \bar{R}_A такой опоры может иметь любое направление в плоскости, поэтому мы ее раскладываем на две составляющие \bar{X}_A, \bar{Y}_A (рис. 1.13).

1.6.6. Скользящая заделка

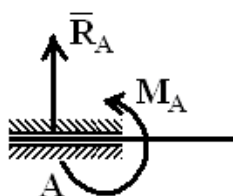


Рис. 1.14

Эта связь не позволяет телу поворачиваться и двигаться перпендикулярно оси направляющей, т.е. у неё две реакции \bar{R}_A и M_A (реактивный момент) (рис. 1.14).

1.6.7. Жесткая заделка

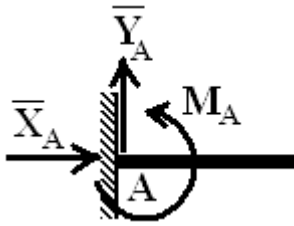


Рис. 1.15

Данная связь не позволяет телу поворачиваться и двигаться в плоскости, т.е. у неё три реакции M_A и \bar{X}_A, \bar{Y}_A (рис. 1.15).

1.7. Уравнения равновесия

Если на твердое тело действует **плоская система сходящихся сил** (линии действия этих сил должны сходиться в одной точке), то условие равновесия можно записать в виде алгебраической суммы проекций всех сил на координатные оси X и Y :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0. \quad (1.4)$$

Когда твердое тело находится под действием **произвольной плоской системы сил** для его равновесия необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил на координатные оси X и Y равнялась нулю, а также и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно произвольной точки равнялась нулю.

Три формы уравнений равновесия:

первая форма	вторая форма	третья форма
$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0;$	$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0;$	$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0;$
$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad (1.5)$	$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad (1.6)$	$\sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) = 0; \quad (1.7)$
$\sum_{k=1}^n M_O(\bar{F}_k) = 0;$	$\sum_{k=1}^n M_O(\bar{F}_k) = 0;$	$\sum_{k=1}^n M_O(\bar{F}_k) = 0.$

Для второй формы есть ограничение – ось X не должна быть перпендикулярна линии OA . В третьей форме уравнений равновесия точки A, B и O не должны лежать на одной прямой.

Для равновесия произвольной **пространственной системы сил**, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор системы сил и главный момент сил относительно произвольной точки O пространства были равны нулю:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n \bar{F}_k = 0; \\ \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k) = 0. \end{cases}$$

1.8. Центр тяжести тела или системы тел

Любое тело или систему тел можно рассматривать как состоящие из большого числа малых частиц, на которые действуют силы тяжести, направленные к центру Земли. Так как размеры тел, с которыми приходится иметь дело в технике, ничтожно малы по сравнению с размерами Земли ($R_{\text{Земли}} \approx 6371 \text{ км}$), то можно считать, что приложенные к частицам силы тяжести параллельны и вертикальны. Они образуют систему параллельных сил. равнодействующую таких сил находят как их алгебраическую сумму, а прикладывают ее к точке называемой **центром тяжести тела**.

Так как центр параллельных сил не зависит от направления сил, то центр тяжести тела не меняет своего положения, как бы мы не повернули тело. Координаты центра тяжести твердого тела можно определить как координаты центра любых параллельных сил с помощью теоремы Вариньона о моменте равнодействующей относительно любого центра (1.1)

$$M_O(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n M_O(\bar{P}_k).$$

Если силы параллельны оси OY : $R x_C = P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_n x_n$, тогда

$$x_C = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_n x_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n} = \frac{\sum_{k=1}^n P_k x_k}{\sum_{k=1}^n P_k}. \quad (1.8)$$

Поворачивая систему сил на 90° в плоскости XOY (силы становятся параллельными оси OX), аналогичным образом находим

$$y_C = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots + P_n y_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n} = \frac{\sum_{k=1}^n P_k y_k}{\sum_{k=1}^n P_k}. \quad (1.9)$$

Если система параллельных сил пространственная, то третья координата центра параллельных сил будет

$$z_C = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2 + \dots + P_n z_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n} = \frac{\sum_{k=1}^n P_k z_k}{\sum_{k=1}^n P_k}. \quad (1.10)$$

Формулы (1.8) – (1.10) позволяют вычислять координаты центра тяжести тела, считая P_k силами тяжести отдельных частей тела, а x_k, y_k, z_k – координатами их центров тяжести. Суммы произведений сил на координаты точек их приложения, стоящие в числителях этих формул, называют **статическими моментами**.

Центр тяжести симметричного тела лежит в плоскости симметрии. Например, центр тяжести отрезка прямой линии находится в его середине, центр тяжести плоской однородной симметричной фигуры – на оси симметрии.

В однородном теле силы тяжести отдельных его частей пропорциональны их объемам, поэтому в формулах (1.8) – (1.10) можно P_k заменить объемами V_k соответствующих частей:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n V_k x_k}{V}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n V_k y_k}{V}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n V_k z_k}{V}, \quad \text{где } V = \sum_{k=1}^n V_k.$$

Для фигуры (рис. 1.16), состоящей из однородных плоских пластин с площадями A_k , центр масс определяется формулами

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n A_k x_k}{A} \quad \text{и} \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n A_k y_k}{A}, \quad (1.11)$$

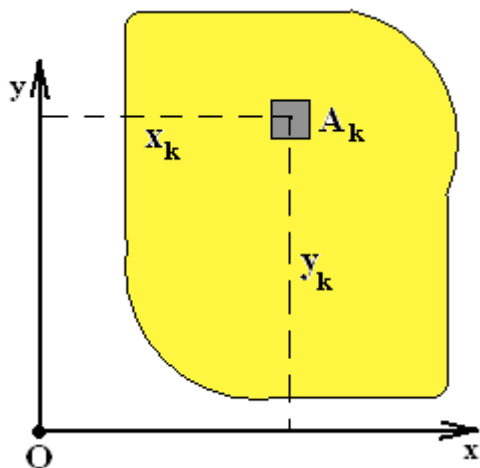


Рис. 1.16

где $A = \sum_{k=1}^n A_k$. Суммы произведений площадей на координаты точек их приложения, стоящие в числителях этих формул, называют **статическими моментами площадей**:

$$S_x = \sum_{k=1}^n A_k \cdot y_k, \quad S_y = \sum_{k=1}^n A_k \cdot x_k.$$

Для стержневой конструкции, составленной из балок длиной ℓ_k , центр тяжести имеет координаты:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n \ell_k x_k}{\ell}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n \ell_k y_k}{\ell}, \quad \text{где } \ell = \sum_{k=1}^n \ell_k.$$

1.8.1. Способы определения координат центров тяжести простейших плоских тел

а) Если однородное тело имеет ось или центр симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно на оси симметрии или в центре симметрии (**метод симметрии**). Допустим, однородное тело имеет ось симметрии (рис. 1.17, а). Тогда оно разбивается на две части, площади которых A_1 и A_2 равны друг другу, а центры тяжести находятся на одинаковых расстояниях от оси симметрии. Следовательно, центр тяжести тела как точка будет действительно лежать на оси симметрии. Если тело имеет две оси симметрии, то центр масс будет лежать на пересечении осей (рис. 1.17, б). В случаях, когда тело имеет центр симметрии, то центр тяжести и центр симметрии совпадают (рис. 1.17, в).

б) Если тело можно разбить на конечное число частей, для каждой из которых положение центра тяжести известно, то координаты центра тяжести всего тела можно непосредственно вычислить по формулам (1.11). Число слагаемых при этом в каждой из сумм будет равно числу частей, на которые разбито тело (**метод разбиения**).

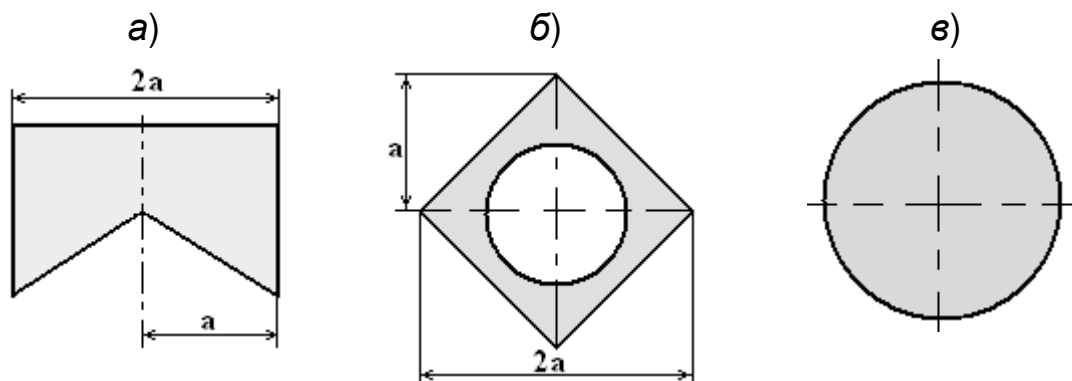


Рис. 1.17

в) Если тело имеет вырезы (отверстия), причем центры тяжести тела без выреза и вырезанной части известны, то можно вычислить положение центра тяжести фигуры по формулам (1.11), учитывая площадь выреза с отрицательным знаком (**метод дополнения**).

2. Методические указания, примеры решения и задания по статике

Определение реакций опор, с помощью которых крепится конструкция в целом или её элементы между собой, является основной задачей статики, т.к. позволяет перейти к решению задач сопротивления материалов, строительной механики, производить расчет инженерных сооружений на прочность и жесткость.

2.1. Последовательность решения задач по статике

1. Определить объект равновесия.
2. Изобразить действующие силы, включая как заданные, так и реакции всех связей.
3. Составить условия равновесия в одном из видов (1.5), (1.6), (1.7).
4. Определить искомые величины, проверить правильность решения и исследовать полученные результаты.

2.2. Примеры решения задания № 1.

Определение усилий в стержнях механической системы, находящейся в равновесии

Пример 1. Стержни АВ и ВС соединены между собой шарниром В и посредством шарниров А и С прикреплены к опорам. К узлу В с по-

мощью нерастяжимых и невесомых нитей, перекинутых через неподвижный шарнир Д, подвешены грузы веса P и F (рис. 2.1). Определить усилия в стержнях, если $P = 20 \text{ кН}$, $F = 30 \text{ кН}$.

Дано: $P = 20 \text{ кН}$; $F = 30 \text{ кН}$.

Определить: \bar{S}_A , \bar{S}_C .

Решение. 1. Выделим объект равновесия, в котором сходятся все стержни и нити – это шарнир В.

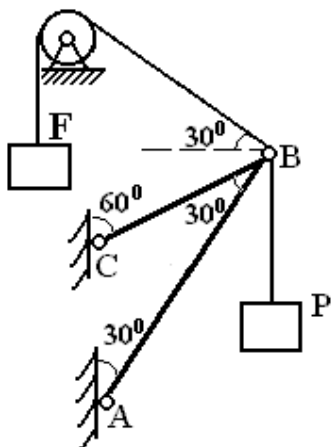


Рис. 2.1

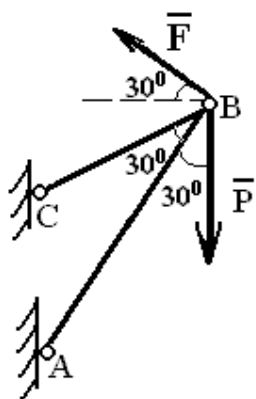


Рис. 2.2

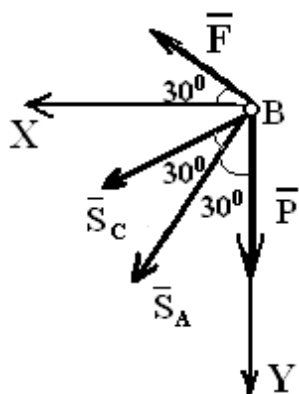


Рис. 2.3

2. Для определения усилий в стержнях АВ и СВ следует предварительно определить действие грузов P и F на этот шарнир. Учитывая, что нити нерастяжимые, их натяжения равны весу грузов, т.е. к узлу В приложены силы \bar{P} и \bar{F} , направленные от шарнира В вдоль нитей (рис. 2.2). Теперь, когда активные силы, приложенные к точке В, определены как по величине, так и направлению, найдем реакции связей. В данном случае связями являются стержни АВ и СВ. Их реакции \bar{S}_A и \bar{S}_C направим вдоль стержней от шарнира В, предполагая их растянутыми. Таким образом, к узлу В приложена система сходящихся сил, изображенная на рис. 2.3.

3. Выберем систему координат: направим ось X по горизонтали влево, а ось Y по вертикали вниз и составим уравнение равновесия

$$\bar{F} + \bar{S}_C + \bar{S}_A + \bar{P} = \bar{0}. \quad (2.1)$$

Спроектируем его на выбранные координатные оси:

$$\sum_{k=1}^4 F_{kx} = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^4 F_{ky} = 0, \Rightarrow$$

$$F \cos 30^\circ + S_C \cdot \cos 30^\circ + S_A \cdot \cos 60^\circ + 0 = 0; \quad (2.2)$$

$$P + S_A \cdot \cos 30^\circ + S_C \cdot \cos 60^\circ - F \cdot \cos 60^\circ = 0. \quad (2.3)$$

4. Решив полученную систему линейных уравнений, определим усилия в стержнях. Из уравнения (2.2) выразим

$$\begin{aligned} S_C &= \frac{-F \cdot \cos 30^\circ - S_A \cdot \cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{-30 \cdot 0.866 - S_A \cdot 0.5}{0.866} = \\ &= -30 - 0.577 \cdot S_A \end{aligned} \quad (2.4)$$

и подставим данное выражение в уравнение (2.3)

$$20 + S_A \cdot 0.866 + (-30 - 0.577 \cdot S_A) \cdot 0.5 - 30 \cdot 0.5 = 0.$$

Из последнего равенства определим $S_A = 17.331 \text{ кН}$. Полученное значение S_A подставим в выражение (2.4) и вычислим

$$S_C = -30 - 0.577 \cdot (17.331) = -40 \text{ кН}.$$

Отрицательное значение силы \bar{S}_C указывает на то, что стержень СВ сжат, а не растянут, как мы предположили ранее. Стержень АВ – растянут ($S_A > 0$).

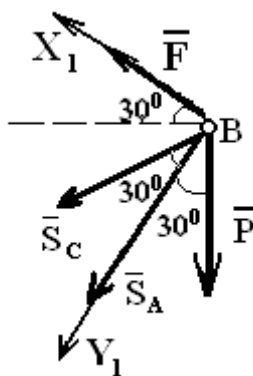


Рис. 2.4

Более рациональным решение получается в другой системе координат. Например, если ось X_1 , направить вдоль силы \bar{F} , а ось Y_1 вдоль силы \bar{S}_A , так как они образуют прямой угол (рис. 2.4), то уравнение (2.1) в проекциях на новые оси запишется в виде:

$$\sum_{k=1}^4 F_{kx} = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^4 F_{ky} = 0, \Rightarrow$$

$$F + S_C \cdot \cos 60^\circ + 0 - P \cdot \cos 60^\circ = 0; \quad (2.5)$$

$$0 + S_C \cdot \cos 30^\circ + S_A + P \cdot \cos 30^\circ = 0. \quad (2.6)$$

Из уравнения (2.5) сразу же находим $S_C = \frac{P \cdot \cos 60^\circ - F}{\cos 60^\circ} = -40 \text{ кН}$,

а затем, подставив его в (2.6), получим

$$S_A = -P \cdot \cos 30^\circ - S_C \cdot \cos 30^\circ = -0.866 \cdot (20 - 40) = 17.332 \text{ кН}.$$

Ответ: $S_A = 17.331 \text{ кН}$, $S_C = -40 \text{ кН}$.

Пример 2. Стержни АВ и ВС соединены между собой шарниром В и посредством шарниров А и С прикреплены к опорам. К узлу В с помощью нерастяжимых и невесомых нитей, перекинутых через неподвижный шарнир Д, подвешен груз веса P (рис. 2.5). Определить усилия в стержнях, если $P = 10 \text{ кН}$.

Дано: $P = 10 \text{ кН}$.

Определить: \bar{S}_{AB} , \bar{S}_{BC} .

Решение. 1. Выделим объект равновесия, в котором сходятся все стержни и нити, – это шарнир В.

2. Для определения усилий в стержнях АВ и СВ следует предварительно определить действие груза P на этот шарнир. Учитывая, что нить нерастяжима, натяжения равны весу груза, то есть к узлу В

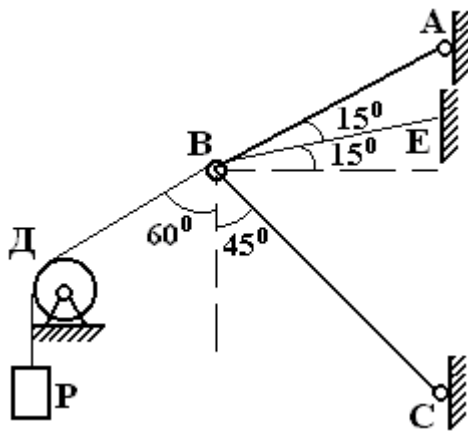


Рис. 2.5

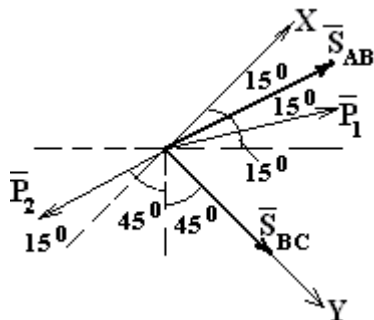


Рис. 2.6

приложены силы \bar{P}_1 и \bar{P}_2 , направленные от шарнира В вдоль нитей, при этом $P_1 = P_2 = P$. Теперь, когда активные силы, приложенные к точке В, определены и по величине, и по направлению, найдем реакции связей. В данном случае связями являются стержни АВ и СВ. Их реакции \bar{S}_{AB} и \bar{S}_{BC} направим вдоль стержней от шарнира В, предполагая их растянутыми. То есть к узлу В приложена система сходящихся сил, изображенная на рис. 2.6.

3. Выберем систему координат: направим ось Y по стержню ВС вправо, а ось X перпендикулярно ей и составим уравнение равновесия

$$\bar{P}_1 + \bar{S}_{BC} + \bar{S}_{AB} + \bar{P}_2 = \bar{0}. \quad (2.7)$$

Спроектируем его на выбранные координатные оси:

$$\sum_{k=1}^4 F_{kx} = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^4 F_{ky} = 0, \Rightarrow$$

$$P_1 \cdot \cos 30^\circ - P_2 \cdot \cos 15^\circ + S_{AB} \cdot \cos 15^\circ = 0; \quad (2.8)$$

$$S_{BC} + S_{AB} \cdot \cos 75^\circ + P_1 \cdot \cos 60^\circ - P_2 \cdot \cos 75^\circ = 0. \quad (2.9)$$

4. Решив полученную систему линейных уравнений, определим усилия в стержнях. Из уравнения (2.8) найдем

$$S_{BA} = \frac{P_2 \cdot \cos 15^\circ - P_1 \cdot \cos 30^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{10 \cdot 0.966 - 10 \cdot 0.866}{0.966} = 1.03 \text{ кН}$$

и подставим данное значение в уравнение (2.9)

$$\begin{aligned} S_{BC} &= P_2 \cdot \cos 75^\circ - P_1 \cdot \cos 60^\circ - S_{AB} \cdot \cos 75^\circ = \\ &= 10 \cdot (0.258 - 0.5) - 1.03 \cdot 0.258 = -2.68 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Отрицательное значение силы \bar{S}_{BC} указывает на то, что стержень СВ сжат, а не растянут, как мы предположили ранее. Стержень АВ – растянут ($S_{AB} > 0$).

Ответ: $S_{AB} = 1.03 \text{ кН}$, $S_{BC} = -2.68 \text{ кН}$.

2.3. Методические указания к заданию № 1

1. При выборе координатных осей рекомендуем направлять одну из осей вдоль какого-нибудь стержня, а вторую – перпендикулярно ей, это облегчает решение задачи.

2. По окончании решения задачи необходимо сформулировать выводы и записать ответ. Результат можно интерпретировать следующим образом: положительное значение усилия означает, что стержень растянут, отрицательное – сжат.

2.4. Варианты задания № 1

Стержни АВ и ВС прикреплены к опорам. К шарниру В с помощью нитей, перекинутых через неподвижные блоки Д и Е, подвешены грузы веса P и F . Определить усилия в стержнях.

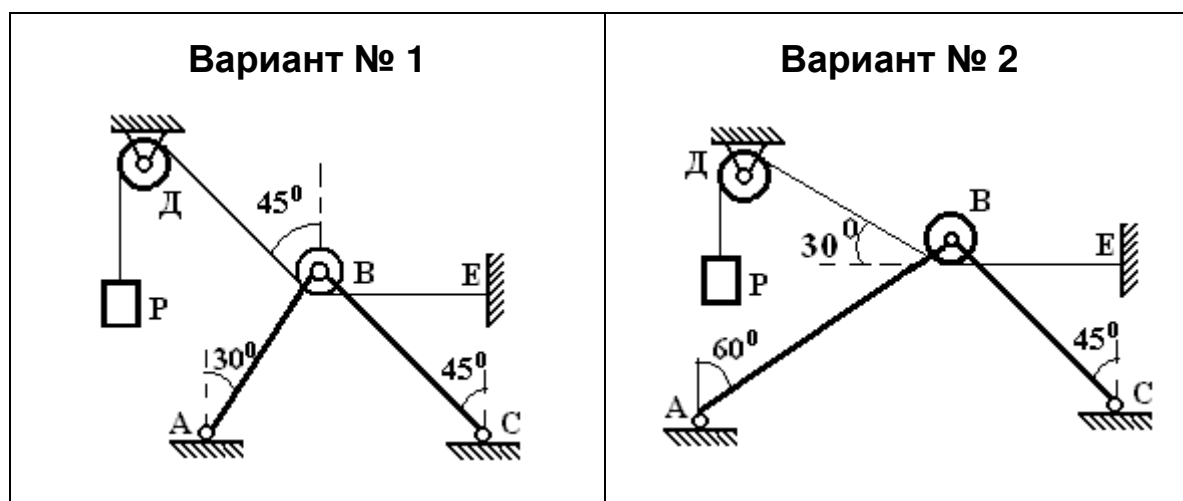
Выбор варианта

Из двадцати шести вариантов студент должен выбрать один, соответствующий его номеру в журнале преподавателя, а исходные данные студент выбирает из табл. 2.1 в соответствии с цифрой шифра, которую указывает преподаватель.

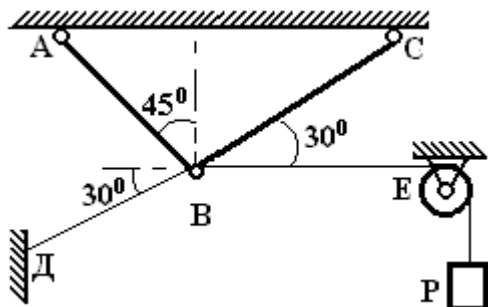
Таблица 2.1

Исходные данные к заданиям

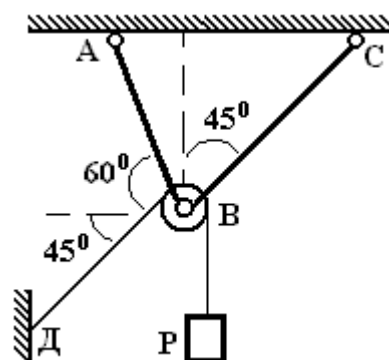
Цифра шифра	Нагрузки	
	$P(\text{кН})$	$F(\text{кН})$
1	10	8
2	6	10
3	14	12
4	12	18
5	7	5
6	16	6
7	8	8
8	10	4
9	4	10
10	6	8



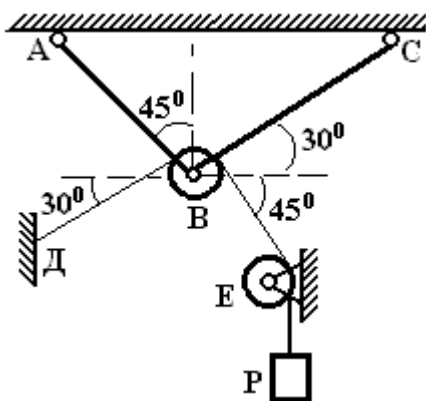
Вариант № 3



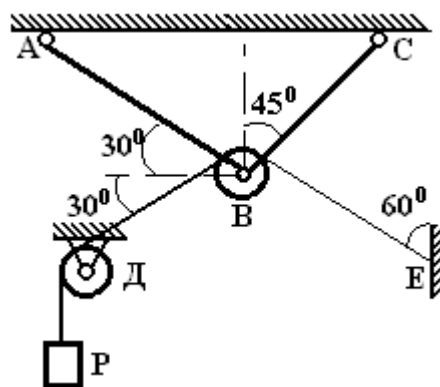
Вариант № 4



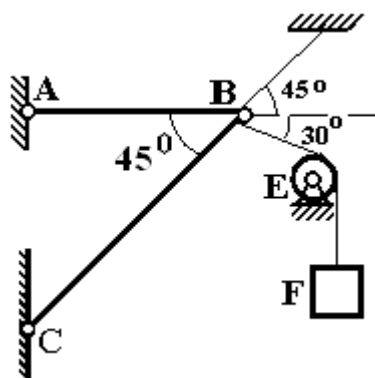
Вариант № 5



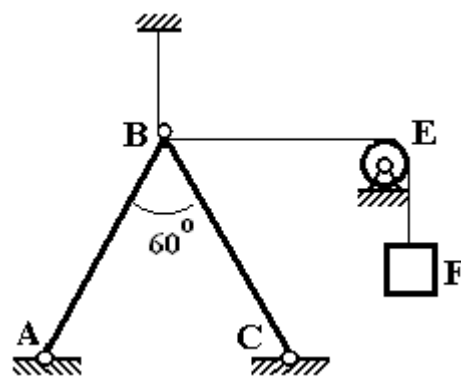
Вариант № 6



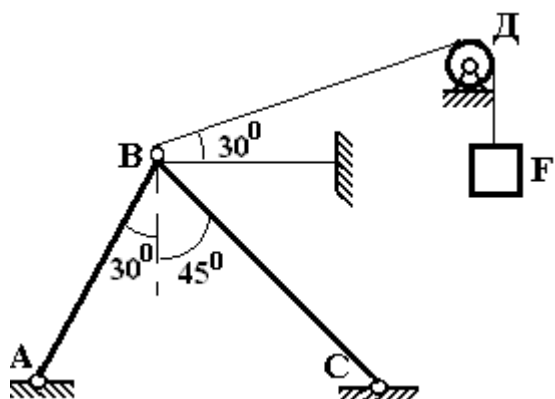
Вариант № 7



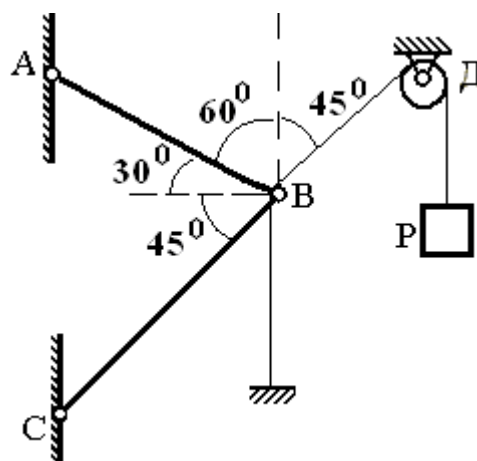
Вариант № 8



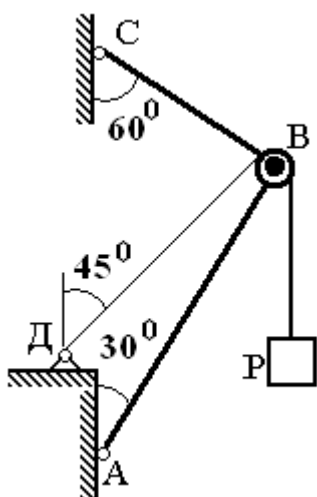
Вариант № 9



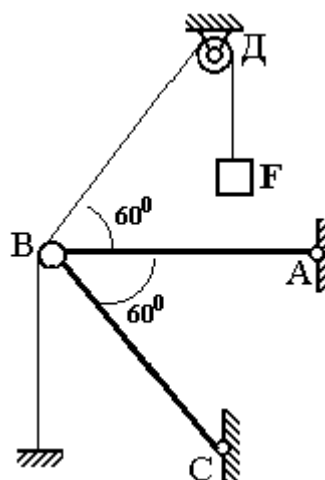
Вариант № 10



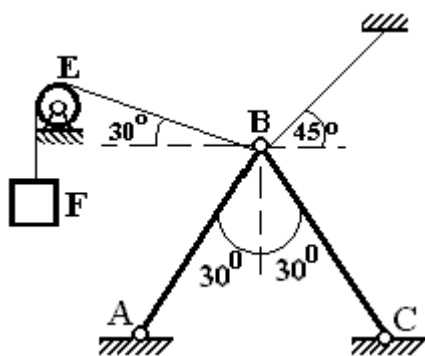
Вариант № 11



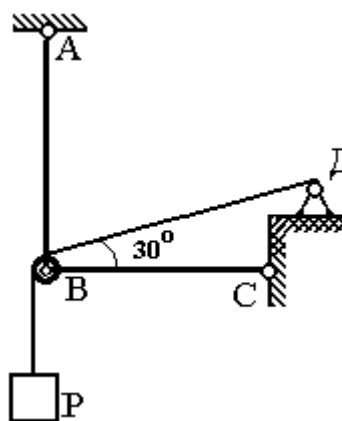
Вариант № 12



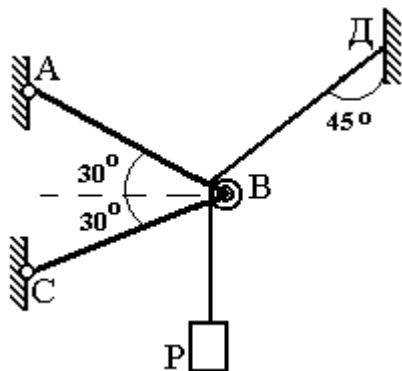
Вариант № 13



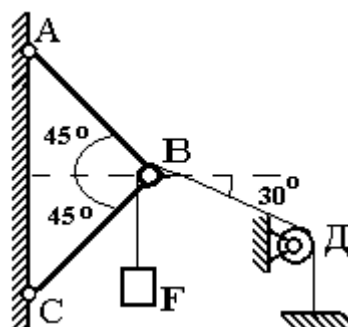
Вариант № 14



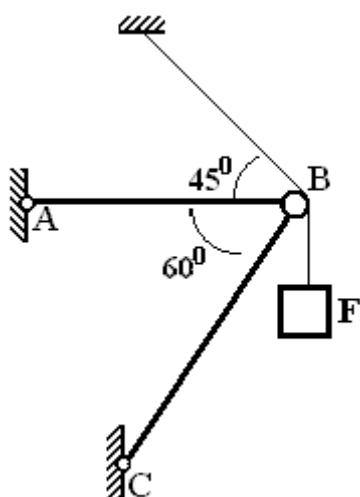
Вариант № 15



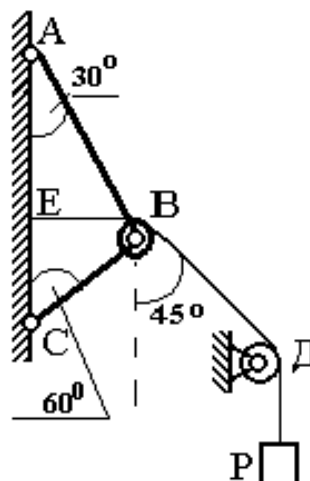
Вариант № 16



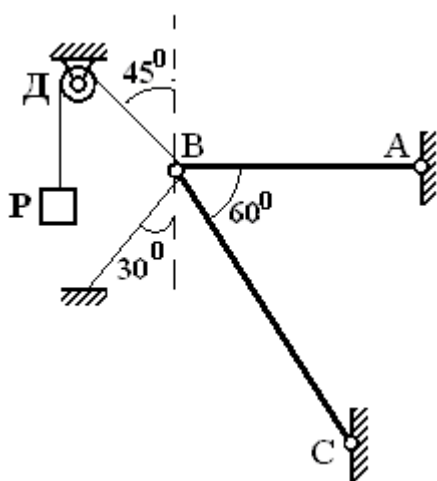
Вариант № 17



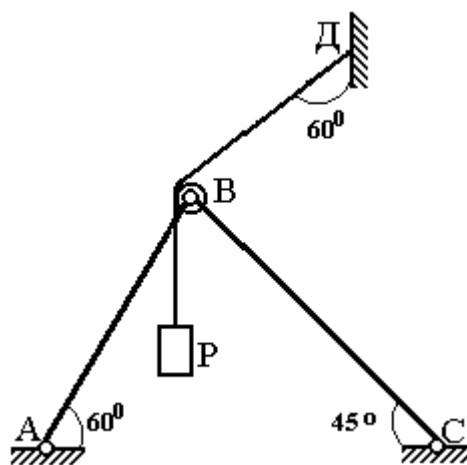
Вариант № 18



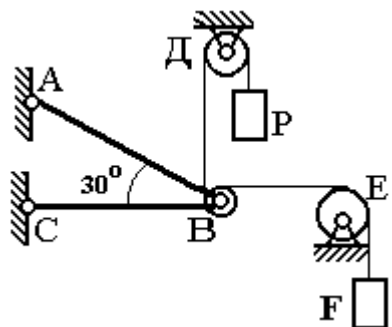
Вариант № 19



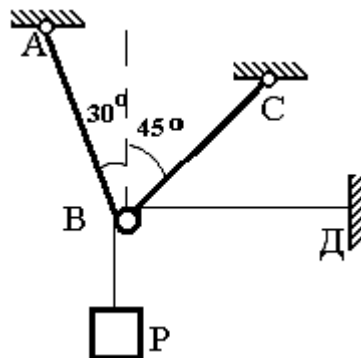
Вариант № 20



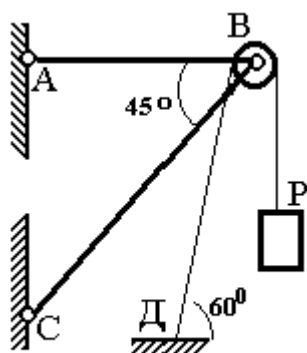
Вариант № 21



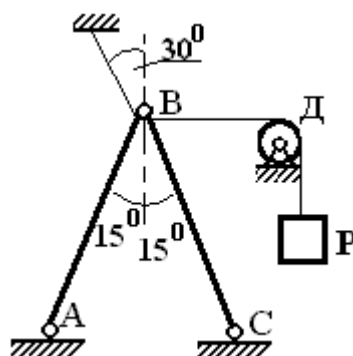
Вариант № 22



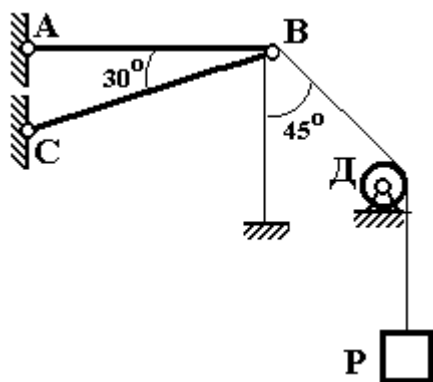
Вариант № 23



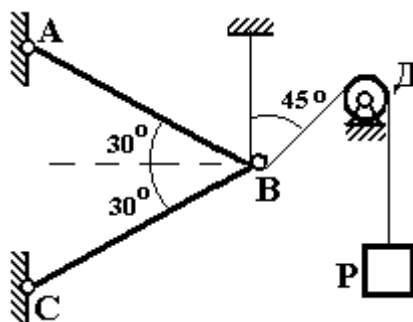
Вариант № 24



Вариант № 25



Вариант № 26



2.5. План решения задач по определению опорных реакций (задания № 2 а, б, в; 3, 4)

При решении такого типа задач план решения удобнее записать в более детализированном виде:

1. Выделить твердое тело, равновесие которого будем рассматривать для отыскания неизвестных сил (т.е. объект равновесия), выбрав при этом систему координат.
2. Изобразить активные силы.
3. Отбросить связи и приложить к телу соответствующие реакции.
4. Определить, какая система сил действует на тело и убедиться в том, что данная задача является статически определимой, т.е. количество неизвестных опорных реакций не превышает количества независимых уравнений статики, которые могут быть для нее записаны. Если задача оказалась статически неопределимой, но при этом рассматриваемая конструкция является составной (т.е. в ней есть внутренний шарнир), то конструкцию необходимо расчленить по шарниру, соединяющему две его части, и рассматривать равновесие каждой из частей в отдельности, получив две расчетные схемы. Влияние частей конструкции друг на друга заменяем реакциями (см. пример составной конструкции).
5. Для определенной нами системы координат выбрать моментные точки и составить уравнения равновесия в одной из форм (1.5) – (1.7), стр. 15.
6. Решить полученную систему уравнений, т.е. определить неизвестные реакции связей.
7. Провести проверку полученных результатов и их анализ.

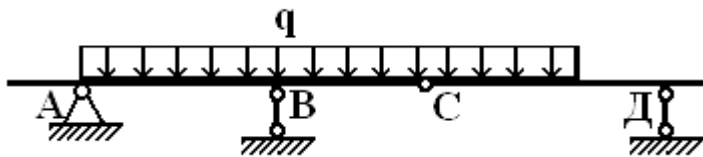
При решении стоит стремиться к написанию более простых уравнений с наименьшим числом неизвестных. Для этого следует:

- а) оси координат направлять так, чтобы некоторые из неизвестных сил оказывались перпендикулярными к одной из выбранных осей;
- б) за моментную точку стоит выбирать ту, в которой пересекаются линии действия нескольких сил. Тогда моменты этих сил относи-

тельно данной точки будут равны нулю и не войдут в уравнение моментов;

- в) в случае, если сила расположена не перпендикулярно к элементу конструкции, её необходимо раскладывать на две составляющие, параллельные координатным осям.

а)



б)

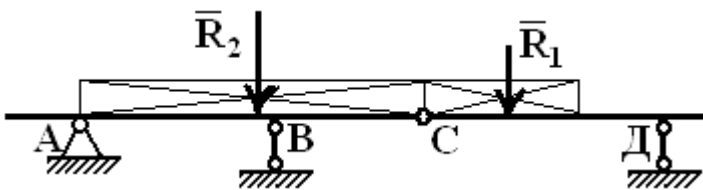


Рис. 2.7

Стоит всегда помнить, что распределенную нагрузку необходимо заменять её равнодействующей, но если она расположена на двух частях составной конструкции, то равнодействующие от неё строятся на каждой части отдельно (рис. 2.7, б).

2.6. Примеры решения задания № 2. Нахождение опорных реакций простых и составных балок при действии заданных сил

2.6.1. Задание № 2 а

Определить реакции опор балки ДВ, находящейся под действием заданной системы сил, если $P = 10 \text{ кН}$, $q = 3 \text{ кН/м}$ и $M = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (рис. 2.8). Необходимые размеры указаны на рисунке.

Дано: $P = 10 \text{ кН}$, $q = 3 \text{ кН/м}$ и $M = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Определить: реакции опор.

Решение. 1. Будем рассматривать равновесие балки ДВ (рис. 2.8).

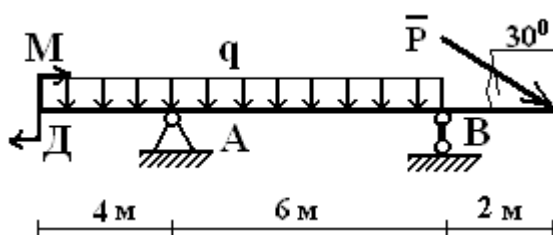


Рис. 2.8. Заданная балка

Выберем систему координат: ось X – вдоль балки вправо, а ось Y – вверх по вертикали (рис. 2.9).

2. На балку действуют следующие активные силы: сосре-

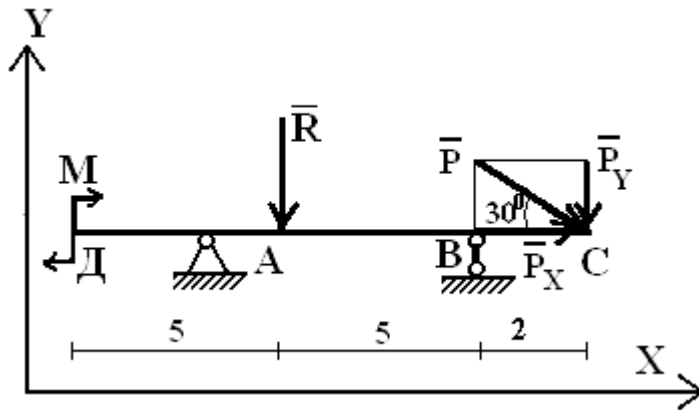


Рис. 2.9. Балка с приложенными к ней активными силами

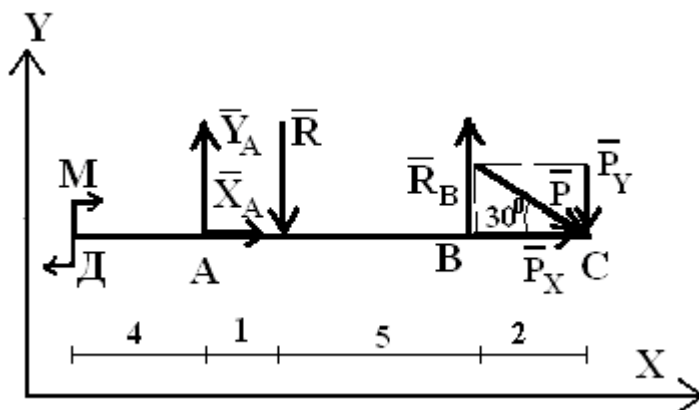


Рис. 2.10. Свободная балка с приложенными к ней активными силами и реакциями связей

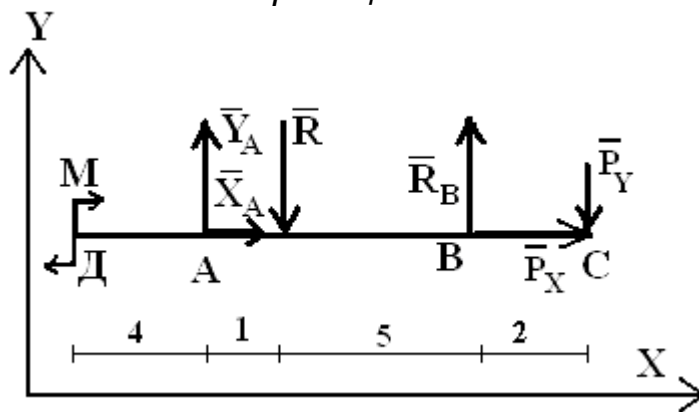


Рис. 2.11. Расчетная схема

доточенная сила \bar{P} , приложенная в точке С под углом 30° к балке, распределенная нагрузка q на участке ДВ и пара сил с моментом равным M (рис. 2.9). Разложим сосредоточенную силу \bar{P} на две ее составляющие \bar{P}_x и \bar{P}_y , где $P_x = P \cdot \cos 30^\circ$ и $P_y = P \cdot \sin 30^\circ$. Распределенную нагрузку заменим ее равнодействующей:

$$R = q \cdot DB = 3 \cdot 10 = 30 \text{ кН} \text{ (рис. 2.9).}$$

3. Применив аксиому связей, отбросим опоры и компенсируем их действие реакциями. Шарнирно - неподвижную опору А заменяем двумя взаимно перпендикулярными составляющими \bar{X}_A и \bar{Y}_A , а невесомый стержень В – на реакцию \bar{R}_B ,

направленную вдоль невесомого стержня (рис. 2.10).

4. Теперь балка свободна и находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{R}, \bar{R}_B, \bar{P}_x, \bar{P}_y$ и пары с моментом M (рис. 2.11). Неизвестными являются три силы

$\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{R}_B$, и три независимых уравнения равновесия можно составить. Следовательно, задача является статически определимой.

5. Составляем уравнения равновесия в проекциях на оси X и Y и уравнение моментов. Выбираем точку A в качестве моментной.

$$\sum_{k=1}^3 F_{kX} = 0 \Rightarrow X_A + P \cdot \cos 30^\circ = 0, \quad (2.7)$$

$$\sum_{k=1}^4 F_{kY} = 0 \Rightarrow Y_A - R + R_B - P \cdot \cos 60^\circ = 0, \quad (2.8)$$

$$\sum_{k=1}^4 M_A(\bar{F}_k) = 0 \Rightarrow -M - R \cdot 1 + R_B \cdot 6 - P \cdot \cos 60^\circ \cdot 8 = 0. \quad (2.9)$$

6. Из уравнения (2.7) находим X_A , из (2.9) – R_B и из (2.8) – Y_A :

$$X_A = -P \cdot \cos 30^\circ,$$

$$R_B = \frac{M + R \cdot 1 + P \cdot \cos 60^\circ \cdot 8}{6},$$

$$Y_A = R - R_B + P \cdot \cos 60^\circ.$$

Подставляя значения, получим

$$X_A = -10 \cdot 0.866 = -8.66 \text{ кН},$$

$$R_B = \frac{12 + 30 \cdot 1 + 10 \cdot 0.5 \cdot 8}{6} \approx 13.667 \text{ кН},$$

$$Y_A = 30 - 13.67 + 10 \cdot 0.5 \approx 21.333 \text{ кН}.$$

7. Проведем проверку правильности составленных уравнений, для этого составим уравнение моментов относительно другой моментной точки, например B .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 M_B(\bar{F}_k) = 0 &\Rightarrow -M - Y_A \cdot 6 + R \cdot 5 - P \cdot \sin 30^\circ \cdot 2 = 0, & (2.10) \\ -12 - 21.333 \cdot 6 + 30 \cdot 5 - 10 \cdot 0.5 \cdot 2 &= 0, \\ 0.002 &\approx 0. \end{aligned}$$

Ошибка в $0.002 \text{ кН} \cdot \text{м}$ – следствие округления результатов. Значит, уравнения составлены верно, и реакции опор найдены правильно. Знак « $-$ » у реакции X_A указывает на то, что фактическое направление вектора \bar{X}_A противоположно направлению, выбранному нами.

Ответ: $X_A = -8.66 \text{ кН}$, $Y_A = 21.333 \text{ кН}$, $R_B = 13.667 \text{ кН}$.

2.6.2. Задание № 2 б

Однородная горизонтальная балка в сечении А жестко заделана в стене. На балку действует заданная система сил (рис. 2.12). Размеры указаны на рисунке. Определить реакции жесткой заделки, если $F = 12 \text{ кН}$, $q = 12 \text{ кН/м}$, $M = 46 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Дано: $F = 10 \text{ кН}$, $q = 3 \text{ кН/м}$ и $M = 16 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Определить: реакции опоры балки.

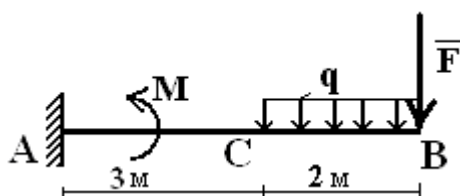


Рис. 2.12

Решение. 1. Рассмотрим равновесие балки АВ. Выберем следующую систему координат: ось X – вдоль балки вправо, а ось Y – вверх по вертикали (рис. 2.13).

2. На балку действует заданная система сил: сила \bar{F} , распределенная нагрузка интенсивностью q и пара сил с моментом равным M .

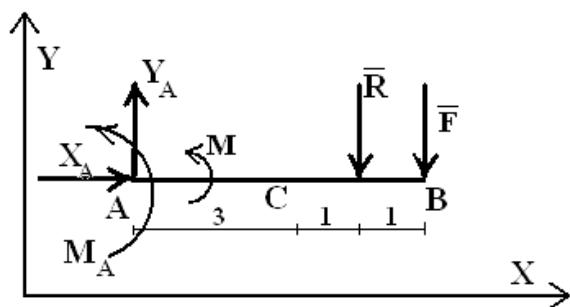


Рис. 2.13

3. Связью для балки является жесткая заделка, препятствующая перемещению балки в горизонтальном и в вертикальном направлениях, а также ее повороту вокруг точки А. Применив аксиому связей, отбросим жесткую заделку и заменим ее действие реакциями \bar{X}_A , \bar{Y}_A и реактивным моментом M_A (рис. 2.13). Распределенную нагрузку – равнодействующей, приложенной к середине отрезка СВ: $R = q \cdot BC = 6 \text{ кН}$.

4. Балка находится в равновесии под действием активных сил и реакций связей \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{R} , \bar{F} и двух пар сил с моментами M и M_A . Число неизвестных равно трем (\bar{X}_A , \bar{Y}_A , M_A), следовательно, задача статически определяемая.

5. Запишем уравнения равновесия в первой форме (1.5), при этом в качестве моментной используем точку А

$$\sum_{k=1}^2 F_{kX} = 0 \Rightarrow X_A = 0, \quad (2.11)$$

$$\sum_{k=1}^3 F_{kY} = 0 \Rightarrow Y_A - R - F = 0, \quad (2.12)$$

$$\sum_{k=1}^4 M_A(\bar{F}_k) = 0 \Rightarrow M_A + M - R \cdot 4 - F \cdot 5 = 0. \quad (2.13)$$

6. Из этих уравнений находим

$$X_A = 0 \text{ кН}, \quad Y_A = R + F = 6 + 10 = 16 \text{ кН},$$

$$M_A = -M + R \cdot 4 + F \cdot 5 = -16 + 6 \cdot 4 + 10 \cdot 5 = 58 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

7. Сделаем проверку полученных результатов и правильность составления уравнений. Для этого составим уравнение моментов относительно точки В.

$$\sum_{k=1}^4 M_B(\bar{F}_k) = 0 \Rightarrow M_A - Y_A \cdot 5 + M + R \cdot 1 = 0$$

или
$$58 - 16 \cdot 5 + 16 + 6 \cdot 1 = 0,$$

$$80 - 80 = 0.$$

Таким образом, реакции найдены правильно.

Ответ: $X_A = 0 \text{ кН}$, $Y_A = 16 \text{ кН}$, $M_A = 58 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

2.6.3. Задание № 2 в

Пример 1. Для составной балки АВ определить реакции опор и давление в промежуточном шарнире С, если на балку действуют силы $F = 10 \text{ кН}$ и $q = 4 \text{ кН/м}$. Необходимые размеры указаны на рисунке 2.14.

Дано: $F = 10 \text{ кН}$, $q = 4 \text{ кН/м}$.

Определить: реакции опор балки и давление в шарнире С.

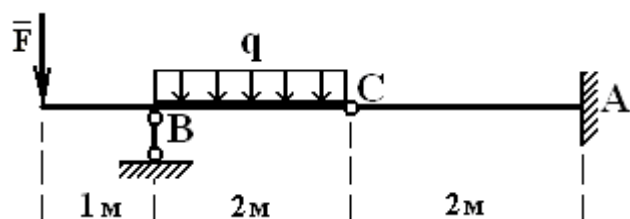


Рис. 2.14. Заданная балка

Решение. 1. Объектом равновесия является вся составная балка АВ, которая опирается на жесткую заделку в точке А и шарнирно-подвижную опору в точке В. Оси выбираем как в

предыдущих задачах (рис. 2.15).

2. – 3. На балку действуют распределенная нагрузка интенсивности q и сила F . Внешними связями являются жесткая заделка в точке А и подвижный шарнир в точке В, внутренней связью – соединительный шарнир С. Применяя аксиому «освобождаемости от связей», отбросим внешние связи и заменим реакциями

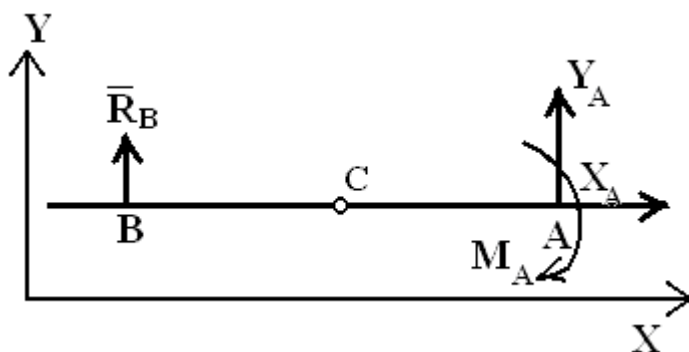


Рис. 2.15. Свободная балка с приложенными к ней реакциями связей

ми \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{M}_A и \bar{R}_B .

4. Можно составить лишь три независимых уравнения равновесия, так как к балке приложена плоская система сил, а число неизвестных реакций – четыре. Наличие соединительного шарнира С дает возможность расчленить балку на две части и рассматривать равновесие каждой части по отдельности, компенсируя их действие друг на друга реакциями \bar{X}_C и \bar{X}'_C , \bar{Y}_C и \bar{Y}'_C (рис. 2.16).

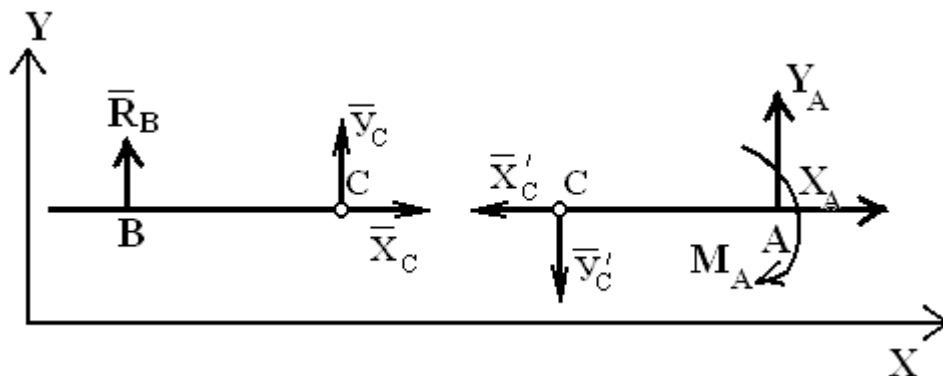


Рис. 2.16. Балка с приложенными к ней реакциями связей и давлением в промежуточном шарнире

Эти реакции приложены к разным частям конструкции и выражают действие одной части балки на другую. На основании принципа равенства действия и противодействия эти реакции равны по величине и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны, т.е. $\bar{X}'_C = -\bar{X}_C$ и $\bar{Y}'_C = -\bar{Y}_C$. Из рис. 2.16 видно, что в левой

части три неизвестных, она статически определима, поэтому с нее начинаем расчет.

5.1. Составляем уравнения равновесия для части BC (рис. 2.17), заменив распределенную нагрузку равнодействующей $R = q \cdot 2 = 8 \text{ кН}$ и приложив ее к середине участка BC:

$$\sum_{k=1}^1 F_{kX} = 0, \Rightarrow X_C = 0, \quad (2.14)$$

$$\sum_{k=1}^3 M_B(\bar{F}_k) = 0, \Rightarrow F \cdot 1 - R \cdot 1 + Y_C \cdot 2 = 0, \quad (2.15)$$

$$\sum_{k=1}^3 M_C(\bar{F}_k) = 0, \Rightarrow F \cdot 3 - R_B \cdot 2 + R \cdot 1 = 0. \quad (2.16)$$

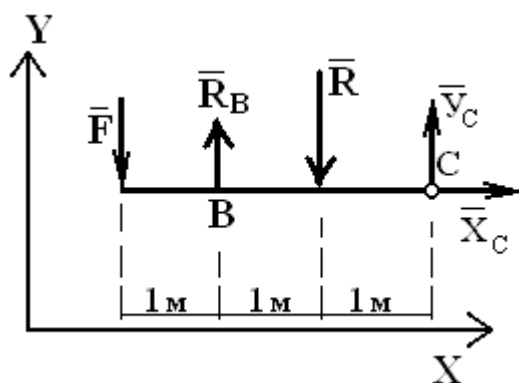


Рис. 2.17

6.1. Из (2.14) – (2.16) получаем:

$$X_C = 0,$$

$$Y_C = \frac{-F + R}{2} = \frac{-10 + 8}{2} = -1 \text{ кН},$$

$$R_B = \frac{F \cdot 3 + R}{2} = \frac{10 \cdot 3 + 8}{2} = 19 \text{ кН}.$$

5.2. В правой части балки АВ – пять неизвестных (рис. 2.18), но две из них уже найдены из левой части, т.к. $\bar{X}'_C = -\bar{X}_C$ и $\bar{Y}'_C = -\bar{Y}_C$. Составляем уравнения равновесия для части AC балки, ведь она также должна быть неподвижной,

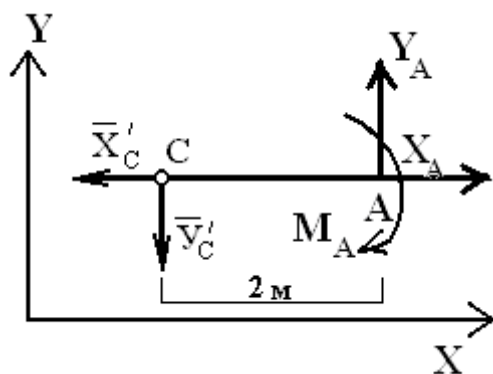


Рис. 2.18

$$\sum_{k=1}^2 F_{kX} = 0, \Rightarrow -X'_C + X_A = 0, \quad (2.17)$$

$$\sum_{k=1}^2 F_{kY} = 0, \Rightarrow -Y'_C + Y_A = 0, \quad (2.18)$$

$$\sum_{k=1}^2 M_A(\bar{F}_k) = 0, \Rightarrow Y'_C \cdot 2 - M_A = 0. \quad (2.19)$$

6.2. Решая уравнения, находим

$$X_A = X'_C = 0, \quad Y_A = Y'_C = -1 \text{ кН}, \quad M_A = Y'_C \cdot 2 = -1 \cdot 2 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

7. Проверку найденных реакций проведем из уравнения моментов, записав его для всей балки, в качестве моментной выберем точку С:

$$\sum_{k=1}^5 M_C(\bar{F}_k) = 0, \Rightarrow F \cdot 3 - R_B \cdot 2 + R \cdot 1 + Y_A \cdot 2 - M_A = 0,$$

$$10 \cdot 3 - 19 \cdot 2 + 8 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 2 = 0,$$

$$40 - 40 = 0.$$

Следовательно, реакции опор найдены верно.

Ответ: $X_A = 0 \text{ кН}$, $Y_A = -1 \text{ кН}$, $M_A = -2 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $R_B = 19 \text{ кН}$ и $X_C = 0 \text{ кН}$, $Y_C = -1 \text{ кН}$.

Пример 2. Для составной балки АД определить реакции опор и давление в промежуточном шарнире С, если на балку наложены следующие силы $F = 10 \text{ кН}$, $P = 4 \text{ кН}$, $q = 6 \text{ кН/м}$ и $M = 8.38 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Необходимые размеры указаны на рис. 2.19.

Дано: $F = 10 \text{ кН}$, $P = 4 \text{ кН}$, $q = 6 \text{ кН/м}$ и $M = 8.38 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Определить: реакции опор и давление в промежуточном шарнире.

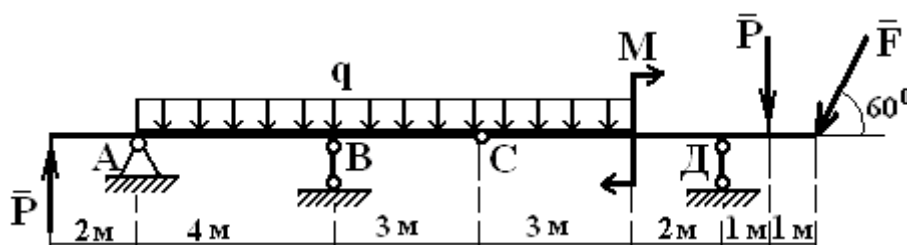


Рис. 2.19. Заданная балка

Решение. 1. Объектом равновесия является вся составная балка АД, которая опирается на шарнирно-неподвижную опору в точке А и шарнирно-подвижные опоры в точках В и Д.

2. К ней приложены распределенная нагрузка интенсивности q , силы P и F , и пара сил с моментом равным M .

3. Внешними связями здесь являются шарнирно-неподвижная опора в точке А и шарнирно-подвижные опоры в точках В и Д, а внутренней связью – соединительный шарнир С. Применяя аксиому «освобождаемости от связей», отбросим внешние связи и заменим их реакциями \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{R}_B и \bar{R}_D (рис. 2.20).

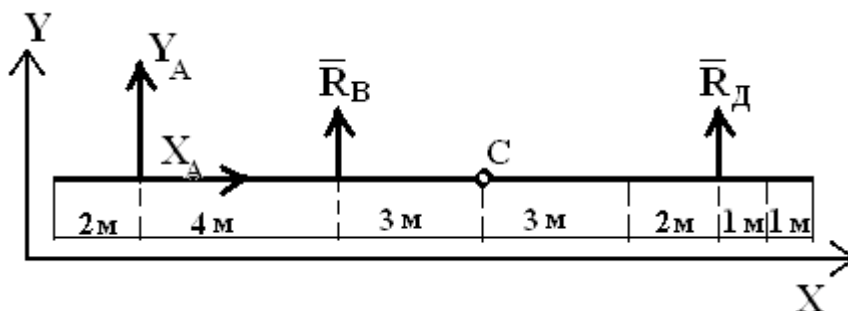


Рис. 2.20. Свободная балка с приложенными к ней реакциями связей

4. Число неизвестных реакций – четыре, но лишь три независимых уравнения равновесия можно составить, так как к балке приложена плоская система сил. Поэтому возникает необходимость расчленить балку на две части по соединительному шарниру С, аналогично предыдущей задаче. Далее будем рассматривать равновесие каждой части по отдельности, компенсируя их действие реакциями \bar{X}_C и \bar{X}'_C , \bar{Y}_C и \bar{Y}'_C (рис. 2.21). Эти реакции приложены к разным частям конструкции и показывают действие одной части балки на другую. На основании принципа равенства действия и противодействия эти реакции равны по величине и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны, т.е. $\bar{X}'_C = -\bar{X}_C$ и $\bar{Y}'_C = -\bar{Y}_C$.

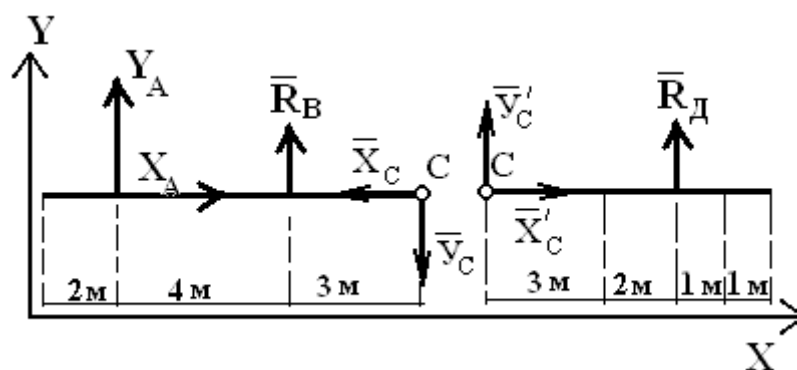


Рис. 2.21. Балка с приложенными к ней реакциями связей и давлением в промежуточном шарнире

5. Из рис. 2.21 видно, что в левой части конструкции пять неизвестных, а в правой только три. Расчет начинаем с правой части.

5.1. Вместо распределенной нагрузки на участке длиной 3 м изображаем равнодействующую $R_1 = q \cdot 3 = 18 \text{ кН}$, прикладывая ее к середине участка, т.е. на расстоянии 1.5 м от точки С.

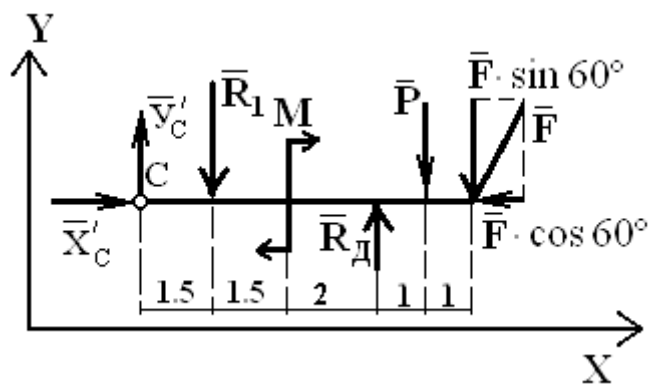


Рис. 2.22

Составляем уравнения равновесия для части СД (рис. 2.22). Записываем уравнение моментов для балки СД относительно моментной точки С

$$\sum_{k=1}^5 M_C(\bar{F}_k) = 0, \Rightarrow$$

$$-R_1 \cdot 1.5 - M + R_D \cdot 5 - P \cdot 6 - F \cdot \sin 60^\circ \cdot 7 = 0, \quad (2.20)$$

$$\sum_{k=1}^2 F_{kX} = 0, \Rightarrow X'_C - F \cdot \cos 60^\circ = 0, \quad (2.21)$$

$$\sum_{k=1}^5 F_{kY} = 0, \Rightarrow Y'_C - R_1 + Y_D - P - F \cdot \sin 60^\circ = 0. \quad (2.22)$$

6.1. Из уравнения (2.20) сразу находим реакцию опоры в точке Д

$$R_D = \frac{R_1 \cdot 1.5 + M + P \cdot 6 + F \cdot \sin 60^\circ \cdot 7}{5} = \frac{18 \cdot 1.5 + 8.38 + 4 \cdot 6 + 8.66 \cdot 7}{5} = \frac{27 + 8.38 + 24 + 60.62}{5} = 24 \text{ кН}.$$

А из уравнений (2.21) и (2.22) получаем $X'_C = F \cdot \cos 60^\circ = 5 \text{ кН}$ и $Y'_C = R_1 - R_D + P + F \cdot \sin 60^\circ = 18 - 24 + 4 + 8.66 = 6.66 \text{ кН}$.

5.2. Рассмотрим балку АС (рис. 2.23).

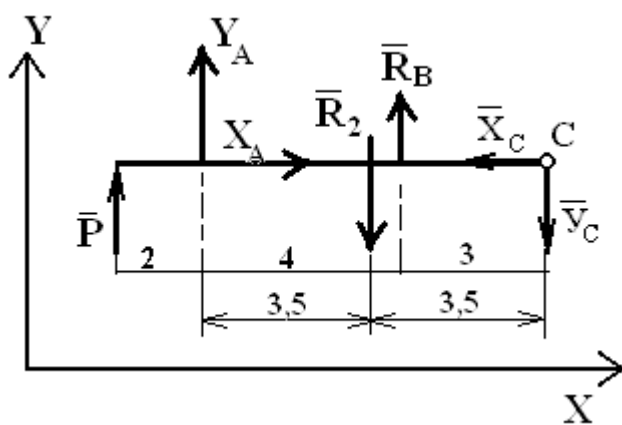


Рис. 2.23

Распределенную на участке 7 м нагрузку заменяем равнодействующей $R_2 = q \cdot 7 = 42 \text{ кН}$, прикладывая её на расстоянии 3.5 м от точки А. Запишем уравнения равновесия в виде (1.6):

$$\sum_{k=1}^2 F_{kX} = 0, \Rightarrow -X_C + X_A = 0, \quad (2.23)$$

$$\sum_{k=1}^4 M_A(\bar{F}_k) = 0, \Rightarrow -P \cdot 2 - R_2 \cdot 3.5 + R_B \cdot 4 - Y_C \cdot 7 = 0, \quad (2.24)$$

$$\sum_{k=1}^4 M_B(\bar{F}_k) = 0, \Rightarrow -Y_C \cdot 3 + R_2 \cdot 0.5 - Y_A \cdot 4 - P \cdot 6 = 0. \quad (2.25)$$

6.2. Решая эти уравнения, находим $X_A = 5 \text{ кН}$, $Y_A = -5.745 \text{ кН}$, $Y_B = 50.405 \text{ кН}$.

7. Проверку найденных реакций проведем из уравнения для левой части проекций на ось Y :

$$\sum_{k=1}^5 F_{kY} = 0, \Rightarrow P + Y_A - R_2 + R_B - Y_C = 0, \quad (2.26)$$

$$4 - 5.745 - 42 + 50.405 - 6.66 = 0,$$

$$54.405 - 54.405 = 0;$$

для всей конструкции – моментное уравнение относительно точки C :

$$\sum_{k=1}^9 M_C(\bar{F}_k) = 0, \Rightarrow \quad (2.27)$$

$$-P \cdot 9 - Y_A \cdot 7 + R_2 \cdot 3.5 - R_B \cdot 3 - R_1 \cdot 1.5 - M + R_D \cdot 5 - P \cdot 6 - F \cdot \sin 60^\circ \cdot 7 = 0,$$

$$-4 \cdot 9 + 5.745 \cdot 7 + 42 \cdot 3.5 - 50.405 \cdot 3 - 18 \cdot 1.5 - 8.38 + 24 \cdot 5 -$$

$$-4 \cdot 6 - 8.66 \cdot 7 = 0.$$

Реакции опор найдены верно.

Ответ: $X_A = 5 \text{ кН}$, $Y_A = -5.745 \text{ кН}$, $R_B = 50.405 \text{ кН}$, $R_D = 24 \text{ кН}$

и $X_C = 5 \text{ кН}$, $Y_C = 6,66 \text{ кН}$.

2.7. Методические указания к заданию № 2

1. Изобразить под балкой расчетную схему. Для этого заменяем распределенную нагрузку равнодействующей, силу, расположенную под углом к балке, раскладываем на две составляющие: горизонтальную и вертикальную. Опоры заменяем опорными реакциями.

2. По окончании решения задачи необходимо сделать проверку полученных результатов.

3. При расчете составной балки расчленяем её по врезному шарниру на два фрагмента, указывая давление промежуточного шарнира. Расчет начинаем с той части конструкции, где меньше неизвестных реакций опор.

2.8. Варианты задания № 2

а) Вычислить реакции опор горизонтальной балки, находящейся под действием заданных сил.

б) Однородная горизонтальная балка в сечении А жестко заделана в стене. На балку действует заданная система сил. Определить реакции опоры.

в) Определить реакции опор составной балки и давление в промежуточном шарнире С.

Выбор варианта

Выбор варианта производится аналогично заданию № 1, только исходные данные теперь студент выбирает из таблиц 2.2 и 2.3.

Исходные данные к заданиям

Таблица 2.2

Цифра шифра	Заданные размеры (в метрах)					
	a	b	c	l_1	l_2	l_3
1	2	4	1	8	6	3
2	4	6	2	6	4	2
3	3	5	1	10	8	4
4	2	8	3	12	3	5
5	4	5	2	6	2	3
6	1	3	1	8	4	1
7	2	6	3	14	5	4
8	2	5	3	10	6	2
9	1	4	2	9	6	4
10	2	3	2	6	8	2

Таблица 2.3

Цифра шифра	Нагрузки					
	F_1 (кН)	F_2 (кН)	q_1 (кН/м)	q_2 (кН/м)	M_1 (кН·м)	M_2 (кН·м)
1	10	8	12	6	12	10
2	6	10	18	4	16	8
3	14	12	14	8	10	20
4	12	18	10	2	14	16
5	7	5	12	10	10	24
6	16	6	16	16	12	18
7	8	8	24	12	14	12
8	10	4	20	3	16	26
9	4	10	8	14	20	22
10	14	8	6	18	8	6

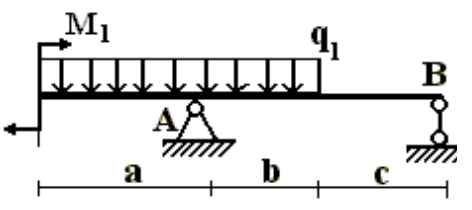
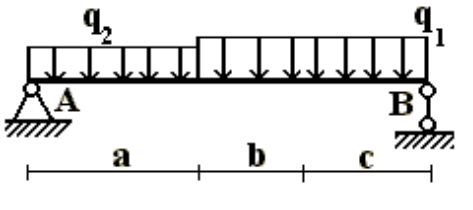

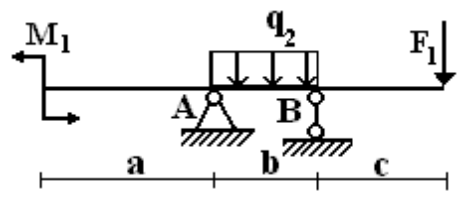
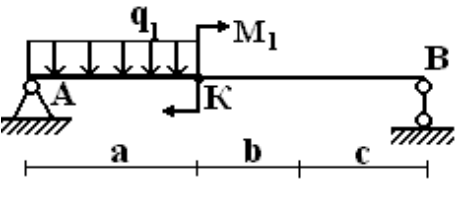
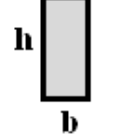
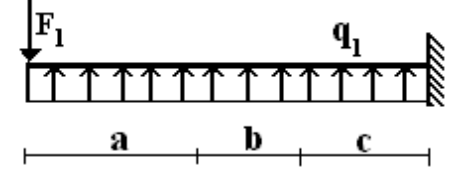
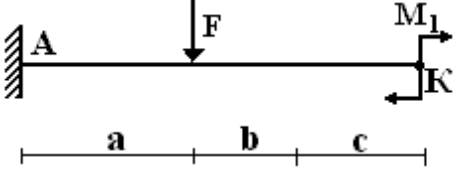
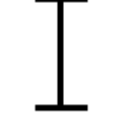
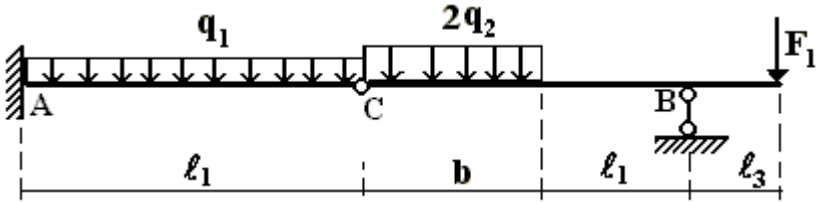
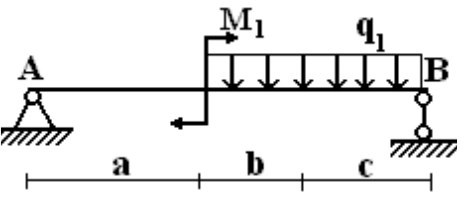
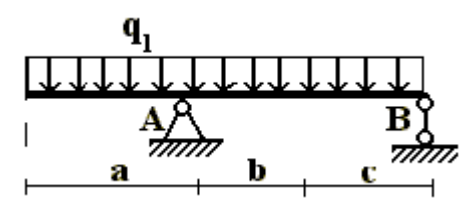
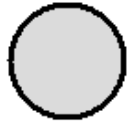
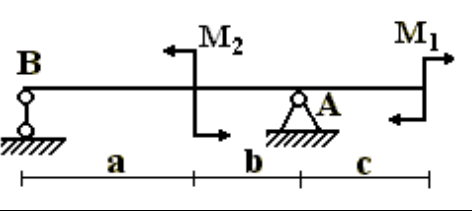
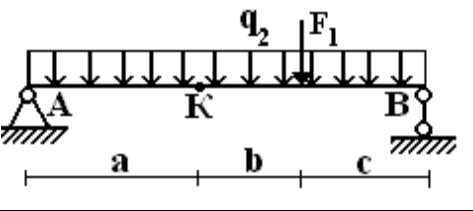
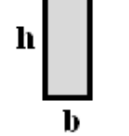
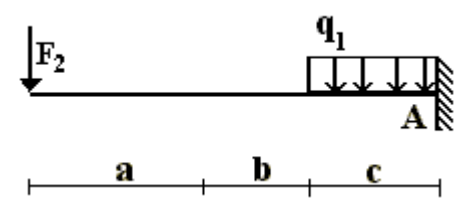
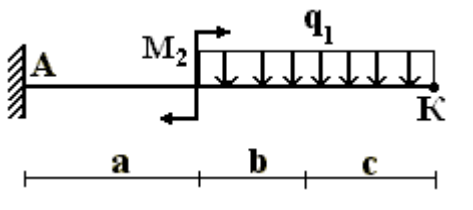
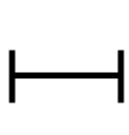
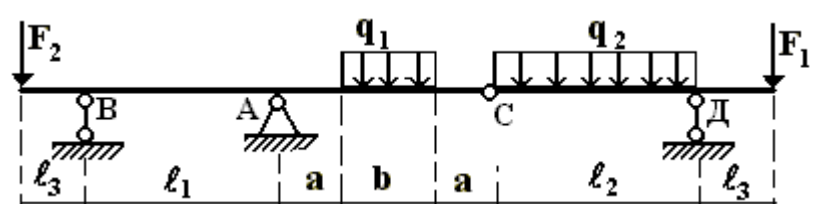
1 а)			
6)			
в)			

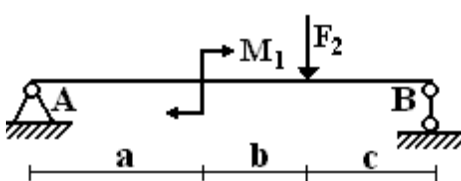
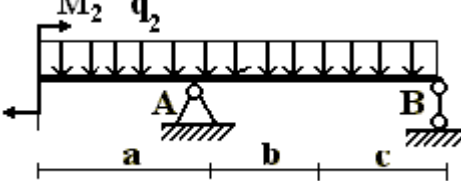

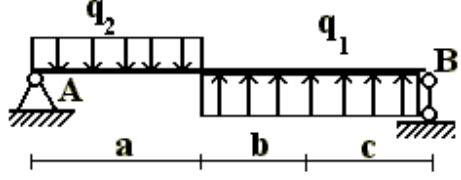
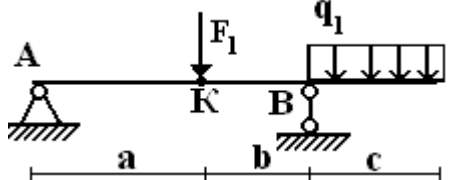
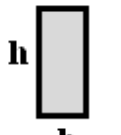
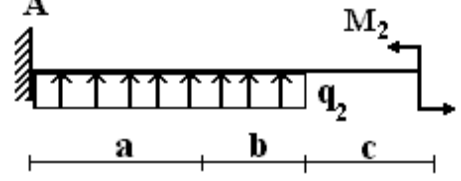
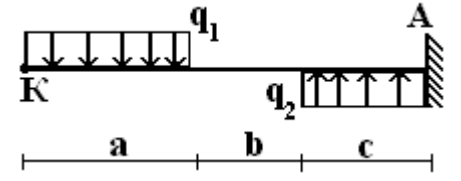
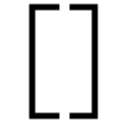
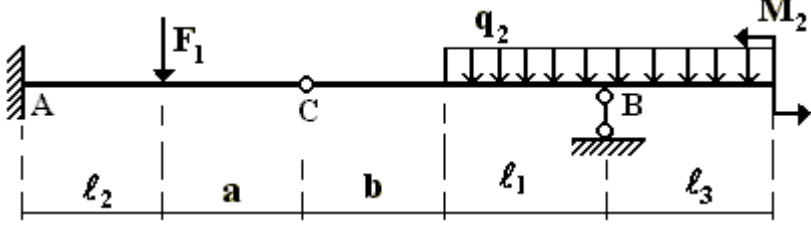
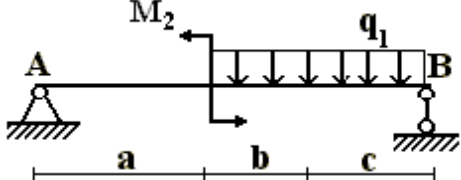
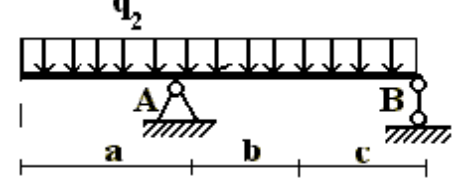

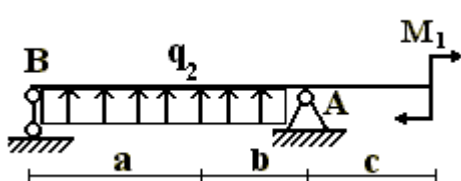
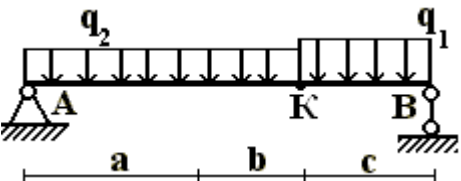
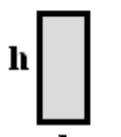
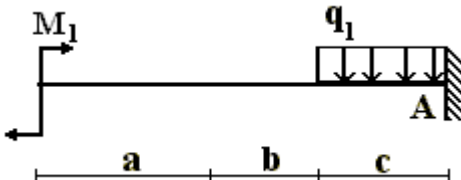
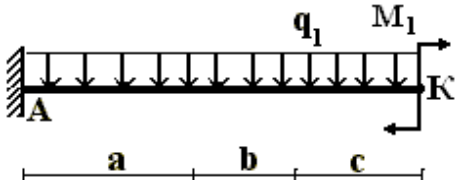

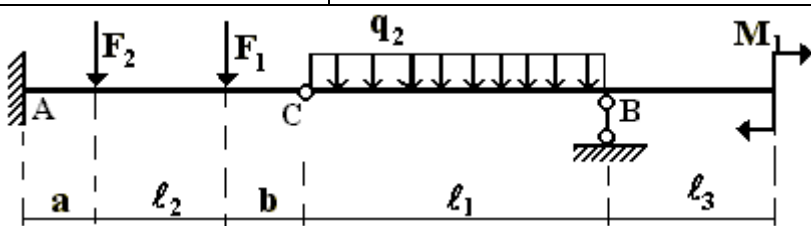
2 a)			
6)			
B)			

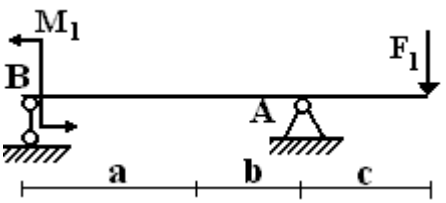
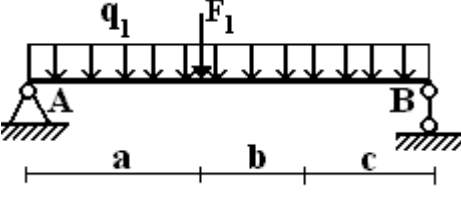

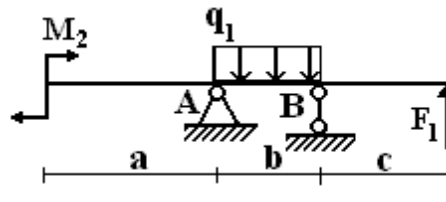
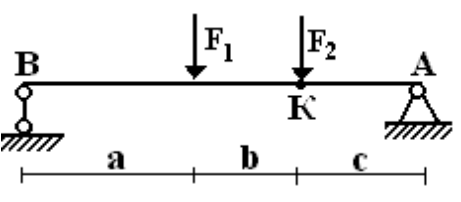
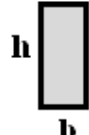
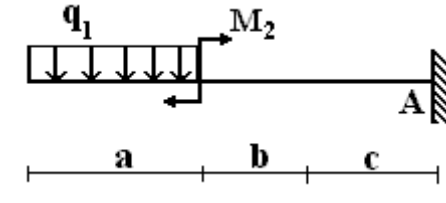
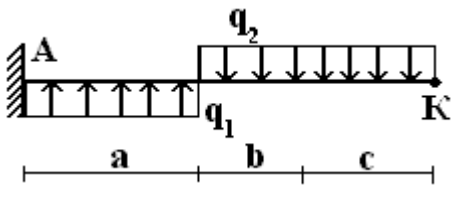
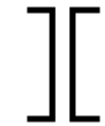
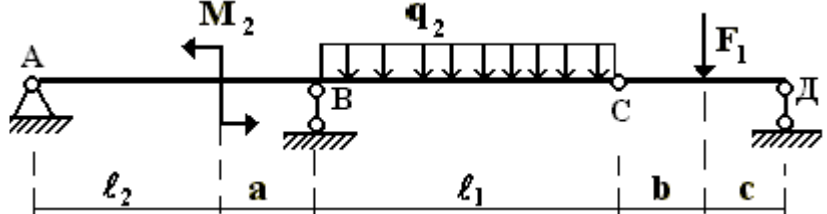
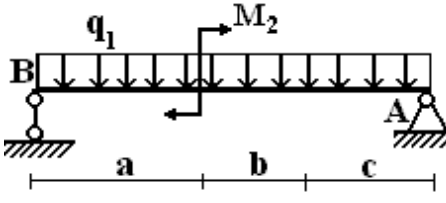
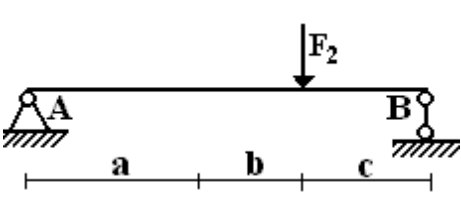

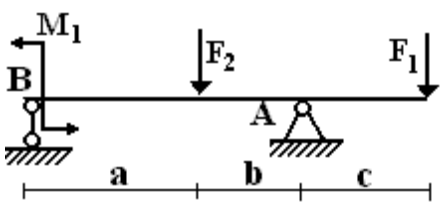
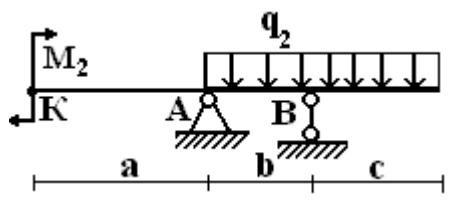
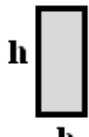
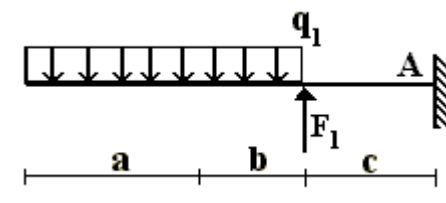
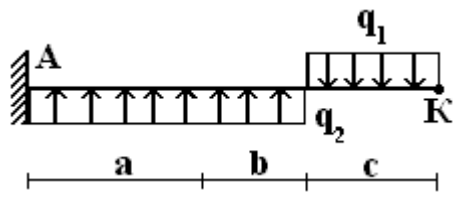
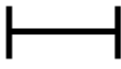
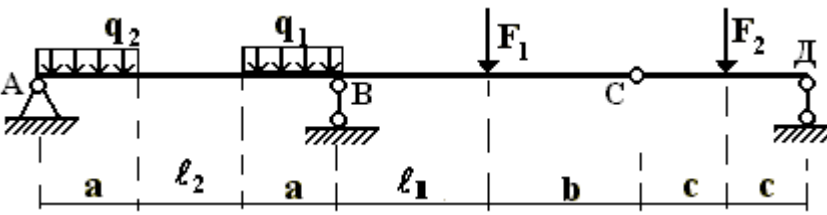
3 a)			
6)			
B)			

4 a)			
б)			
в)			

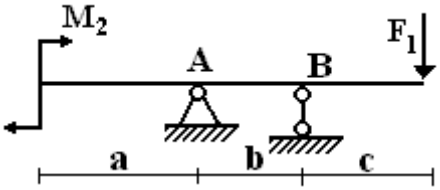
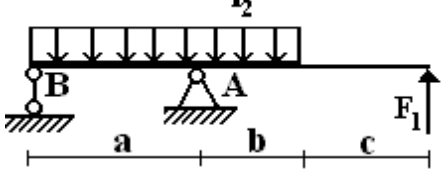
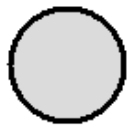
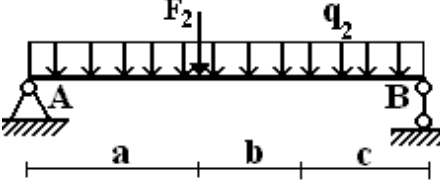
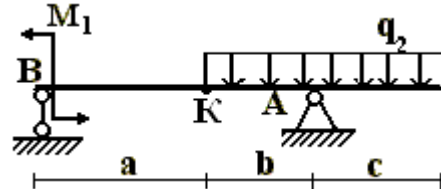

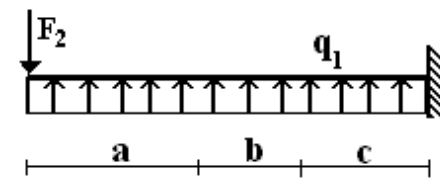
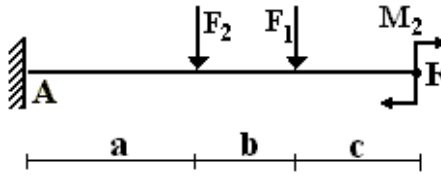
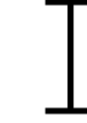
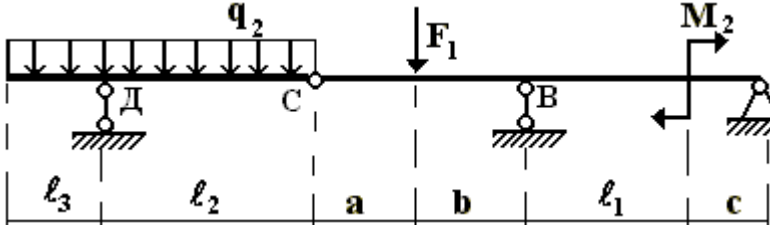
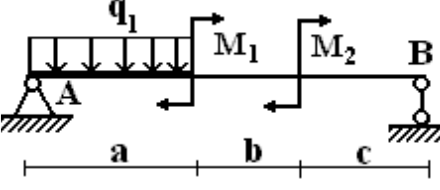
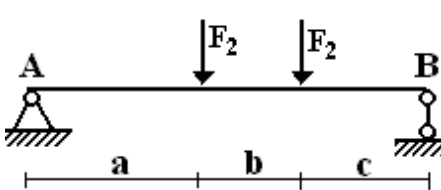
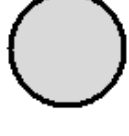
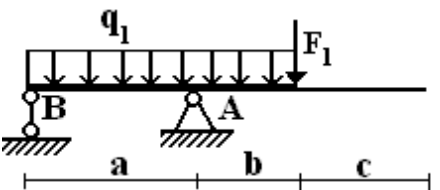
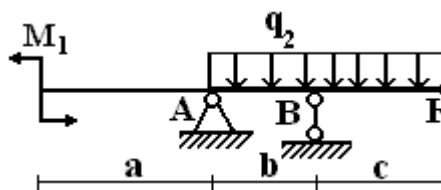

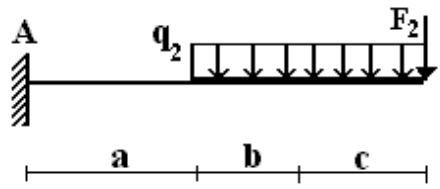
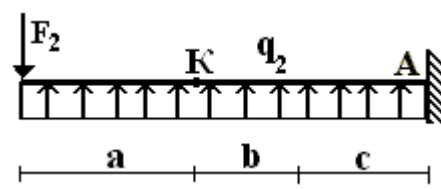

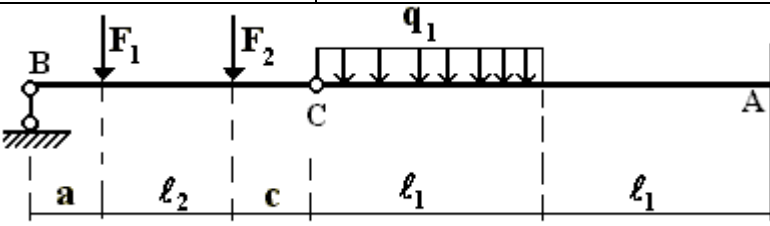
5 a)			
б)			
в)			

6 a)			
			 $h/b = 1.3$
6 б)			
6 в)			
7 a)			
			 $h/b = 1.4$
7 б)			
7 в)			

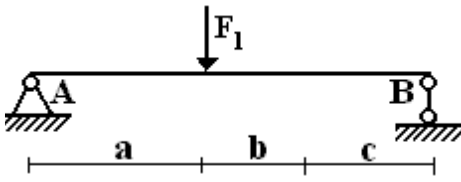
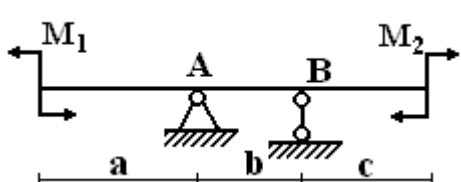

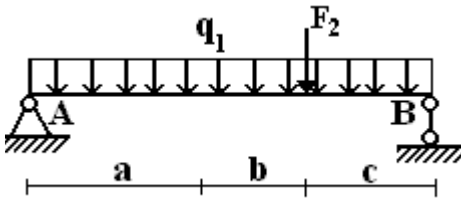
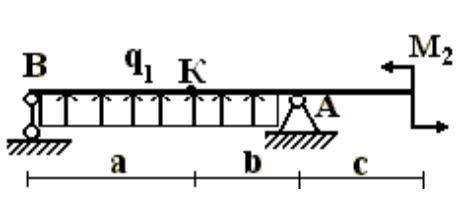
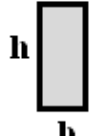
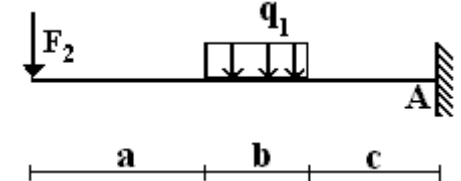
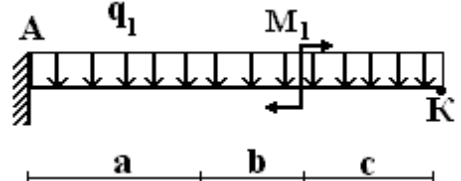
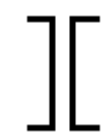
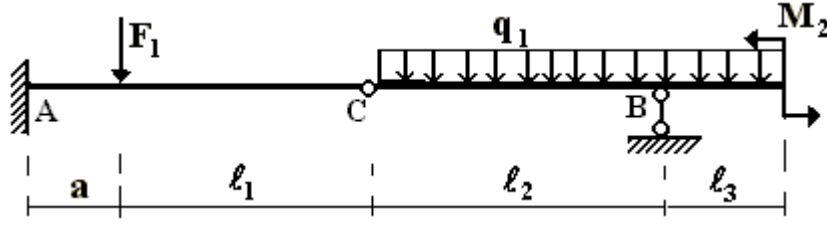
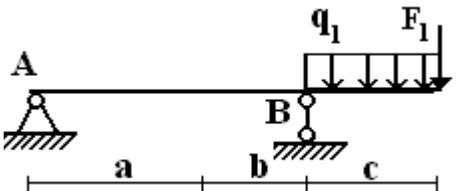
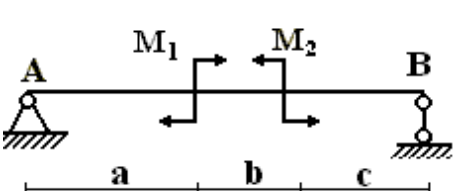

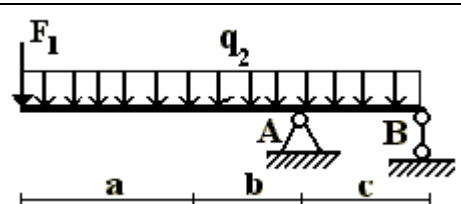
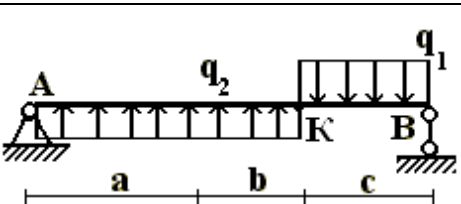
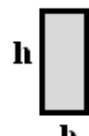
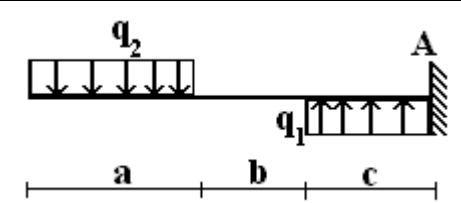
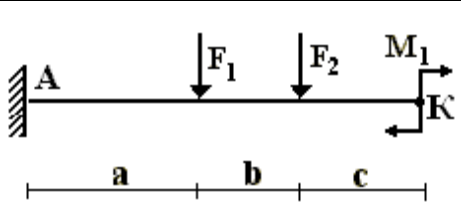

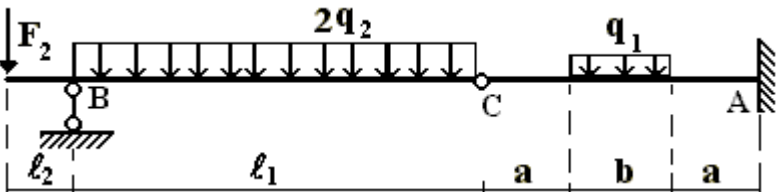
8 a)			
			 $h/b = 1.5$
б)			
в)			
9 a)			
			 $h/b = 1.6$
б)			
в)			

10 a)			
			 $h/b = 1.7$
б)			
в)			
11 a)			
			 $h/b = 1.8$
б)			
в)			

12 a)			
			<p>$h/b = 1.9$</p>
б)			
B)			
13 a)			
			<p>$h/b = 2$</p>
б)			
B)			

14 a)			
			 $h/b = 2.1$
b)			
			
15 a)			
			 $h/b = 2.2$
b)			
			

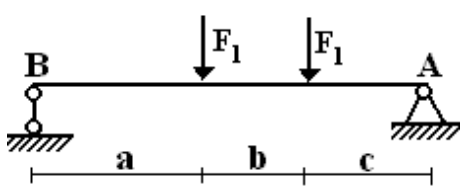
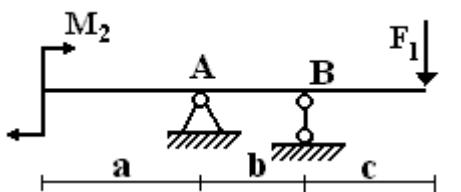
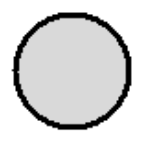
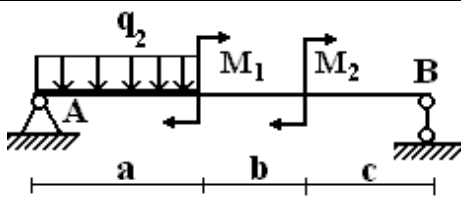
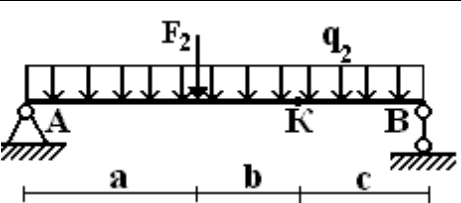
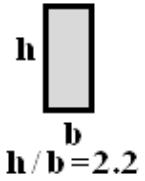
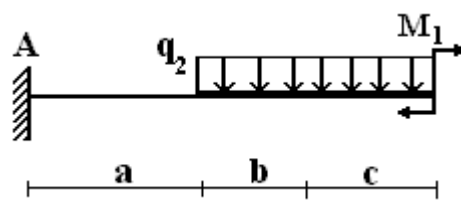
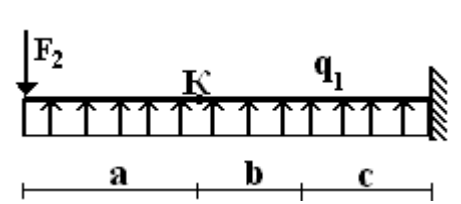

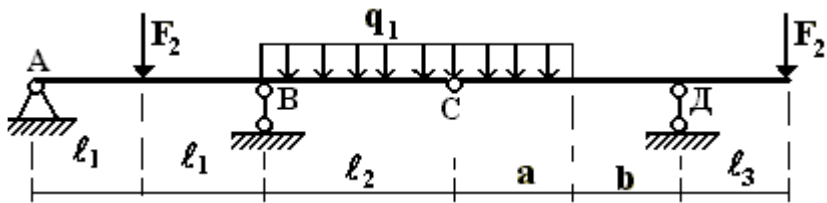
16 a)			
b)			
17 a)			
b)			

18 a)			
			 $h/b = 1.2$
б)			
в)			
19 a)			
			 $h/b = 1.4$
б)			
в)			

20 a)			
6)			
B)			
21 a)			
6)			
B)			

22 a)			
			<p>$h/b=1.5$</p>
б)			
в)			
23 a)			
			<p>$h/b=1.6$</p>
б)			
в)			

<p>24 a)</p>			
			<p>$h/b = 1.7$</p>
<p>б)</p>			
<p>в)</p>			
<p>25 a)</p>			
			<p>$h/b = 1$</p>
<p>б)</p>			
<p>в)</p>			

26 а)			
			 $h/b = 2.2$
б)			
в)			

2.9. Примеры решения задания № 3. Нахождение реакций опор стержневых конструкций

Пример 1. Определить реакции опор для рамы, изображенной на рисунке 2.24, если $F = 16 \text{ кН}$,

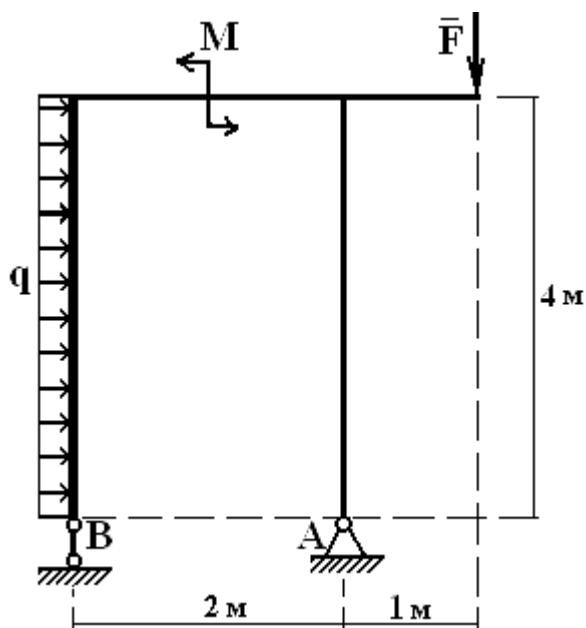


Рис. 2.24

и $q = 12 \text{ кН/м}$, $M = 24 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Дано: $F = 16 \text{ кН}$, $q = 12 \text{ кН/м}$
и $M = 24 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Определить: реакции опор.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие рамы (рис. 2.24).

2. На неё действуют распределенная нагрузка интенсивности q , сила F и пара сил с моментом равным M (рис. 2.25).

3. Наложены две связи: шар-

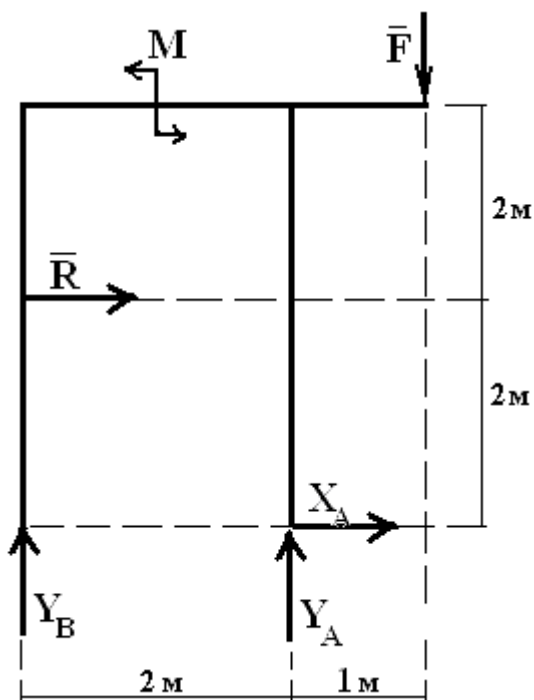


Рис. 2.25

нирно-неподвижная в точке А и шарнирно-подвижная в точке В. На основании аксиомы связей отбрасываем опоры и заменяем их реакциями связей. Распределенную нагрузку заменяем равнодействующей силой $R = q \cdot 4 = 48 \text{ кН}$ (рис. 2.25).

4. Так как рама находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил, и задача является статически определимой, то можно составить уравнения равновесия в форме (1.5).

$$5. \quad \sum_{k=1}^2 F_{kX} = 0, \Rightarrow R + X_A = 0, \quad (2.28)$$

$$\sum_{k=1}^3 F_{kY} = 0, \Rightarrow Y_B + Y_A - F = 0, \quad (2.29)$$

$$\sum_{k=1}^4 M_A(\bar{F}_k) = 0, \Rightarrow -Y_B \cdot 2 - R \cdot 2 + M - F \cdot 1 = 0. \quad (2.30)$$

6. Из уравнения (2.28) находим $X_A = -R = -48 \text{ кН}$, из (2.30) – $Y_B = \frac{-R \cdot 2 + M - F \cdot 1}{2} = -44 \text{ кН}$, а из (2.29) – $Y_A = F - Y_B = 60 \text{ кН}$.

7. Выполним проверку правильности составления уравнений равновесия. Для этого запишем сумму моментов всех сил относительно точки С

$$\sum_{k=1}^4 M_C(\bar{F}_k) = 0, \Rightarrow -Y_B \cdot 1 + R \cdot 2 + M + Y_A \cdot 1 + X_A \cdot 4 - F \cdot 2 = 0,$$

$$44 \cdot 1 + 48 \cdot 2 + 24 + 60 \cdot 1 - 48 \cdot 4 - 16 \cdot 2 = 0,$$

$$224 - 224 = 0.$$

Следовательно, уравнения составлены верно и реакции найдены правильно.

Знак минус у значений реакций опор показывает, что направления реакций противоположны первоначально выбранным направлениям.

Ответ: $X_A = -48 \text{ кН}$, $Y_A = 60 \text{ кН}$, $Y_B = -44 \text{ кН}$.

Пример 2. Для рамы, изображенной на рис. 2.26, определить реакции опоры, если $F = 16 \text{ кН}$, $q = 2 \text{ кН/м}$, $M = 24 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Дано: $F = 16 \text{ кН}$, $q = 2 \text{ кН/м}$ и $M = 24 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Определить: реакции опоры.

Решение. 1. Рассматриваемая рама жестко закреплена в точке А.

2. На неё действуют распределенная нагрузка интенсивности q , сила F и пара сил с моментом равным M (рис. 2.26).

3. Отбрасываем жесткую заделку и заменяем её действие реакция-

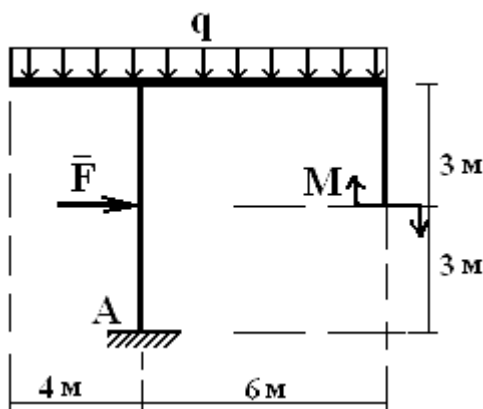
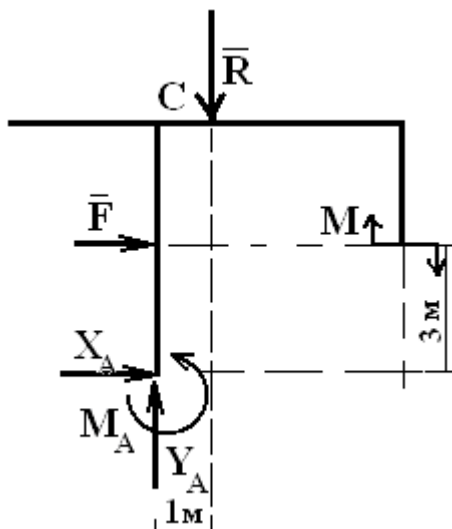


Рис. 2.26

а)



ми связей: \bar{X}_A , \bar{Y}_A , M_A (рис. 2.27).

Распределенную нагрузку можно заменить одной сосредоточенной силой $R = q \cdot 10 = 20 \text{ кН}$, приложенной к середине горизонтального стержня – ригеля (рис. 2.27, а), либо двумя равнодействующими: слева $R_1 = q \cdot 4 = 8 \text{ кН}$ и справа – $R_2 = q \cdot 6 = 12 \text{ кН}$, которые прикладываем к серединам соответствующих частей ригеля (рис. 2.27, б).

4. Задача является статически определимой, составляем уравнения равновесия в форме (1.5).

$$5. \sum_{k=1}^2 F_{kX} = 0, \Rightarrow F + X_A = 0, \quad (2.31)$$

$$\sum_{k=1}^3 F_{kY} = 0, \Rightarrow$$

$$а) -R + Y_A = 0 \text{ либо}$$

б)

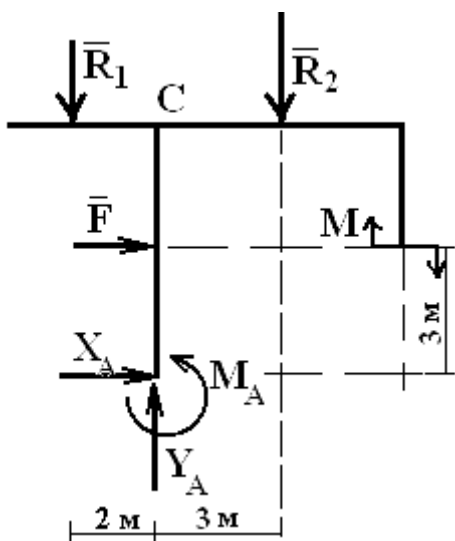


Рис. 2.27

$$\text{б) } -R_1 + Y_A - R_2 = 0, \quad (2.32)$$

$$\sum_{k=1}^4 M_A(\bar{F}_k) = 0, \Rightarrow$$

$$\text{а) } -R \cdot 1 - F \cdot 3 - M + M_A = 0 \text{ либо}$$

$$\text{б) } R_1 \cdot 2 - F \cdot 3 - R_2 \cdot 3 - M + M_A = 0. \quad (2.33)$$

6. Из уравнений (2.31) – (2.33) найдем:

$$X_A = -F = -16 \text{ кН},$$

$$Y_A = R = R_1 + R_2 = 20 \text{ кН},$$

$$M_A = R \cdot 1 + F \cdot 3 + M =$$

$$= -R_1 \cdot 2 + F \cdot 3 + R_2 \cdot 3 + M = 92 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

7. Выполним проверку правильности составления уравнений равновесия. Для этого вычислим сумму моментов всех сил относительно точки С

$$\sum_{k=1}^6 M_C(\bar{F}_k) = 0, \Rightarrow R_1 \cdot 2 + F \cdot 3 - R_2 \cdot 3 - M + M_A + X_A \cdot 6 = 0,$$

$$8 \cdot 2 + 16 \cdot 3 - 12 \cdot 3 - 24 + 92 + (-16) \cdot 6 = 0, \\ 0 \equiv 0.$$

Уравнения составлены верно и реакции найдены правильно.

Знак минус у X_A показывает, что направление реакции противоположно выбранному направлению.

Ответ: $X_A = -16 \text{ кН}$, $Y_A = 20 \text{ кН}$, $M_A = 92 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

2.10. Методические указания к заданию № 3

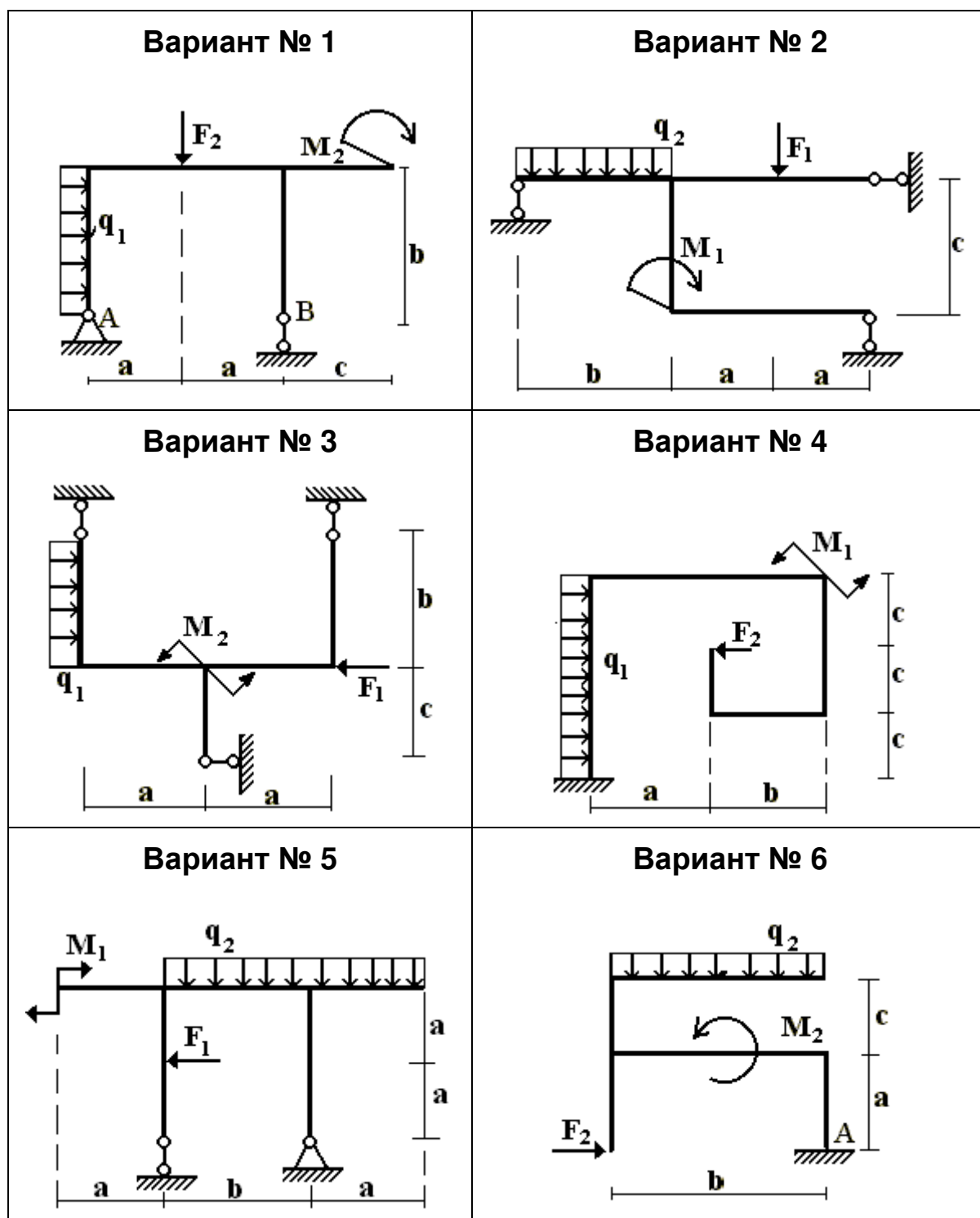
1. Изобразить под рамой расчетную схему, для чего заменяем распределенную нагрузку равнодействующей. Опоры заменяем опорными реакциями.
2. По окончании решения задачи необходимо сделать проверку полученных результатов.

2.11. Варианты задания № 3

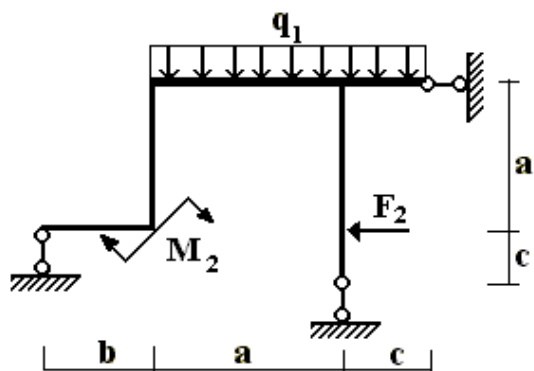
Определить реакции опор статически определимой рамы, взяв исходные данные к заданиям в таблицах 2.2 и 2.3.

Выбор варианта

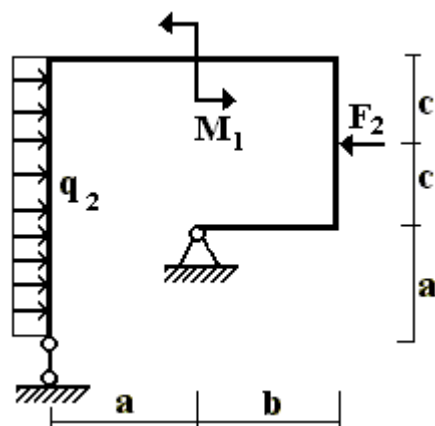
Выбор варианта производится аналогично заданию № 1.



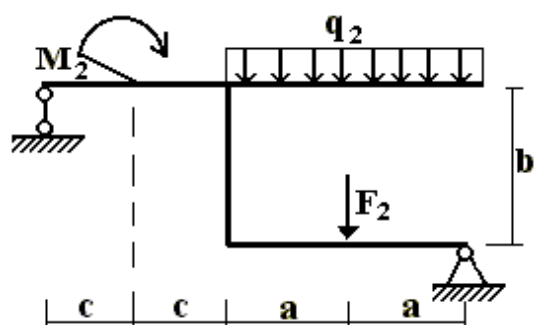
Вариант № 7



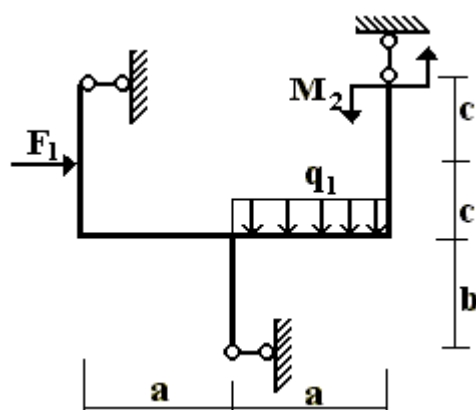
Вариант № 8



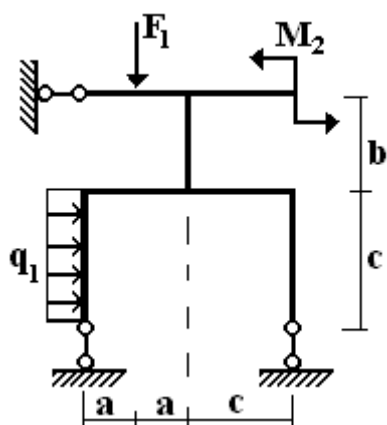
Вариант № 9



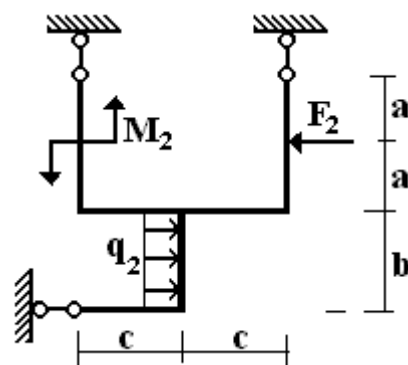
Вариант № 10



Вариант № 11

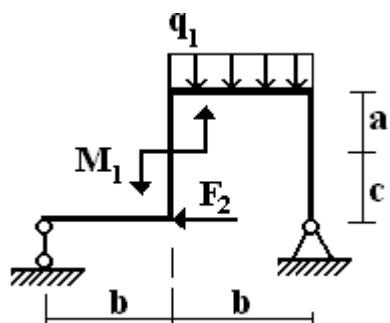


Вариант № 12

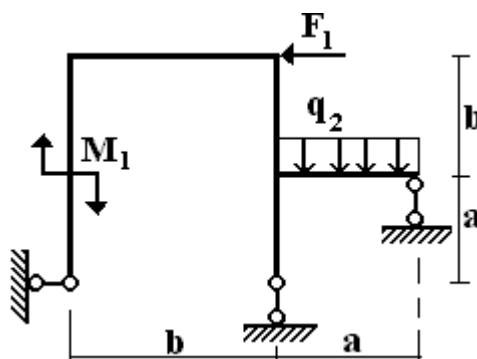


<p style="text-align: center;">Вариант № 13</p>	<p style="text-align: center;">Вариант № 14</p>
<p style="text-align: center;">Вариант № 15</p>	<p style="text-align: center;">Вариант № 16</p>
<p style="text-align: center;">Вариант № 17</p>	<p style="text-align: center;">Вариант № 18</p>
<p style="text-align: center;">Вариант № 19</p>	<p style="text-align: center;">Вариант № 20</p>

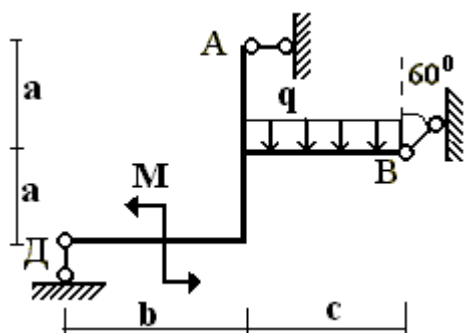
Вариант № 21



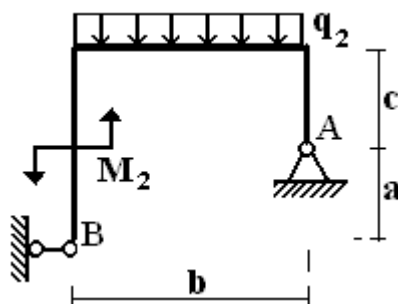
Вариант № 22



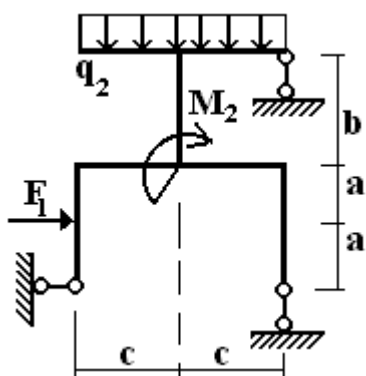
Вариант № 23



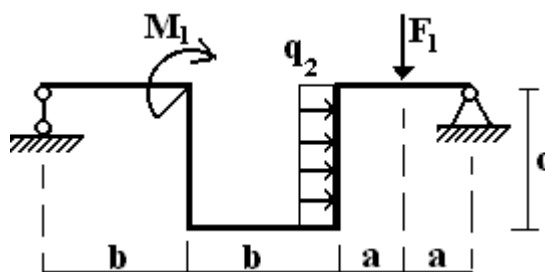
Вариант № 24



Вариант № 25



Вариант № 26



2.12. Пример решения задания № 4. Нахождение опорных реакций составной конструкции

Для составной конструкции определить реакции опор и давление в промежуточном шарнире С, считая что на неё действуют: $F = 10 \text{ кН}$, $q = 4 \text{ кН/м}$, $M = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (рис. 2.28).

Дано: $F = 10 \text{ кН}$, $q = 4 \text{ кН/м}$ и $M = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Определить: реакции опор и давление в шарнире С.

Решение. 1. Объектом равновесия является вся конструкция (рис. 2.28).

2. На раму действуют сила F , пара сил с моментом M и распределенная нагрузка интенсивности q , которую заменяем равнодействующей $R = q \cdot 2 = 8 \text{ кН}$ (рис. 2.29). Для упрощения расчетов разложим сосредоточенную силу F на горизонтальную и вертикальную составляющие: F_X , F_Y (рис. 2.30).

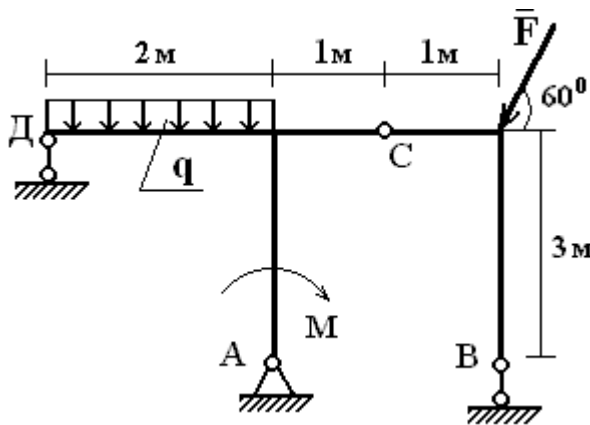


Рис. 2.28

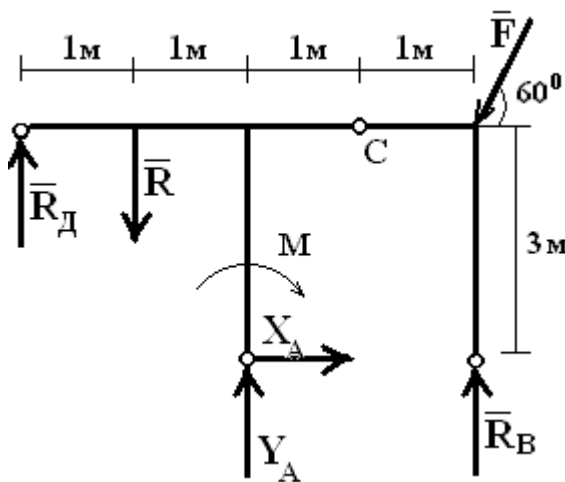


Рис. 2.29

3. Внешними связями являются шарнирно-неподвижная опора в точке А и шарнирно-подвижные опоры в точках В и Д. Внутренней связью, соединяющей две части конструкции, является соединительный шарнир С. Применяя аксиому «освобождаемости от связей», отбросим внешние связи и заменим их реакциями (рис. 2.29).

4. Для плоской системы сил, приложенной к конструкции, можно составить лишь три независимых уравнения равнове-

сия, а число неизвестных реакций – четыре: $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_D$. Определить их однозначно из трех уравнений невозможно. Поэтому

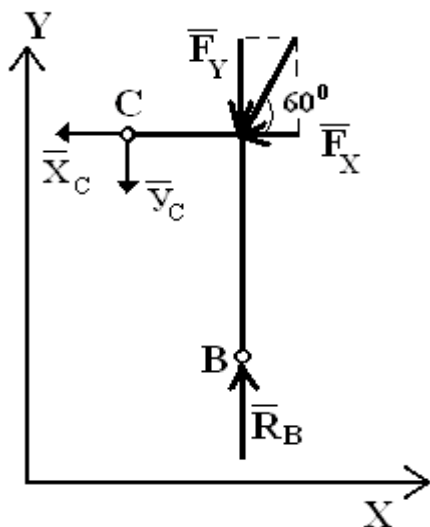


Рис. 2.30

расчленим конструкцию по внутренней связи (шарниру С) и рассмотрим равновесие каждой части по отдельности (рис. 2.30 и рис. 2.31).

По аксиоме отвердевания взаимодействие частей конструкции друг с другом заменяем реакциями \bar{X}_C и \bar{Y}_C , которые должны удовлетворять равенствам $\bar{X}'_C = -\bar{X}_C$ и $\bar{Y}'_C = -\bar{Y}_C$ (см. пример задания 2 в).

5.1. Начинаем расчет с правой части конструкции (CB), т.к. неизвестных реакций для нее только три. Составим уравнения равновесия, используя вторую форму представления (1.6), где в качестве моментных выбираем точки В и С (рис. 2.30)

$$\sum_{k=1}^2 F_{kX} = 0, \Rightarrow -X_C - F \cdot \cos 60^\circ = 0, \quad (2.34)$$

$$\sum_{k=1}^3 M_B(\bar{F}_k) = 0, \Rightarrow X_C \cdot 3 + Y_C \cdot 1 + F \cdot \cos 60^\circ \cdot 3 = 0, \quad (2.35)$$

$$\sum_{k=1}^2 M_C(\bar{F}_k) = 0, \Rightarrow R_B \cdot 1 - F \cdot \sin 60^\circ \cdot 1 = 0. \quad (2.36)$$

6.1. Из этих уравнений определяем

$$X_C = -F \cdot \cos 60^\circ = -10 \cdot 0.5 = -5 \text{ кН},$$

$$Y_C = -\frac{X_C \cdot 3 + F \cdot \cos 60^\circ \cdot 3}{1} = 5 \cdot 3 - 10 \cdot 0.5 \cdot 3 = 0 \text{ кН},$$

$$R_B = \frac{F \cdot \sin 60^\circ \cdot 1}{1} = 10 \cdot 0.866 = 8.66 \text{ кН}.$$

5.2. Теперь рассмотрим левую часть конструкции (ADC), для нее удобнее использовать первую форму записи уравнений равновесия

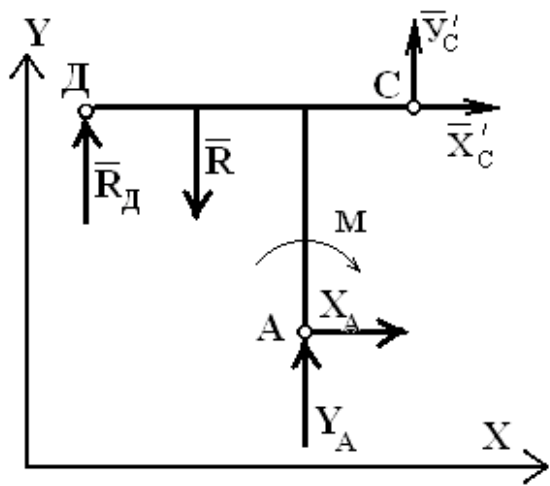


Рис. 2.31

(1.5) (рис. 2.31), где в качестве моментной берем точку А.

$$\sum_{k=1}^2 F_{kX} = 0, \Rightarrow X_A + X'_C = 0, \quad (2.37)$$

$$\sum_{k=1}^4 F_{kY} = 0, \Rightarrow R_D - R + Y_A + Y'_C = 0, \quad (2.38)$$

$$\sum_{k=1}^5 M_A(\bar{F}_k) = 0, \Rightarrow$$

$$-R_D \cdot 2 + R \cdot 1 - M + Y'_C \cdot 1 - X'_C \cdot 3 = 0. \quad (2.39)$$

6.2. Решаем их, используя равенства $X'_C = X_C = -5 \text{ кН}$ и $Y'_C = Y_C = 0 \text{ кН}$, находим из (2.37) $X_A = -X'_C = 5 \text{ кН}$, из (2.39)

$$R_D = \frac{R \cdot 1 - M + Y'_C \cdot 1 - X'_C \cdot 3}{2} = \frac{8 \cdot 1 - 12 + 0 + 5 \cdot 3}{2} = 5.5 \text{ кН}, \text{ из (2.38)}$$

$$Y_A = -R_D + R - Y'_C = -5.5 + 8 - 0 = 2.5 \text{ кН}.$$

7. Сделаем проверку найденных реакций, рассматривая конструкцию как целую. Составим уравнение моментов относительно точки С (рис. 2.29).

$$\sum_{k=1}^7 M_C(\bar{F}_k) = 0, \Rightarrow$$

$$R_B \cdot 1 - F \cdot \sin 60^\circ \cdot 1 + X_A \cdot 3 - Y_A \cdot 1 - M + R \cdot 2 - R_D \cdot 3 = 0, \quad (2.40)$$

$$8.66 \cdot 1 - 10 \cdot 0.866 \cdot 1 + 5 \cdot 3 - 2.5 \cdot 1 - 12 + 8 \cdot 2 - 5.5 \cdot 3 = 0, \\ 0 = 0.$$

Следовательно, верно определены реакции опор.

Ответ: $X_A = 5 \text{ кН}$, $Y_A = 2.5 \text{ кН}$, $R_B = 8.66 \text{ кН}$,
 $R_D = 5.5 \text{ кН}$, $X_C = -5 \text{ кН}$, $Y_C = 0 \text{ кН}$.

2.13. Методические указания к заданию № 4

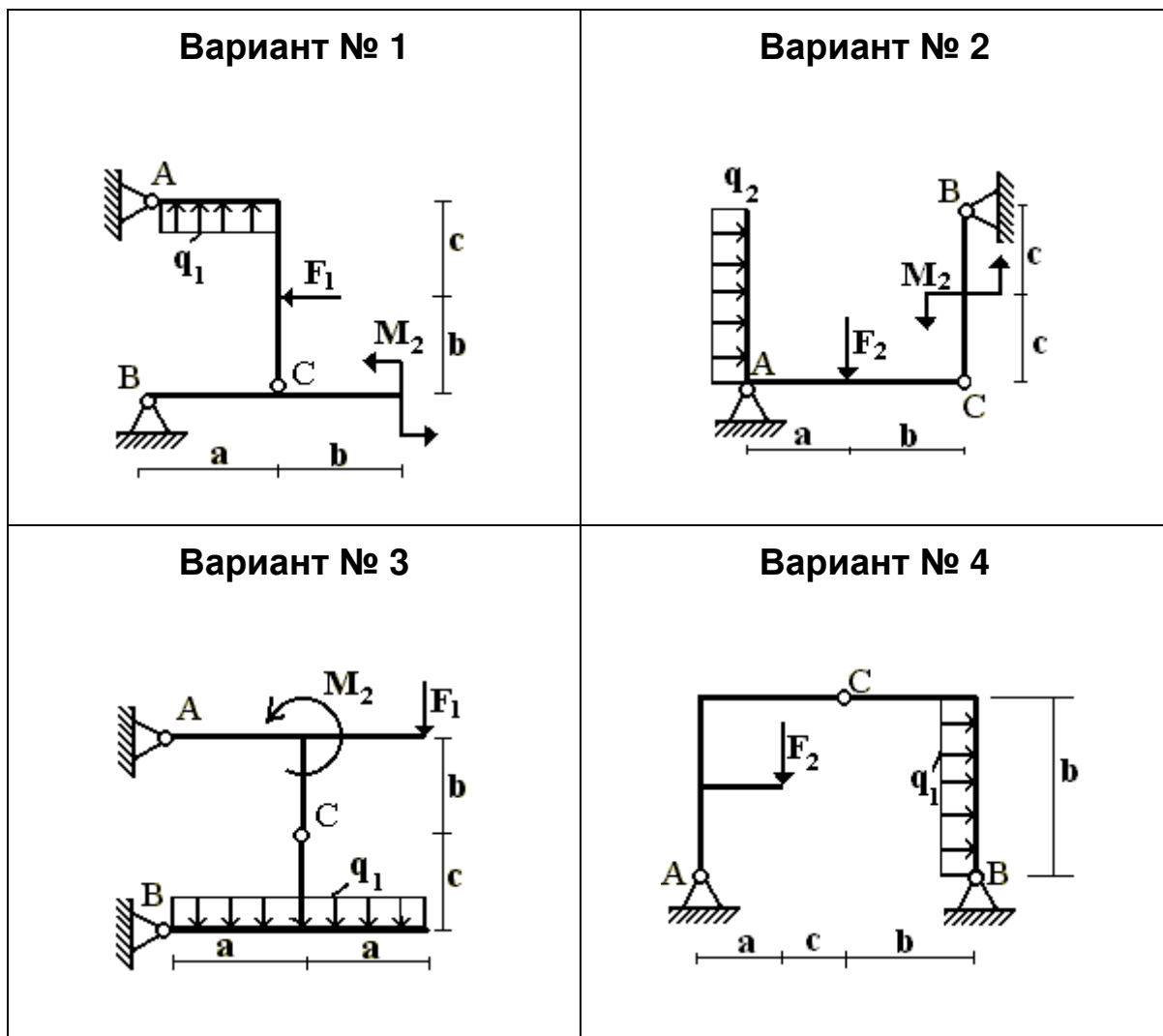
1. Обязательно изображать под рамой расчетную схему. Для этого заменяем распределенную нагрузку равнодействующей, опоры – их реакциями.
2. По окончании решения задачи необходимо сделать проверку полученных результатов.

2.14. Варианты задания № 4

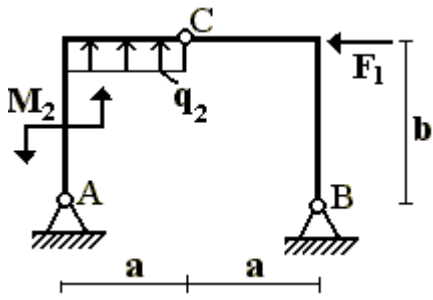
Вычислить реакции внешних связей составной рамы и давление в промежуточном шарнире С, взяв исходные данные к заданиям в таблицах 2.2 и 2.3.

Выбор варианта

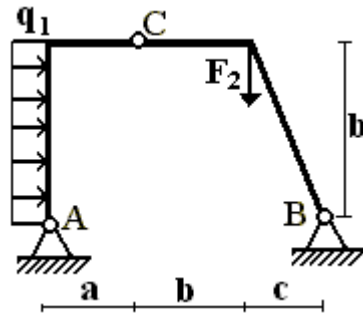
Выбор варианта производится аналогично заданию № 1.



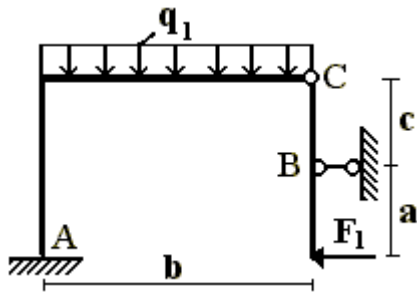
Вариант № 5



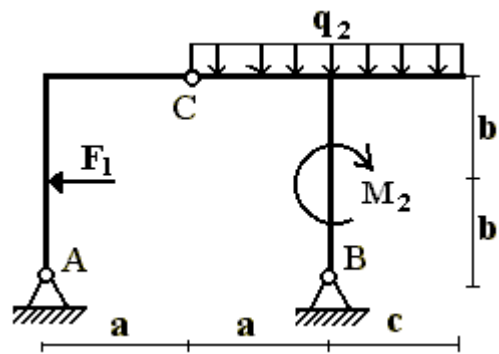
Вариант № 6



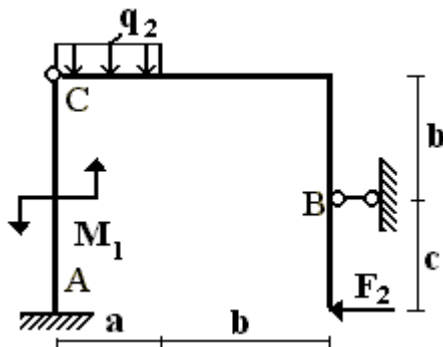
Вариант № 7



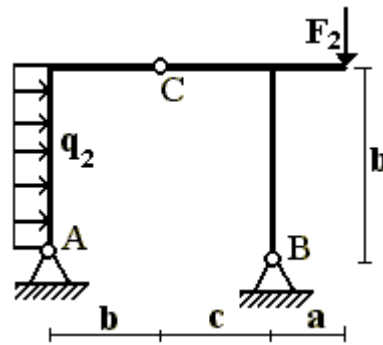
Вариант № 8



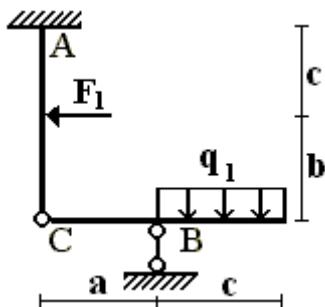
Вариант № 9



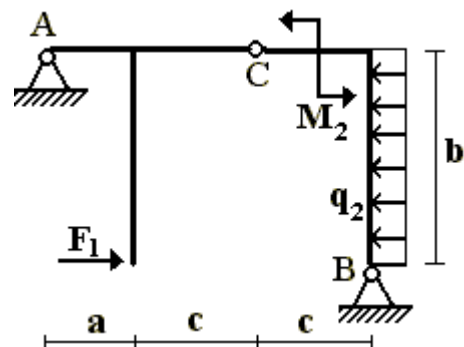
Вариант № 10



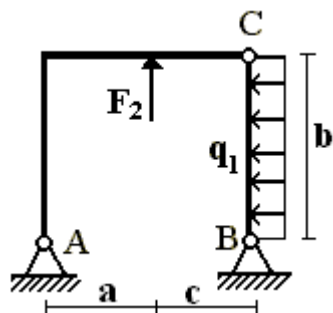
Вариант № 11



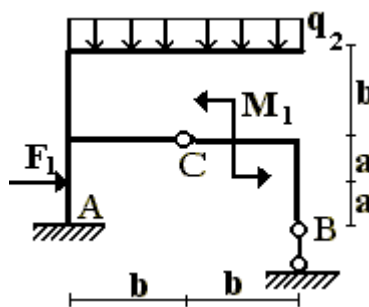
Вариант № 12



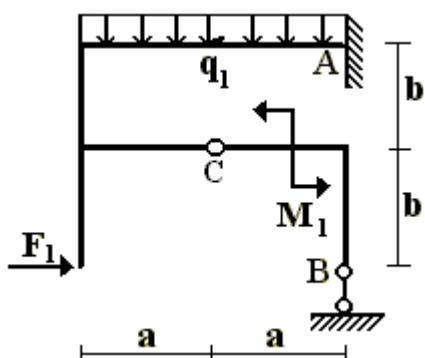
Вариант № 13



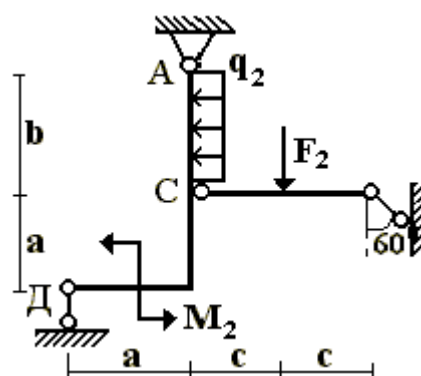
Вариант № 14



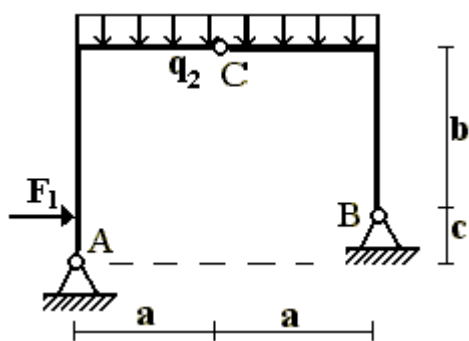
Вариант № 15



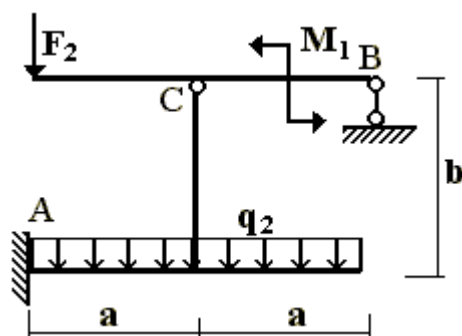
Вариант № 16



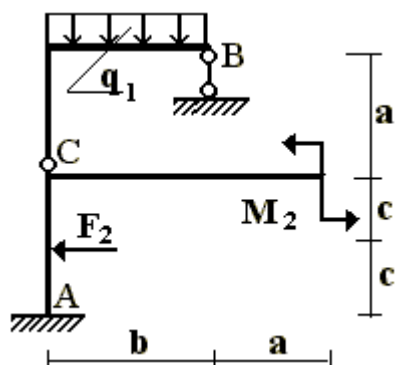
Вариант № 17



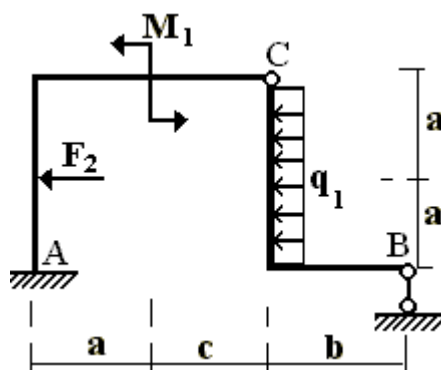
Вариант № 18



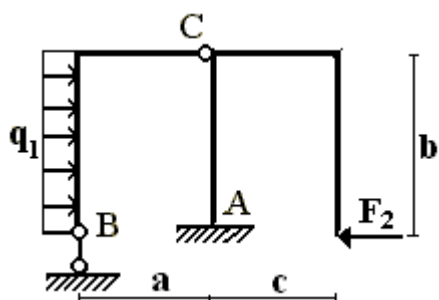
Вариант № 19



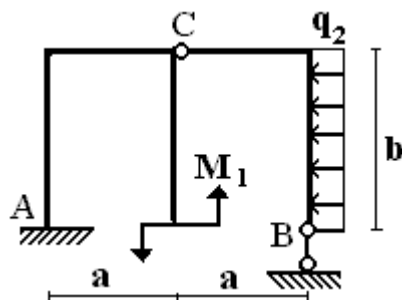
Вариант № 20



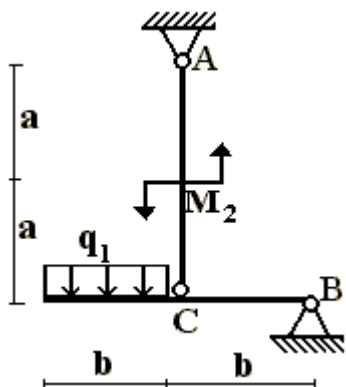
Вариант № 21



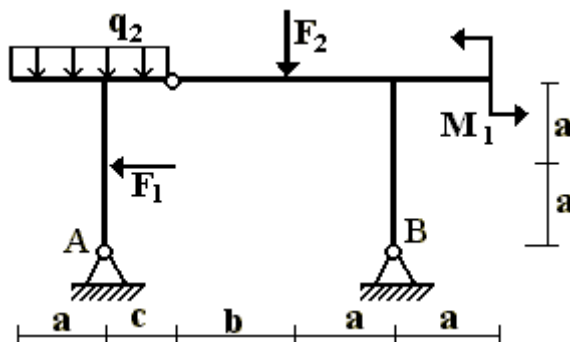
Вариант № 22



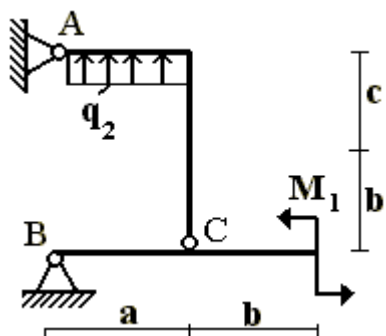
Вариант № 23



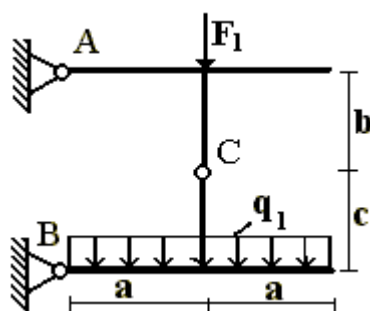
Вариант № 24



Вариант № 25



Вариант № 26



2.15. Примеры решения задания № 5.
Определение центра тяжести тела
или системы тел

Пример 1. Определить координаты центра тяжести однородной пластины, имеющей размеры, указанные на рисунке 2.32.

Дано: зигзагообразная пластина размерами 10×10 см и толщиной 2 см.

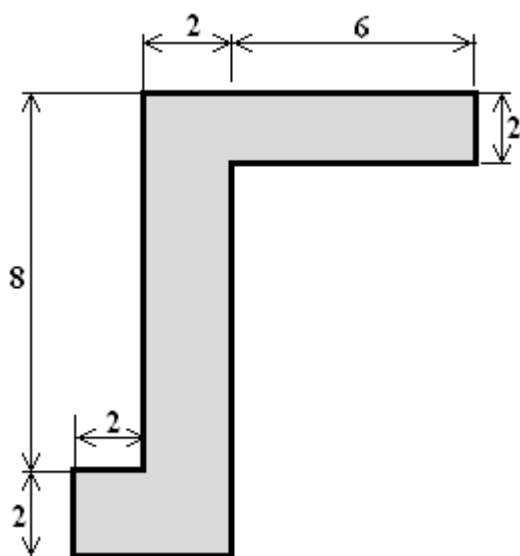


Рис. 2.32

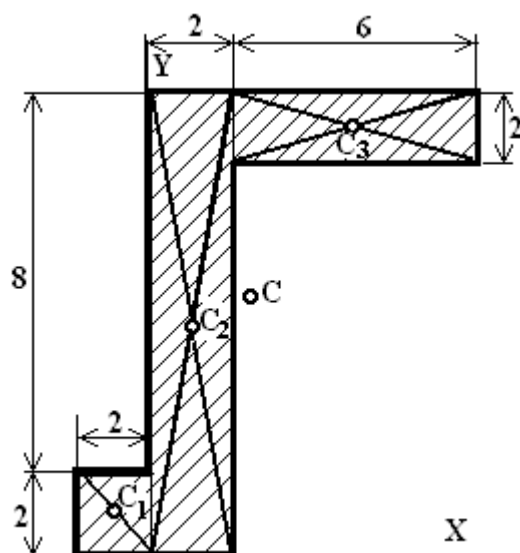


Рис. 2.33

Определить: x_C , y_C .

Решение. 1. Разбиваем пластину на три прямоугольника.

2. Укажем на рис. 2.33 центры тяжести каждого прямоугольника (на пересечении его диагоналей). Вычислим их площади:

$$A_1 = 2 \times 2 = 4 \text{ см}^2,$$

$$A_2 = 2 \times 10 = 20 \text{ см}^2,$$

$$A_3 = 6 \times 2 = 12 \text{ см}^2.$$

3. Проводим ось X вдоль нижнего края пластины, ось Y – вдоль длинной стороны левого края. Запишем координаты центров масс прямоугольников в виде таблицы:

№	1	2	3
x_k	-1	1	5
y_k	1	5	9
A_k	4	20	12

4. Определим координаты центра тяжести всего сечения. Площадь всей пластины $A = A_1 + A_2 + A_3 = 36 \text{ см}^2$. Подставляя в формулы (1.11) вычисленные величины, получаем:

$$x_C = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A} = \frac{4 \cdot (-1) + 20 \cdot 1 + 12 \cdot 5}{36} = 2\frac{1}{9} \text{ см},$$

$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A} = \frac{4 \cdot 1 + 20 \cdot 5 + 12 \cdot 9}{36} = 5\frac{8}{9} \text{ см}.$$

5. Укажем центр тяжести сечения на рис. 2.33 и обозначим его буквой C . Точка оказалась вне пластины.

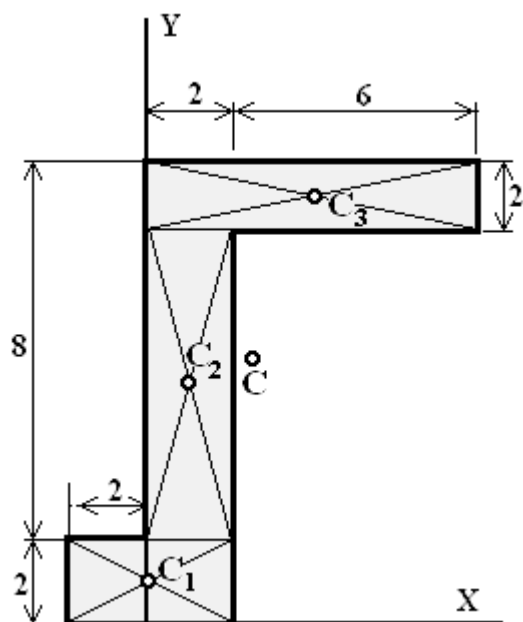


Рис. 2.34

6. Выполним проверку. Убедимся, что центр масс не меняет своего положения при другом способе разбиения (рис. 2.34), разделив фигуру на другие части, площади которых $A_1 = 4 \times 2 = 8 \text{ см}^2$, $A_2 = 2 \times 6 = 12 \text{ см}^2$, $A_3 = 8 \times 2 = 16 \text{ см}^2$. Координаты их центров масс: у первого прямоугольника (0; 1), у второго – (1; 5), у третьего – (4; 9). Формулы для определения координат центра масс фигуры не изменяются:

$$x_C = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A} = \frac{8 \cdot 0 + 12 \cdot 1 + 16 \cdot 4}{36} = 2\frac{1}{9} \text{ см},$$

$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A} = \frac{8 \cdot 1 + 12 \cdot 5 + 16 \cdot 9}{36} = 5\frac{8}{9} \text{ см}.$$

Получили те же самые координаты.

Ответ: $x_C = 2\frac{1}{9} \text{ см}$, $y_C = 5\frac{8}{9} \text{ см}$.

Пример 2. Определить положение центра тяжести круглой пластины радиуса R с вырезом радиуса r . Расстояние $C_1 C_2 = a$ (рис.2.35).

Дано: R, r, a .

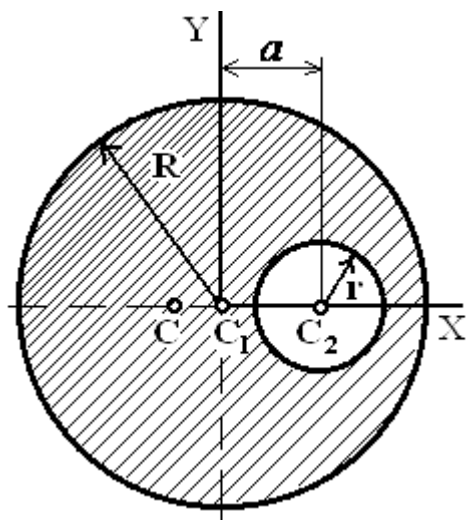


Рис. 2.35

Определить: x_C, y_C .

Решение. 1. Разбиваем пластину на два круга: полного круга радиуса R и вырезанного – радиуса r .

2. На рисунке 2.35 указаны центры тяжести каждого круга C_1 и C_2 , т.к. центр круга является его центром масс. Вычислим площади кругов:

$$A_1 = \pi \times R^2, \quad A_2 = \pi \times r^2.$$

3. Проводим ось X вдоль линии C_1C_2 , которая является осью симметрии пластины, а ось Y через центр первого круга, точку C_1 , перпендикулярно оси X . Тогда координаты центра масс первого круга $(0; 0)$, второго – $(a; 0)$.

4. Определим координаты центра тяжести всей фигуры. Площадь всей пластины будет определяться как разность площадей большого и малого круга (вырезанного): $A = A_1 - A_2 = \pi \times (R^2 - r^2) \text{ см}^2$.

Так как ось X является осью симметрии пластины, то её центр тяжести будет лежать на оси X , т.е. $y_C = 0$. Координату x_C определим подстановкой в формулу (1.11) вычисленных величин:

$$x_C = \frac{A_1 x_1 - A_2 x_2}{A} = \frac{R^2 \cdot 0 - r^2 \cdot a}{R^2 - r^2} = -\frac{r^2 \cdot a}{R^2 - r^2} \text{ см}.$$

5. Укажем центр тяжести сечения на рис. 2.35 и обозначим его буквой C . Точка лежит слева от начала координат на оси X .

Ответ: $x_C = -\frac{r^2 \cdot a}{R^2 - r^2} \text{ см}, \quad y_C = 0.$

Пример 3. Определить координаты центра тяжести сечения, показанного на рис. 2.36. Сечение состоит из двух уголков (L) 56×4 и швеллера ([]) № 18. Выполнить проверку правильности решения. Указать положение центра тяжести сечения на чертеже.

Дано: сечение, состоящее из двух уголков 56×4 и швеллера № 18.

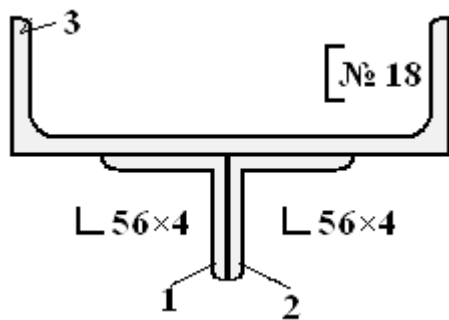


Рис. 2.36

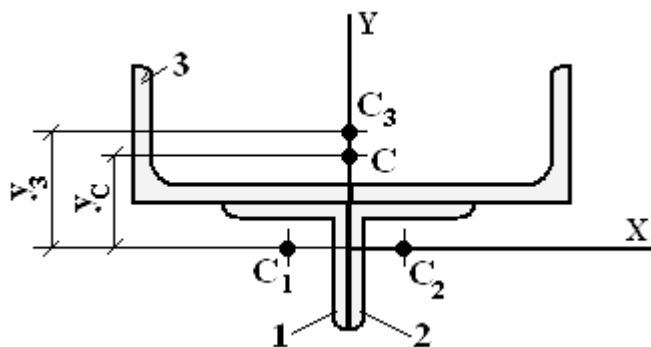


Рис. 2.37

Определить: x_C, y_C .

Решение. 1. Разобьем сечение на прокатные профили: два равнобоких уголка и швеллер, перенумеруем 1, 2 и 3 (см. рис. 2.36).

2. Определим из таблиц 1 и 4 Приложения I центры тяжести каждого из профилей и укажем их на чертеже согласно выбранной нумерации тел: C_1, C_2, C_3 (рис. 2.37). Для этого в таблице 1 найдем 3-ю строку с номером профиля 5.6 и указанными размерами $b = 56, d = 4$.

Выпишем из нее необходимые нам данные: $A_1 = A_2 = 4.38 \text{ см}^2$ – площадь сечения уголков и $z_{0(y_2)} = 1.52 \text{ см}$ – расстояние от центра тяжести уголка до полки. Из 10-й строки таблицы 4: $A_3 = 20.7 \text{ см}^2$ – площадь сечения швеллера и $z_{0(шв)} = 1.94 \text{ см}$ – расстояние от оси $y - y$, идущей вдоль высоты швеллера, до наружной грани стенки.

3. Введем некоторую систему координат, т.к. сложное сечение имеет ось симметрии, то совмещаем с ней ось Y . Ось X проведем через точки C_1 и C_2 , т.е. через центры тяжести уголков.

4. По формулам (1.11) найдем координаты центра тяжести составного сечения: $x_C = 0$, так как ось Y совпадает с осью симметрии и проходит через центр тяжести сечения, а

$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3}.$$

Определим координаты y_i центров тяжести уголков и швеллера и подставим их в формулу для вычисления y_C :

$$y_1 = 0; \quad y_2 = 0;$$

координаты y_1 и y_2 равны нулю, так как ось X проходит через центры тяжести уголков,

$$y_3 = z_{0(y_2)} + z_{0(шв)} = 1.52 + 1.94 = 3.46 \text{ см.}$$

Тогда

$$y_C = \frac{4.38 \cdot 0 + 4.38 \cdot 0 + 20.7 \cdot 3.46}{4.38 + 4.38 + 20.7} = \frac{71.62}{29.46} = 2.43 \text{ см.}$$

В случае если уголки симметрично расположены, имеют одинаковые площади $A_1 = A_2$ и координаты $y_1 = y_2$, формулу для определения y_C можно упростить:

$$y_C = \frac{2A_1 y_1 + A_3 y_3}{2A_1 + A_3}. \quad (2.41)$$

5. Изобразим центр тяжести сечения на рис. 2.37 и обозначим его буквой C . Укажем на чертеже это расстояние от оси X до точки C .

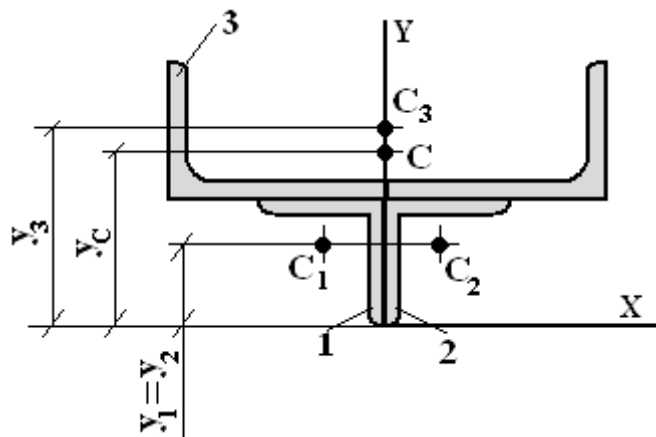


Рис. 2.38

6. Выполним проверку данного результата. Положение центра тяжести сложного сечения не должно зависеть от выбора системы координат. Проведем ось X по нижнему краю полки уголка, а ось Y оставим без изменения (рис. 2.38).

Формулы определения координат центра масс не изменяются, площади профилей останутся прежними, а координаты центров тяжести уголков и швеллера изменятся. Выпишем их:

$$A_1 = A_2 = 4.38 \text{ см}^2,$$

$$y_1 = y_2 = b_{y_2} - z_{0(y_2)} = 5.6 - 1.52 = 4.08 \text{ см};$$

$$A_3 = 20.7 \text{ см}^2, \quad y_3 = b_{y_2} + z_{0(\text{шв})} = 5.6 + 1.94 = 7.54 \text{ см}.$$

Вычисляем координаты центра тяжести в новых осях:

$$x_C = 0,$$

$$y_C = \frac{2A_1 y_1 + A_3 y_3}{2A_1 + A_3} = \frac{2 \cdot 4.38 \cdot 4.08 + 20.7 \cdot 7.54}{2 \cdot 4.38 + 20.7} = 6.51 \text{ см}.$$

Изображаем точку C на чертеже. Убедимся, что вычисленное двумя способами положение центра тяжести сечения находится в одной и той же точке. Разница между координатами y_C точки C в различных системах координат составляет $6.51 - 2.43 = 4.08 \text{ см}$, что соответствует расстоянию между осями X в первом и втором случае: $5.6 - 1.52 = 4.08 \text{ см}$.

2.16. Методические указания к заданию № 5

1. Разбиваем сечение на простые фигуры и обозначаем их цифрами.
2. Указываем центры тяжести каждого профиля (фигуры) и обозначаем их C_1, C_2, \dots, C_n .
3. Выбираем систему координатных осей. Если все сечения имеют одну ось симметрии, то координатную ось совмещаем с ней. Вторую ось координат направляем перпендикулярно первой, чтобы она пересекала центры тяжести одной или нескольких фигур, при этом начало координат может совпадать с центром тяжести одной из фигур. Либо вторую ось координат можно направить через нижнюю (крайнюю) точку сечения.
4. Составляем формулы для определения координат центра тяжести сечения (1.11). Площади прокатных профилей и координаты их центров тяжести берем из таблиц 1–4 Приложения I.
5. Указываем положение центра тяжести сложного сечения на рисунке, придерживаясь масштаба.
6. Выполняем проверку правильности решения, для чего можно либо изменить положение координатных осей, либо изменить разбиение фигуры.

2.17. Варианты задания № 5

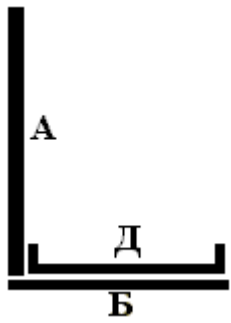
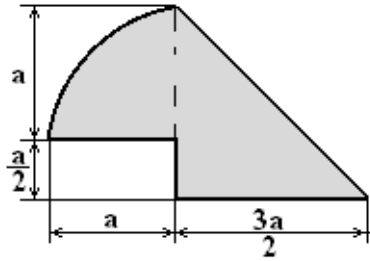
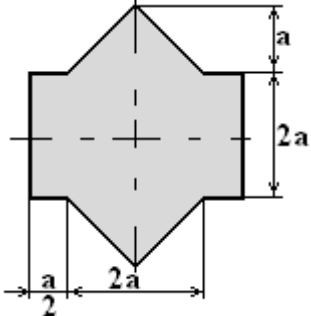

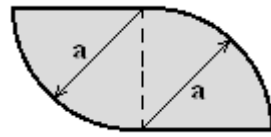
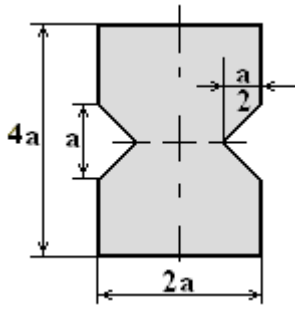
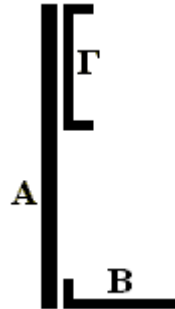
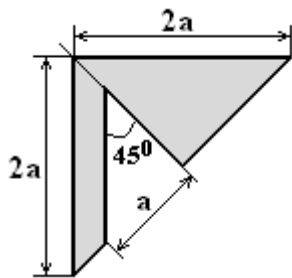
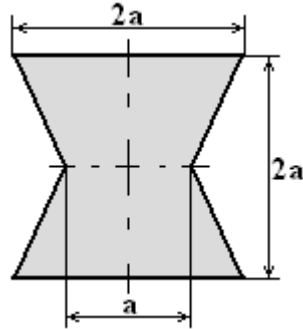
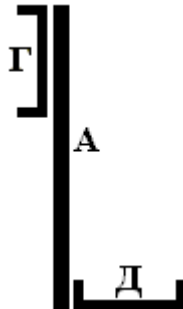
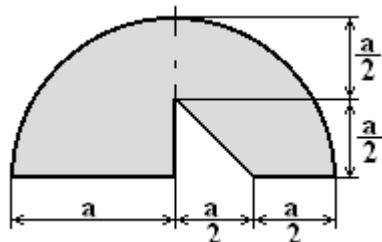
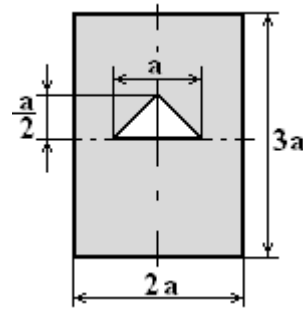
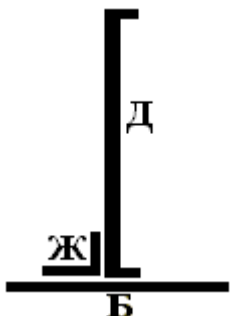
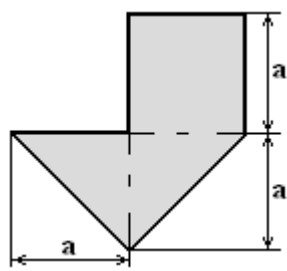
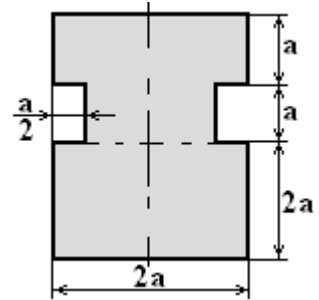
Определить координаты центров тяжести сечений, указанных на рисунках, соответствующих вашему варианту. Исходные данные к заданию взять в табл. 2.4 (стр. 87).

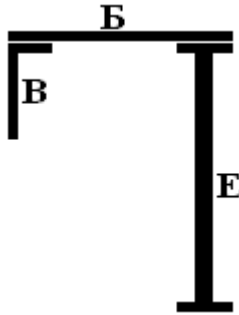
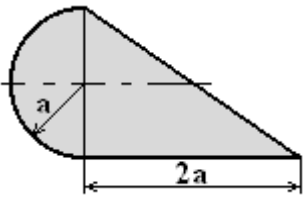
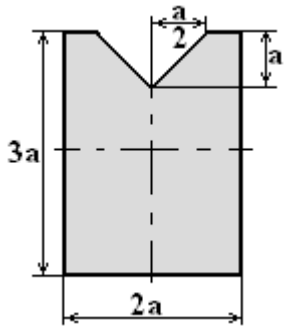
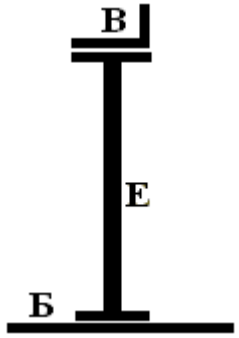
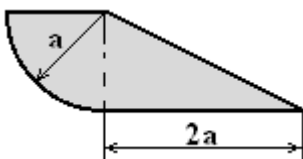
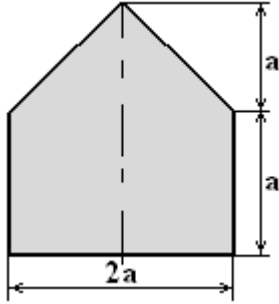
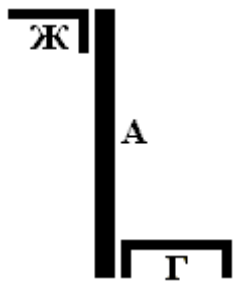
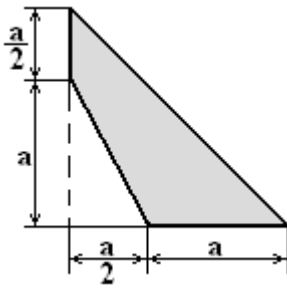
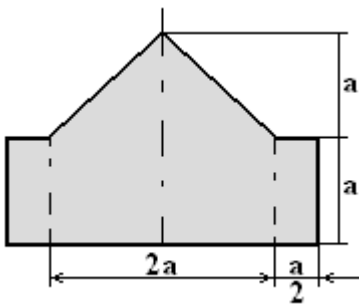
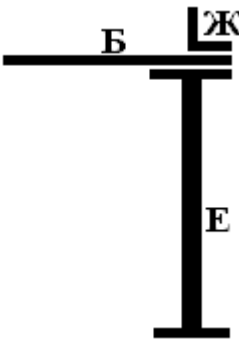
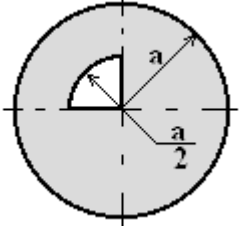
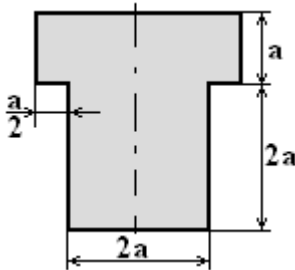
Выбор варианта

Выбор варианта производится аналогично заданию № 1.

Ва р-т	Задача № 1	Задача № 2	Задача № 3
1	2	3	4
1			
2			
3			

1	2	3	4
4			
5			
6			
7			
8			

1	2	3	4
9			
10			
11			
12			
13			

1	2	3	4
14			
15			
16			
17			

1	2	3	4
18			
19			
20			
21			
22			

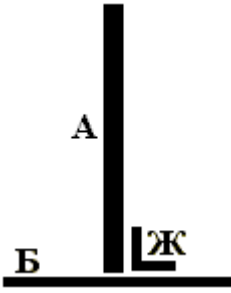
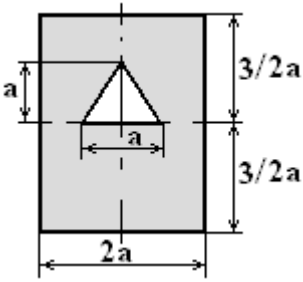
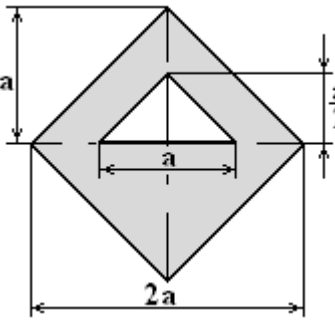
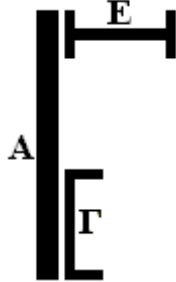
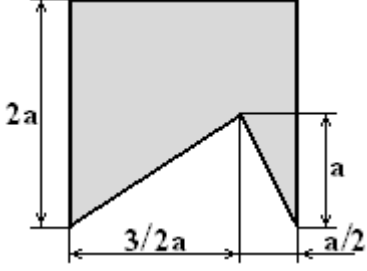
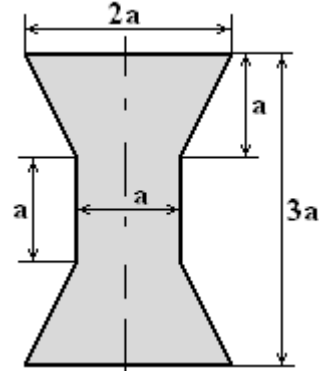
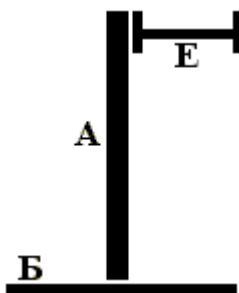
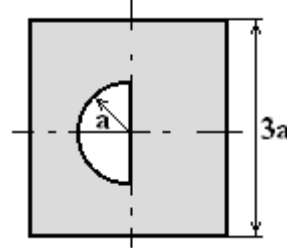
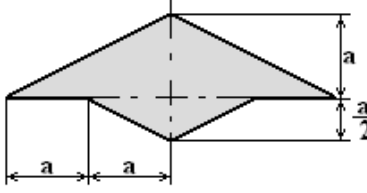
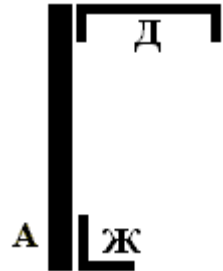
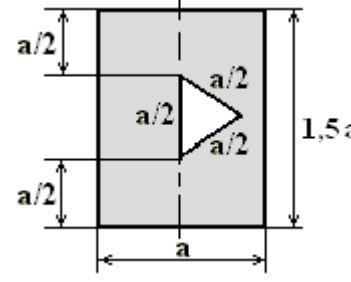
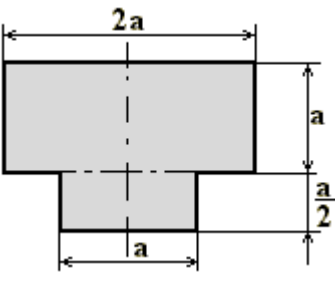
1	2	3	4
23			
24			
25			
26			

Таблица 2.4

**Исходные данные к заданию № 5 по теме
«Определение центра тяжести тела или системы тел»**

№ ширины	К задаче № 1											К заданию № 2 и № 3
	Вертикальный		Лист		Уголок неравнобокий		Швеллер		Двутавр	Уголок равнобокий	Значение размера (в см)	
	А		Б		В		Г Д					
	Ширина (в мм)	Толщина (в мм)	Ширина (в мм)	Толщина (в мм)	Размеры (в мм)		№		Размеры (в мм)			
1	320	7	400	8	90×56×8	16	18	16	16	63×63×6	10	
2	280	6	400	7	75×50×5	10	16	12	12	45×45×5	12	
3	340	5	380	7	100×63×6	16	22	18а	18а	40×40×4	14	
4	340	6	360	5	110×70×7	14	22а	20а	20а	36×36×4	16	
5	360	6	300	5	70×45×5	8	12	10	10	40×40×4	18	
6	320	8	340	6	70×45×5	12	16	14	14	50×50×5	20	
7	340	8	320	6	75×50×5	10	14	12	12	50×50×4	22	
8	300	10	280	6	50×32×4	8	12	10	10	63×63×6	24	
9	340	10	400	8	100×63×8	16	20	18а	18а	70×70×5	26	
10	440	12	400	10	70×45×5	10	14	12	12	45×45×4	28	

3. Геометрические характеристики плоских сечений

3.1. Основные сведения из теории

Понятия **площадь геометрической фигуры** и **статический момент площади** встречаются в курсах высшей математики и теоретической механики. В курсе сопротивления материалов приходится использовать более сложные геометрические характеристики.

Простейшей характеристикой прочности и жесткости стержня, зависящей от формы и размеров поперечного сечения, является **площадь поперечного сечения** – A , но непосредственно используется она лишь в расчетах при равномерном распределении напряжений по поперечному сечению, т.е. в случае растяжения или сжатия стержня.

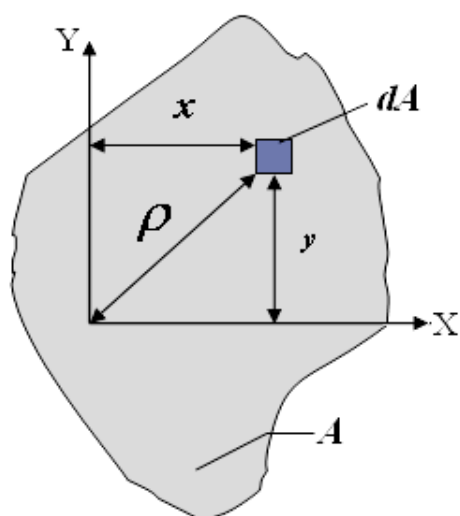


Рис. 3.1

Рассмотрим плоскую фигуру с площадью поперечного сечения A , x, y – координаты элемента площади dA , ρ – расстояние от начала координат до элемента dA (рис. 3.1).

Все геометрические характеристики, которые наиболее часто встречаются в курсе сопротивления материалов, представлены в таблице 3.1.

- Для ряда промышленных изделий типа: «уголок», «швеллер», «двутавр» и т.п. значения геометрических характеристик берут из сортамента, то есть из таблиц стандартных профилей поперечных сечений стержней (см. Приложение I).
- Для сечений нестандартного профиля или для составных сечений в виде комбинаций сечений из стандартных профилей их получают расчетным путем, исходя из конструктивных параметров.

Геометрические характеристики плоских фигур

Наименование геометрических характеристик плоской фигуры	Обозначение	Интегральное выражение	Размерность	Значения
Площадь	A	$\int_A dA$	$см^2, м^2$	> 0
Статические моменты	S_x S_y	$\int_A y dA$ $\int_A x dA$	$см^3, м^3$	≥ 0 < 0 > 0
Осевые моменты инерции	J_x J_y	$\int_A y^2 dA$ $\int_A x^2 dA$	$см^4, м^4$	> 0
Полярный момент инерции	J_ρ	$\int_A \rho^2 dA$	$см^4, м^4$	> 0
Центробежный момент инерции	J_{xy}	$\int_A x \cdot y dA$	$см^4, м^4$	≥ 0 < 0
Осевые моменты сопротивления	W_x W_y	$\frac{J_x}{y_{max}}$ $\frac{J_y}{x_{max}}$	$см^3, м^3$	> 0
Полярный момент сопротивления	W_ρ	$\frac{J_\rho}{\rho_{max}}$	$см^3, м^3$	> 0
Радиусы инерции	$i_x,$ i_y	$\sqrt{\frac{J_x}{A}}, \sqrt{\frac{J_y}{A}}$	$см, м$	> 0

3.2. Моменты инерции относительно параллельных осей

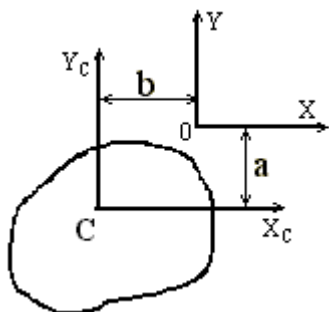


Рис. 3.2

На практике при расчетах часто требуется знать момент инерции фигуры в заданной системе координат, и не всегда это центральная, т.е. проходящая через центр тяжести, система (рис. 3.2). Обычно в таблицах приводятся значения моментов инерции в случае главной центральной системы координат.

Зависимость между моментами инерции относительно двух параллельных осей может быть найдена с помощью теоремы Гюйгенса – Штейнера. Пусть известны моменты инерции фигуры J_{X_c} , J_{Y_c} и $J_{X_c Y_c}$ относительно центральной координатной системы $CX_c Y_c$, тогда моменты инерции J_X , J_Y и J_{XY} относительно системы координат OXY , которая параллельна центральной, определяются по формулам:

$$J_X = J_{X_c} + a^2 A; \quad J_Y = J_{Y_c} + b^2 A; \quad (3.1)$$

$$J_{XY} = J_{X_c Y_c} + abA, \quad (3.2)$$

где a, b – координаты точки O в системе координат $CX_c Y_c$. Видно, что осевой момент инерции фигуры относительно любой нецентральной оси всегда больше, чем относительно центральной.

3.3. Главные оси и главные моменты инерции сечения

Из математики известно, что через любую точку плоскости можно провести бесчисленное множество пар взаимно перпендикулярных осей (рис. 3.3). Если точка C – центр тяжести сечения, то все системы координат, проходящие через неё: $CX_1 Y_1$, $CX_2 Y_2$, ..., $CX_n Y_n$, будут центральными. Сумма осевых моментов инерции фигуры J_X , J_Y относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно точки C

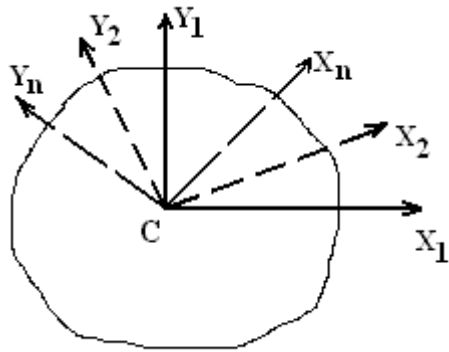


Рис. 3.3

$$J_x + J_y = J_\rho$$

следовательно, величина постоянная

$$\underbrace{J_{x_1} + J_{y_1}}_{J_\rho} = \underbrace{J_{x_n} + J_{y_n}}_{J_\rho}.$$

Поворачивая систему координат, можно найти такое положение осей, при котором относительно одной из них осевой момент инерции будет максимален, а

относительно другой – минимален. Центробежный момент инерции при этом оказывается равен нулю.

Оси, относительно которых моменты инерции сечения имеют экстремальные значения, а центробежный момент инерции равен нулю, называют **главными осями инерции**.

Моменты инерции относительно главных осей называют **главными моментами инерции**.

В справочной литературе и при практических расчетах обычно используют моменты инерции относительно главных центральных осей. Если сечение обладает осью симметрии, то главными осями инерции будут эта ось и, проходящая через центр тяжести сечения, перпендикулярная ей ось. В случае, когда сечение имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, всегда эти оси будут главными осями инерции. Для фигур, имеющих более двух осей симметрии, осевые моменты инерции относительно **всех** центральных осей равны между собой. Примерами таких фигур служат равнобедренный треугольник, квадрат, круг и т.д.

При нахождении моментов инерции сложной фигуры относительно какой-либо оси необходимо разбить её на ряд простых фигур и для каждой из них вычислить момент инерции относительно этой оси (рис. 3.4). Момент инерции всей фигуры в этом случае можно определить как сумму моментов инерции составных её частей:

$$J_X = J_X^{(1)} + J_X^{(2)} + J_X^{(3)}.$$

Напоминаем, что суммировать моменты инерции относительно разных осей **нельзя!**

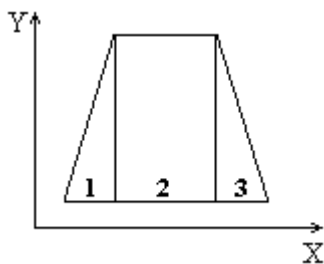


Рис. 3.4

Аналогичным образом можно вычислять статические и центробежные моменты сечения сложных фигур. Но для определения моментов сопротивления или радиусов инерции сечения применять данный метод **ни в коем случае нельзя!**

3.4. Примеры решения задания № 6. Геометрические характеристики плоских сечений

Пример 1. Определить главные моменты инерции и главные моменты сопротивления плоского сечения прямоугольной формы ($6a \times 10a$) с вырезанным квадратом ($2a \times 2a$), изображенного на рис. 3.5. Вычислить радиусы инерции относительно главных осей.

Дано: сечение ($6a \times 10a$) с вырезанным квадратом ($2a \times 2a$).

Определить: $J_x, J_y, W_x, W_y, i_x, i_y$.

Решение. 1. Определим положения центральных осей X_C, Y_C . Для чего вычислим координаты центра тяжести сечения ($x_C; y_C$) относительно вспомогательной системы координат OXY . Для упрощения вычислений одну из осей, например Y , направляем вдоль оси симметрии. Тогда ось Y является центральной Y_C и координата

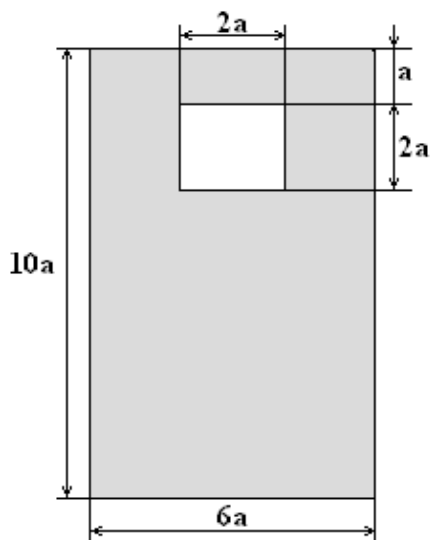


Рис. 3.5

$x_C = 0$. Осталось установить только координату y_C . Сечение составное, поэтому по методу разбиения рассматриваем его как две простые фигуры: прямоугольник и квадрат. Укажем на чертеже (рис. 3.6) центры тяжести этих фигур: $C_1(0; 5a)$ и $C_2(0; 8a)$ в выбранной системе координат OXY .

Вычислим их площади:

$$A_1 = 10a \cdot 6a = 60a^2 \text{ и}$$

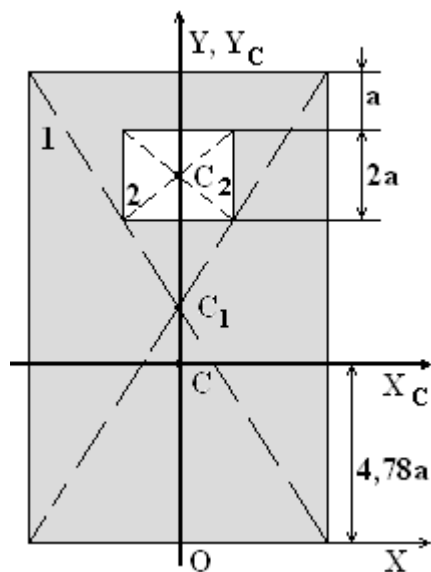


Рис. 3.6

$A_2 = 2 a \cdot 2 a = 4 a^2$, соответственно.

Площадь составного сечения равна $A = A_1 + (-A_2) = 56 a^2$. Знак «-» перед A_2 означает, что квадрат из прямоугольника вырезан. По формуле (1.11) найдем координату y_C центра тяжести всей фигуры:

$$y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2}{A_1 - A_2} = \frac{5a \cdot 60a^2 - 8a \cdot 4a^2}{56a^2} = \frac{(300 - 32)a^3}{56a^2} \approx 4.78a$$

Отметим на чертеже точку $C(0; 4.78a)$ и проведем центральные оси $CX_C Y_C$.

2. Из Приложения II таблица 1 определим значения моментов инерции рассматриваемых фигур относительно собственных осей $C_1 X_1 Y_1$ для прямоугольника:

$$J_{x_1} = \frac{6a \cdot (10a)^3}{12} = 500 a^4, \quad J_{y_1} = \frac{10a \cdot (6a)^3}{12} = 180 a^4$$

и осей $C_2 X_2 Y_2$ для квадрата:

$$J_{x_2} = \frac{(2a)^4}{12} = \frac{16a^4}{12} \approx 1.3 a^4, \quad J_{y_2} = \frac{(2a)^4}{12} = \frac{16a^4}{12} \approx 1.3 a^4.$$

Собственные оси прямоугольника $C_1 X_1 Y_1$ и квадрата $C_2 X_2 Y_2$ параллельны центральным осям фигуры $CX_C Y_C$. Используя формулы (3.1) для определения моментов инерции относительно параллельных осей, получим для прямоугольника

$$J_{x_c}^{(1)} = J_{x_1} + a_1^2 A_1 = 500 a^4 + (0.2a)^2 60 a^2 = 502.4 a^4,$$

$$J_{y_c}^{(1)} = J_{y_1} + b_1^2 A_1 = 180 a^4,$$

здесь a_1 – расстояние между осями X_1 и X_C , b_1 – между осями Y_1 и Y_C : $a_1 = 5a - 4.78a \approx 0.2a$, $b_1 = 0$, и для квадрата

$$J_{x_c}^{(2)} = J_{x_2} + a_2^2 A_2 = 1.3 a^4 + (3.2 a)^2 (4 a^2) = 42.26 a^4,$$

$$J_{y_c}^{(2)} = J_{y_2} + b_2^2 A_2 = 1.3 a^4,$$

где a_2 – расстояние между осями X_2 и X_C , b_2 – между совпадающими осями Y_2 и Y_C : $a_2 = 8 a - 4.78 a \approx 3.2 a$, $b_2 = 0$.

Вычислим теперь главные моменты инерции всего сечения:

$$J_{x_c} = J_{x_c}^{(1)} - J_{x_c}^{(2)} = (502.4 - 42.26) a^4 \approx 460.14 a^4,$$

$$J_{y_c} = J_{y_c}^{(1)} - J_{y_c}^{(2)} = 180 a^4 - 1.3 a^4 = 178.7 a^4.$$

3. Определим моменты сопротивления сечения

$$W_{x_c} = \frac{J_{x_c}}{|y_{max}|} = \frac{460.14 a^4}{5.22 a} \approx 88.15 a^3,$$

$$W_{y_c} = \frac{J_{y_c}}{|x_{max}|} = \frac{178.7 a^4}{3 a} \approx 59.57 a^3,$$

где y_{max} – расстояние от оси X_C до наиболее удаленной точки сечения по оси Y_C , а x_{max} – расстояние от оси Y_C до наиболее удаленной точки сечения по оси X_C .

4. Используя формулы $i_{x_c} = \sqrt{J_{x_c}/A}$ и $i_{y_c} = \sqrt{J_{y_c}/A}$, найдем радиусы инерции сечения

$$i_{x_c} = \sqrt{\frac{460.14 a^4}{56 a^2}} \approx 2.9 a \text{ и } i_{y_c} = \sqrt{\frac{178.7 a^4}{56 a^2}} \approx 1.79 a.$$

Ответ: $J_{x_c} = 460.14 a^4$, $J_{y_c} = 178.7 a^4$, $W_{x_c} \approx 88.15 a^3$,

$$W_{y_c} \approx 59.57 a^3, i_{x_c} \approx 2.9 a, i_{y_c} \approx 1.79 a.$$

Пример 2. Определить геометрические характеристики сложного плоского сечения, состоящего из двух двутавров № 18 и пластины прямоугольной формы 16×2.5 (рис. 3.7). Размеры указаны в сантиметрах.



Рис. 3.7

Дано: два двутавра № 18 и пластина (16×2.5).

Определить: положение центра тяжести сечения, главную центральную систему координат и значения $J_x, J_y, W_x, W_y, i_x, i_y$.

Решение. 1. Вычерчиваем сечение в масштабе (рис. 3.8). Выписываем из табл. 3 Приложения I (5-я строка) необходимые значения для обоих двутавров № 18: $h_1 = 18 \text{ см}$, $b_1 = 9 \text{ см}$, $J_{x_1}^I = 1290 \text{ см}^4$ и $J_{y_1}^I = 82.6 \text{ см}^4$ – осевые моменты инерции относительно осей $C_1X_1Y_1$, $A_1^I = 23.4 \text{ см}^2$ – площадь, и из табл. 1 Приложения II (4-я строка) для прямоугольника в системе координат $C_3X_3Y_3$:

$$A^{np} = (16 \cdot 2.5) \text{ см}^2 = 40 \text{ см}^2, \quad J_{x_3}^{np} = \frac{bh^3}{12} = \frac{16 \cdot 2.5^3}{12} \approx 20.83 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_3}^{np} = \frac{bh^3}{12} = \frac{2.5 \cdot 16^3}{12} \approx 853.33 \text{ см}^4.$$

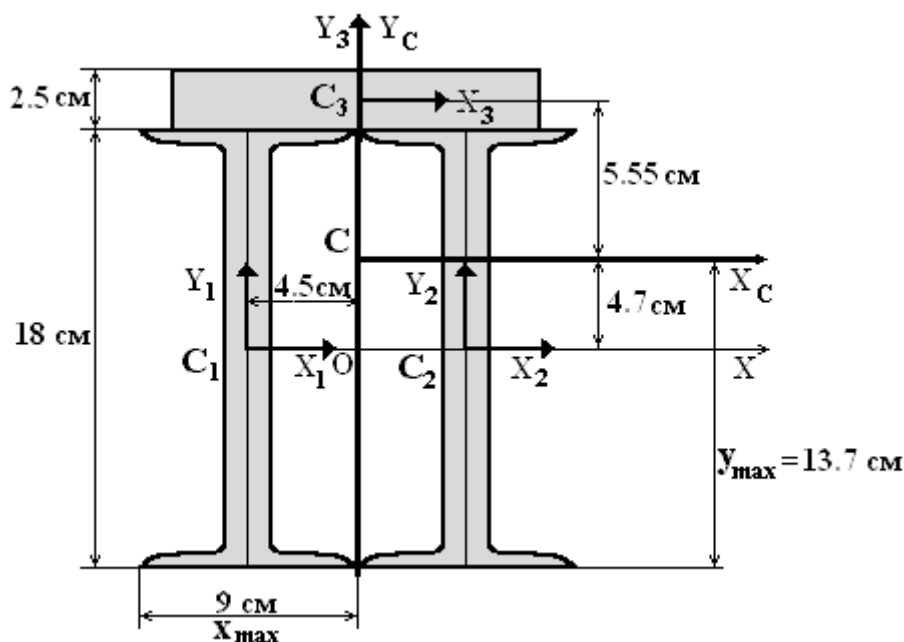


Рис. 3.8

2. Определяем положение центра тяжести фигуры. Так как заданное сечение обладает осью симметрии: Y_C , то на ней будет располагаться центр тяжести сечения и $x_C = 0$. Остается найти координату

y_C . В качестве вспомогательной выбираем ось X , которая для двутавров является осью симметрии. Вычисляем координаты центров тяжести каждой фигуры в системе координат OXY_C :

$$C_1(x_1 = -4.5 \text{ см}; y_1 = 0), \quad C_2(x_2 = 4.5 \text{ см}; y_2 = 0), \\ C_3(x_3 = 0; y_3 = 9 + 1.25 = 10.25 \text{ см}).$$

Пользуясь формулой (1.11), находим

$$y_C = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{10.25 \cdot 40}{2 \cdot 23.4 + 40} = \frac{410}{86.8} = 4.7 \text{ см}.$$

Тогда координаты точки C ($x_C = 0; y_C = 4.7 \text{ см}$).

3. Как уже отмечалось, Y_C – ось симметрии фигуры и ось X_C проходит через её центр тяжести, то $CX_C Y_C$ – главная центральная система координат (см. рис. 3.8).

Определяем теперь величину главных моментов инерции сечения, используя формулы (3.1):

$$J_{x_c} = J_{x_c}^{(1)} + J_{x_c}^{(2)} + J_{x_c}^{(3)} = 2 \left(J_{x_1}^I + 4.7^2 \cdot A^I \right) + \left(J_{x_3}^{np} + 5.55^2 \cdot A^{np} \right) = \\ = 2 (1290 + 22.09 \cdot 23.4) + (20.831 + 30.8 \cdot 40) = \\ = 3613.8 + 1252.83 \approx 4866.6 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_c} = J_{y_c}^{(1)} + J_{y_c}^{(2)} + J_{y_c}^{(3)} = 2 \left(J_{y_1}^I + 4.5^2 \cdot A^I \right) + J_{y_3}^{np} = \\ = 2 (82.6 + 4.5^2 \cdot 23.4) + 853.33 = \\ = 112.9 + 853.33 \approx 1966.23 \text{ см}^4.$$

4. Находим величину главных моментов сопротивления фигуры

$$W_{x_c} = \frac{J_{x_c}}{|y_{max}|} = \frac{4866.6 \text{ см}^4}{13.7 \text{ см}} = 355.23 \text{ см}^3,$$

$$W_{y_c} = \frac{J_{y_c}}{|x_{max}|} = \frac{1966.23 \text{ см}^4}{9 \text{ см}} \approx 218.47 \text{ см}^3$$

и главные радиусы инерции сечения

$$i_{x_c} = \sqrt{\frac{J_{x_c}}{A}} = \sqrt{\frac{4866.6}{86.8}} \approx 7.5 \text{ см}, \quad i_{y_c} = \sqrt{\frac{J_{y_c}}{A}} = \sqrt{\frac{1966.23}{86.8}} \approx 4.8 \text{ см},$$

где $A = A_1 + A_2 + A_3 = 2A^I + A^{np} = 86.8 \text{ см}^2$.

Ответ: $C(0; 4.7)$ – центр тяжести сечения в системе координат OXY_C , $CX_C Y_C$ – главная центральная система координат, $J_{x_c} \approx 4866.6 \text{ см}^4$, $J_{y_c} \approx 1966.23 \text{ см}^4$, $W_{x_c} \approx 355.23 \text{ см}^3$, $W_{y_c} \approx 218.47 \text{ см}^3$, $i_{x_c} \approx 7.5 \text{ см}$, $i_{y_c} \approx 4.8 \text{ см}$.

3.5. Методические указания к заданию № 6

Задачи на определение геометрических характеристик сложного сечения следует решать, придерживаясь следующего порядка:

1. начертить сечение в масштабе;
2. указать на чертеже основные размеры в сантиметрах;
3. найти положение центра тяжести и изобразить его на чертеже;
4. отыскать моменты инерции относительно центральных осей сечений;
5. определить положение главной центральной системы координат;
6. вычислить величины главных моментов инерции сечения;
7. установить значения моментов сопротивления сечения;
8. посчитать радиусы инерции.

3.6. Варианты задания № 6

Для заданного плоского сечения фигуры (задача 3 задания № 5 стр. 79–84) определить геометрические характеристики, т.е. установить положение главной центральной системы координат и вычислить значения главных моментов инерции, моментов сопротивления и радиусов инерции заданного сечения.

Выбор варианта

Студент выбирает вариант, соответствующий его номеру в журнале преподавателя, данные берет из таблицы 2.4 предыдущей работы по определению центра тяжести сечения (стр. 85) в соответствии с цифрой шифра, которую указывает преподаватель.

4. Основные понятия и определения по курсу сопротивления материалов

4.1. Объекты изучения сопротивления материалов

Основным объектом изучения в курсе сопротивления материалов является **стержень** – элемент, длина ℓ которого значительно превосходит два других размера b и h , так называемые характерные размеры поперечного сечения (рис. 4.1).

Многие сложные конструкции можно рассматривать как состоящие из элементов, имеющих форму стержня, и которые принято называть **стержневыми системами**.

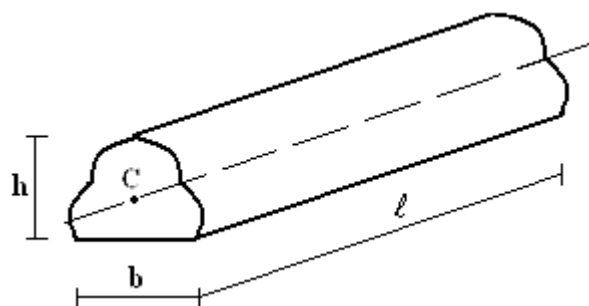


Рис. 4.1

Линию, проходящую через центры тяжести поперечных сечений, называют **осью стержня**. Поперечное сечение стержня всегда перпендикулярно его оси. В зависимости от формы оси стержень

может быть прямым, кривым или пространственно-изогнутым.

В строительстве наиболее часто встречаются стержни с прямолинейной осью – прямой брус. В зависимости от назначения и роли, выполняемой стержнем в конструкции, различают:

- **колонны и стойки** – это вертикальные стержни, работающие преимущественно на сжатие;
- **балки** – стержни, работающие на изгиб;
- **подвески, затяжки, оттяжки** – стержни, воспринимающие осевые растягивающие усилия;
- **валы** – стержни, испытывающие кручение.

4.2. Нагрузки

Все усилия, участвующие в работе бруса, делятся на внешние и внутренние. К внешним силам относятся заданные нагрузки, а также вызываемые ими опорные реакции. Нагрузки, с которыми

приходится иметь дело в сопротивлении материалов, представляют собой силы или пары сил. Они могут быть сосредоточенными или распределенными по длине, поверхности, объему (рис. 4.2).

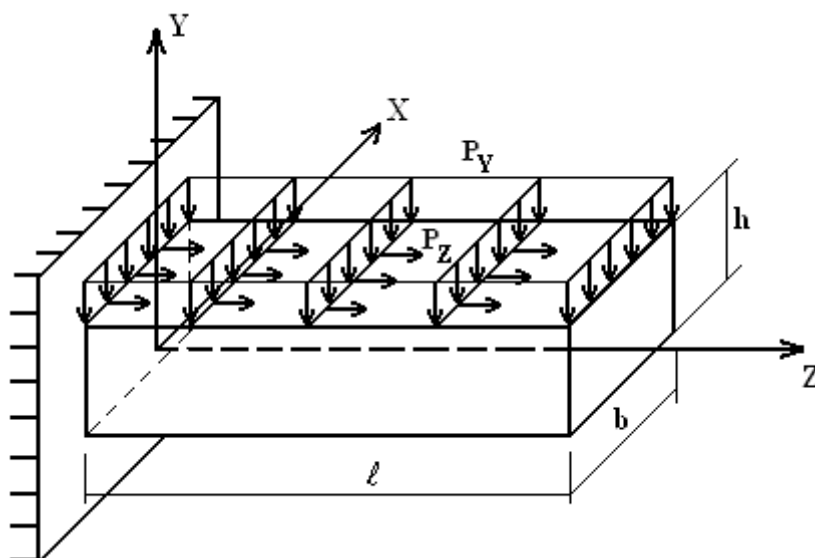


Рис. 4.2

В практических расчетах все внешние нагрузки переносят на ось стержня. В результате этого приведения получают расчетную схему стержня (рис. 4.3).

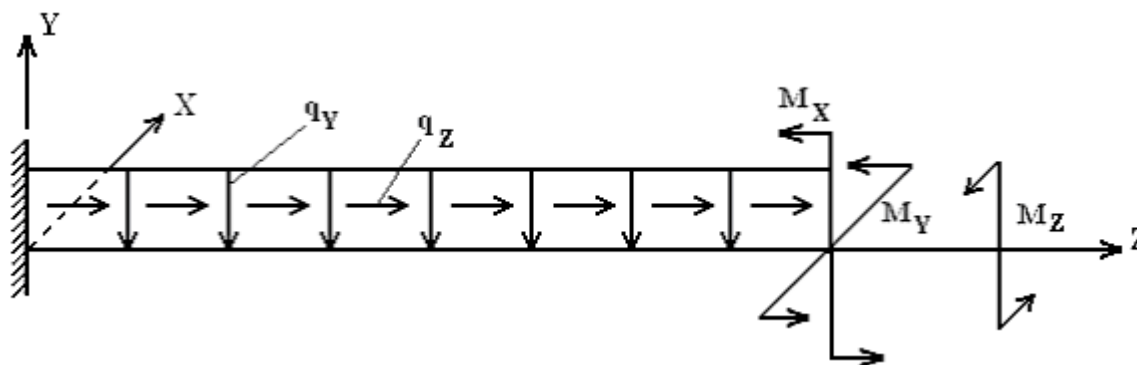


Рис. 4.3

Размерность нагрузок:

1) сосредоточенные нагрузки:

- а) силы F (с компонентами F_x, F_y, F_z) измеряются в единицах силы;
- б) пары сил (с компонентами M_x, M_y, M_z) измеряются в единицах силы, умноженных на единицу длины.

2) Распределенные нагрузки:

- а) объемно-распределенные нагрузки с интенсивностью $f(f_x, f_y, f_z)$ имеют размерность $[H/m^3]$ или $[кН/m^3]$;
- б) поверхностно-распределенные с интенсивностью p (с компонентами p_x, p_y, p_z) имеют размерность $[H/m^2]$ или $[кН/m^2]$;
- в) линейно-распределенные с интенсивностью q (q_x, q_y, q_z) имеют размерность $[H/m]$ или $[кН/m]$;
- г) распределенные пары сил с интенсивностью m (с компонентами m_x, m_y, m_z) имеют размерность силы $[H]$ или $[кН]$.

По продолжительности действия нагрузки делятся на постоянные, действующие в течение всего времени существования конструкции (например, собственный вес) и временные, действующие на протяжении лишь некоторого промежутка времени (например, атмосферные нагрузки – снеговая и ветровая).

По характеру действия различают нагрузки статические, прилагаемые к брусу настолько медленно, что можно пренебречь вызываемыми ими ускорениями перемещений частиц бруса, и динамические, связанные с возникновением больших ускорений. В дальнейшем будем рассматривать статическое загрузение стрелы.

4.3. Опорные реакции. Внутренние усилия

Для решения задач сопротивления материалов необходимо знать опорные реакции, возникающие в точках закрепления стержней. Их значения находят, решая уравнения равновесия (1.5) – (1.7). Если число неизвестных опорных реакций соответствует числу независимых уравнений равновесия, то такие стержни, не имеющие лишних закреплений, носят название **статически определимых**.

Стержни, в которых число неизвестных реакций превышает число уравнений равновесия, называются **статически неопределимыми**. Для определения реакций в этом случае необходимо к уравнениям равновесия привлекать дополнительные уравнения, которые носят название уравнений совместности деформаций.

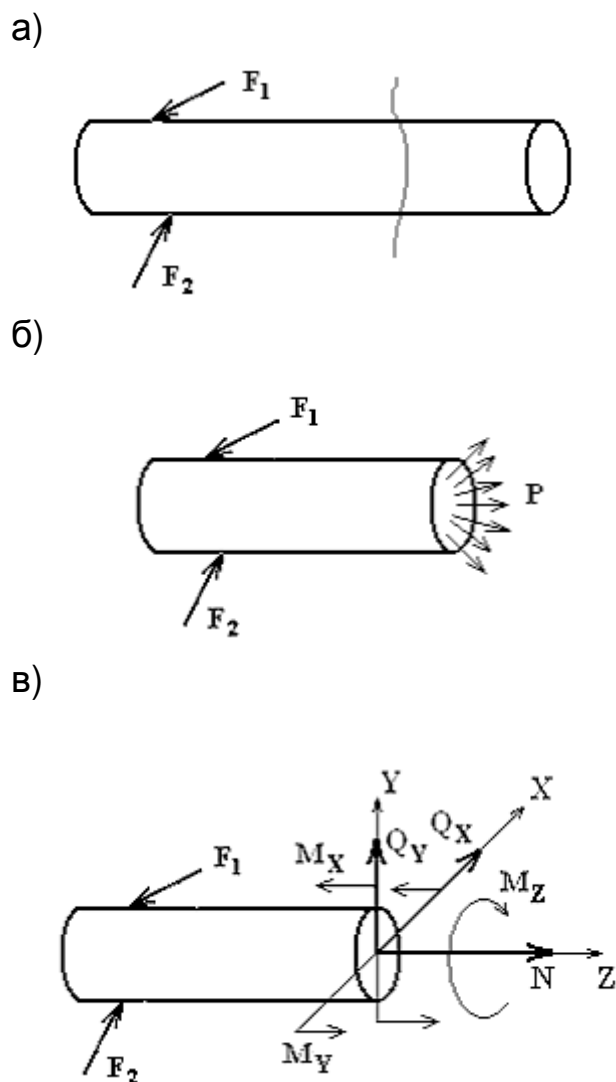


Рис. 4.4

Под действием внешних сил между отдельными смежными частицами внутри объекта возникают внутренние силы. Их можно выявить, если расчлнить мысленно стержень на две части сечением, перпендикулярным оси (рис. 4.4).

Так как связи между выделенными частями тела утрачены, необходимо действие правой части на левую и левой на правую заменить в сечении системой сил P (рис. 4.4, б). Эти внутренние силы распределены по всей площади сечения, и закон распределения этих сил мы пока установить не можем. Однако ясно, что они должны быть такими, чтобы выполнялись условия равновесия оставленной части.

Приведем систему сил P к центру тяжести сечения. В результате получим главный вектор R и главный момент M . Выберем далее систему координат X, Y, Z . Ось Z направим по нормали к сечению, оси X и Y расположим в его плоскости. Спроектировав главный вектор и главный момент на оси X, Y, Z , получим шесть составляющих: три силы (N, Q_x, Q_y) и три момента (M_z, M_x, M_y) (рис. 4.4, в). Эти составляющие называются **внутренними силовыми факторами** или **внутренними усилиями** в сечении бруса, и каждая имеет свое название:

N – **продольная** (нормальная) **сила** – проекция главного вектора на ось Z ;

Q_X, Q_Y – **поперечные** (перерезывающие) **силы** – проекции главного вектора на главные центральные оси поперечного сечения X, Y ;

M_Z или M_k – **крутящий момент** – проекция главного момента на ось Z ;

M_X, M_Y – **изгибающие моменты** – проекции главного момента на главные центральные оси поперечного сечения X, Y .

4.4. Определение внутренних усилий

При определении внутренних усилий используют специальный прием, являющийся основным в сопротивлении материалов и носящий название **метода сечений**. Его сущность заключается в следующем:

- 1) Брус мысленно рассекают на две части плоскостью перпендикулярной оси стержня в интересующем месте (рис. 4.4, а).
- 2) Одну часть отбрасывают (рис. 4.4, б).
- 3) Действие отброшенной части заменяют усилиями $N, Q_X, Q_Y, M_Z, M_X, M_Y$ (рис. 4.4, в).
- 4) Из условий равновесия оставшейся части определяют численное значение внутренних усилий.

Пример № 1. Определить внутренние усилия в сечении А стержня, который жестко закреплён одним концом (рис. 4.5, а). На него действуют силы $F_1 = 4 \text{ кН}$, $F_2 = 6 \text{ кН}$, $F_3 = 1 \text{ кН}$ и пара с моментом $m = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Дано: $F_1 = 4 \text{ кН}$, $F_2 = 6 \text{ кН}$, $F_3 = 1 \text{ кН}$ и $m = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Определить: внутренние усилия в сечении А стержня.

Решение. 1. Рассмотрим сначала сечение в точке А. Рассечем стержень на две части и отбросим одну из них. Отбрасывать можно любую часть, но если стержень имеет жесткую заделку, то отбрасывать лучше ту часть, которая содержит жесткую заделку.

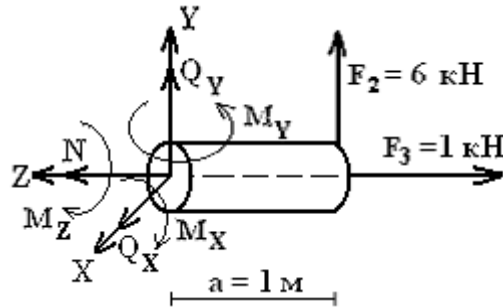
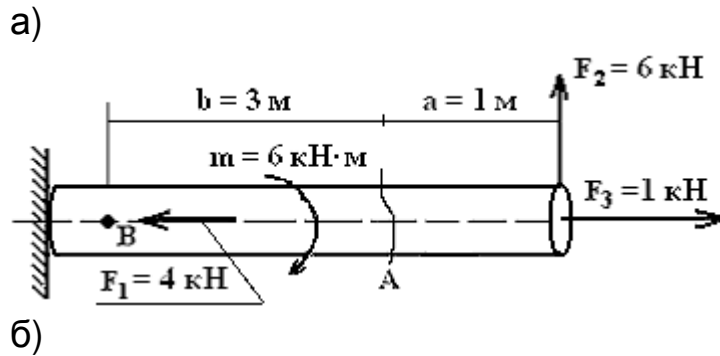


Рис. 4.5

2. Поместим в проведенном сечении систему координат X, Y, Z и покажем внутренние усилия $N, Q_X, Q_Y, M_Z, M_X, M_Y$, которые возникают в данном сечении при отбрасывании одной части стержня (рис. 4.5, б).

3. Запишем шесть уравнений статики и их решения:

$$\begin{aligned} \sum_k F_{kX} = 0; & & Q_X = 0; & & Q_X = 0; \\ \sum_k F_{kY} = 0; & & Q_Y + F_2 = 0; & & Q_Y = -F_2 = -6 \text{ кН}; \\ \sum_k F_{kZ} = 0; & & N - F_3 = 0; & & N = F_3 = 1 \text{ кН}; \\ \sum_k \text{mom}_X = 0; & & M_X - F_2 \cdot a = 0; & & M_X = F_2 \cdot a = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ \sum_k \text{mom}_Y = 0; & & M_Y = 0; & & M_Y = 0; \\ \sum_k \text{mom}_Z = 0; & & M_Z = 0; & & M_Z = 0. \end{aligned}$$

Ответ: $Q_X = 0, \quad Q_Y = -6 \text{ кН}, \quad N = 1 \text{ кН}, \quad M_X = 6 \text{ кН} \cdot \text{м},$
 $M_Y = M_Z = 0.$

Определять внутренние усилия можно немного быстрее, если выписывать не уравнения равновесия, а сразу их решения, руководствуясь определенными правилами.

Правило 1. Продольная сила N в поперечном сечении прямого бруса равна сумме проекций на ось Z всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

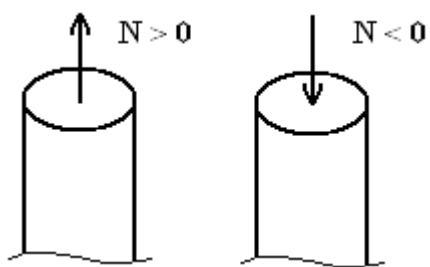


Рис. 4.6

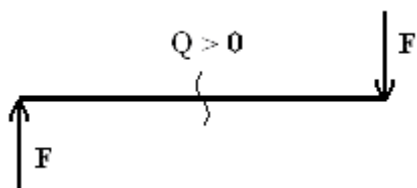
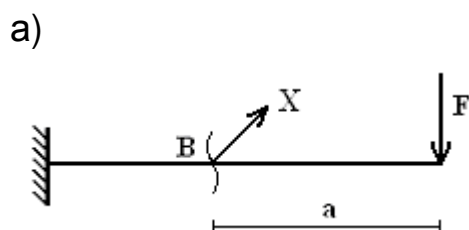


Рис. 4.7



б)

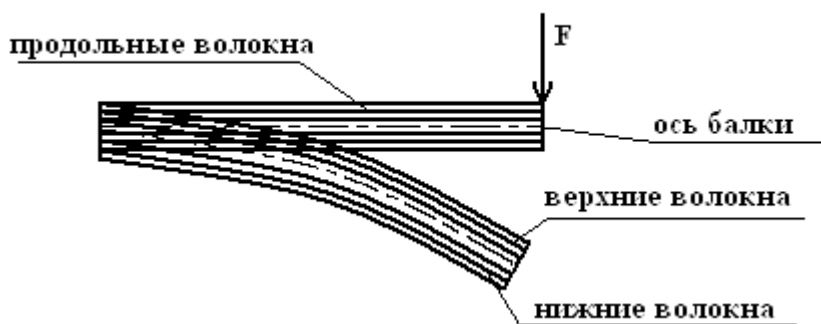


Рис. 4.8

Правило знаков 1. Проекция внешней силы, вызывающая растяжение оставшейся части, создает продольную силу положительного знака, т.е. положительная продольная сила направлена от сечения, сжимающая – к сечению (рис. 4.6).

Правило 2. Поперечная (перерезывающая) сила Q_Y в произвольном сечении балки равна алгебраической сумме всех внешних сил, проектирующихся на ось Y , приложенных по одну сторону (левую или правую) от рассматриваемого сечения.

Правило знаков 2. Внешняя сила, вызывающая вращение оставшейся части

балки по ходу часовой стрелки вокруг проведенного сечения, вызывает в этом сечении поперечную силу положительного знака (рис. 4.7).

Правило 3. Изгибающий момент M_X равен алгебраической сумме моментов всех внешних нагрузок, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения относительно оси X . Поскольку ось X перпендикулярна поперечному сечению, то фактически мы будем далее вычислять моменты сил относительно самого сечения (рис. 4.8, а).

Правило знаков 3. Представим себе, что стержень состоит из бесконечно большого количества бесконечно тонких волокон, параллельных оси стержня, которые в дальнейшем будем называть продольными волокнами. При действии на балку вертикальной силы длина этих волокон будет меняться. Например, сила, изображенная на рис. 4.8, деформирует балку так, что волокна, находящиеся выше оси балки, становятся длиннее, а находящиеся ниже оси – короче. В таком случае говорят, что сила растягивает верхние волокна. Изгибающий момент M_X положителен, если соответствующие внешние нагрузки растягивают нижние волокна (рис. 4.9).

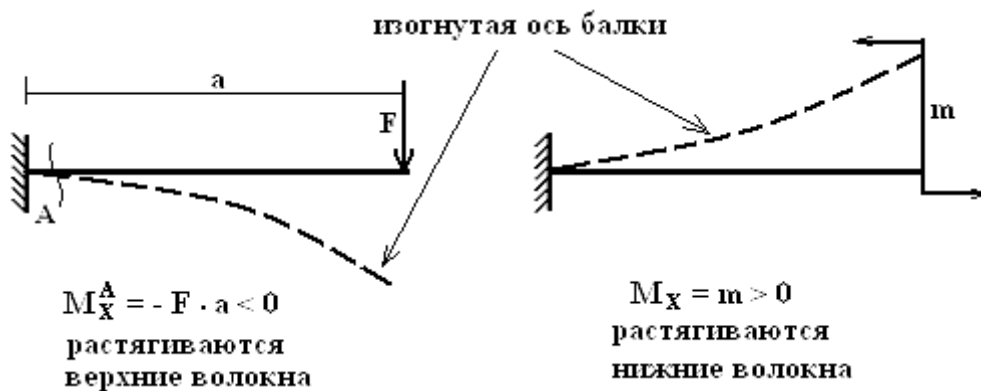


Рис. 4.9

Поперечная сила Q_X определяется аналогично силе Q_Y , а изгибающий момент M_Y – аналогично моменту M_X .

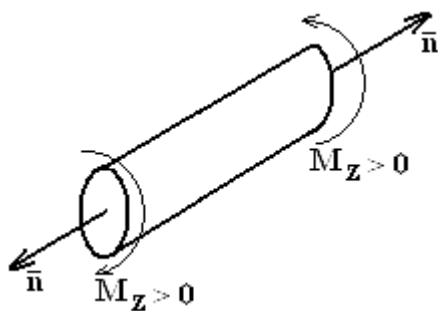


Рис. 4.10

Правило 4. Крутящий момент M_Z относительно оси Z равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Правило знаков 4. Крутящий момент считается положительным, если при взгляде на сечение со стороны внешней нормали он направлен по ходу часовой стрелки (рис. 4.10).

Пример № 2. Определить внутренние усилия в сечении В стержня, изображенного на рис. 4.5, а. На стержень, который жестко закреп-

лен одним концом, действуют силы $F_1 = 4 \text{ кН}$, $F_2 = 6 \text{ кН}$, $F_3 = 1 \text{ кН}$ и пара сил с моментом $m = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Дано: $F_1 = 4 \text{ кН}$, $F_2 = 6 \text{ кН}$, $F_3 = 1 \text{ кН}$, $m = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Определить: внутренние усилия в сечении В стержня.

Решение. Используя изложенные правила, решаем задачу.

1. Проведем через точку В сечение и отбросим часть стержня с жесткой заделкой.
2. Поместим в сечение В систему координат (рис. 4.11).

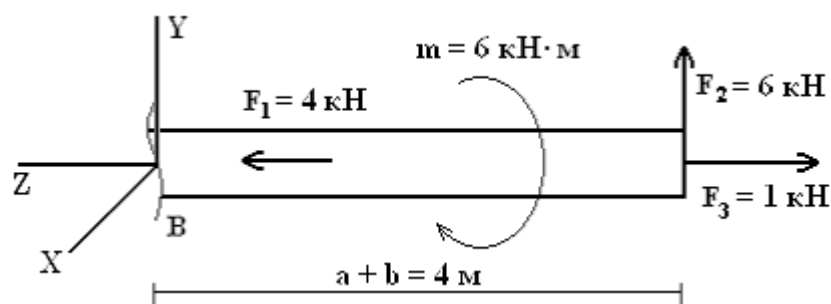


Рис. 4.11

3. Продольную силу N получим, просуммировав все силы, лежащие на оси Z . При этом силу F_3 берем со знаком «+», так как она растягивает продольные волокна, а силу F_1 со знаком «-», так как она их сжимает: $N = F_3 - F_1 = 1 - 4 = -3 \text{ кН}$.

Силу Q_Y вычислим, суммируя все силы, параллельные оси Y . Это сила F_2 , которая поворачивает брус вокруг сечения В против хода часовой стрелки, поэтому берем её со знаком «-»: $Q_Y = -F_2 = -6 \text{ кН}$.

Сила $Q_X = 0$, так как силы, параллельные оси X , на стержень не действуют.

4. Крутящий момент M_Z будет создавать только пара сил m . Если смотреть на сечение В со стороны оси Z , то направление пары сил m будет совпадать с направлением хода часовой стрелки, поэтому записываем знак «+»: $M_Z = m = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Изгибающий момент M_X будет возникать только от действия силы F_2 . Т.к. сила растягивает нижние волокна, берем знак «+»

$$M_X = F_2(a + b) = 6 \cdot 4 = 24 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Силы, создающие момент относительно оси Y , на брус не действуют, поэтому $M_Y = 0$.

Ответ: $Q_X = 0$, $Q_Y = -6 \text{ кН}$, $N = -3 \text{ кН}$, $M_X = 24 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_Y = 0$,
 $M_Z = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

4.5. Эпюры внутренних усилий

Из всех рассмотренных выше примеров следует, что значение внутренних усилий меняется при переходе от одного сечения к другому. При расчете стержня на прочность необходимо будет определить наибольшее значение внутренних усилий. Сечения стержня, в которых внутренние усилия достигают наибольших значений, называются **опасными**. Определить положения опасных сечений проще всего, построив графики распределения внутренних усилий вдоль оси стержня. Такие графики называются **эпюрами**.

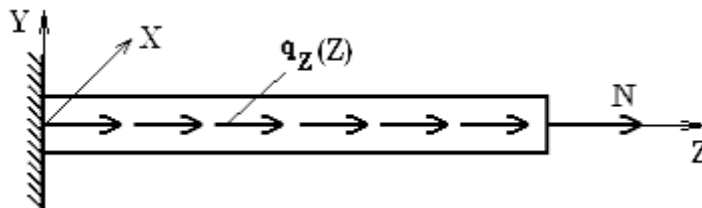
Существуют два метода построения эпюр – аналитический метод и метод характерных сечений.

Сущность **аналитического метода** заключается в том, что для установления закона изменения внутренних усилий по длине бруса составляют их аналитические выражения в виде функций от положения сечения, т.е. его z координаты. После того как составлены выражения, координатам z дают последовательно конкретные значения, мысленно перемещая сечение, и вычисляют соответствующие значения (ординаты) внутренних усилий, откладывая их в принятом масштабе. Таким образом, **эпюры представляют собой графики изменения функций внутренних усилий вдоль длины стержня**.

Аналитический метод построения эпюр подробно рассмотрен во всех учебниках по сопротивлению материалов, поэтому в этом пособии будет рассмотрен только второй метод – **метод характерных сечений**. Этот метод позволяет максимально сократить и упростить процесс построения эпюр.

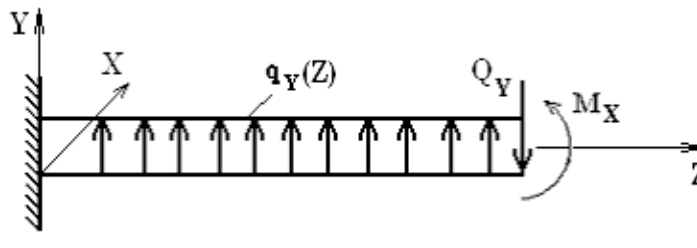
4.6. Дифференциальные зависимости между внешними нагрузками и внутренними усилиями

Рассматривая условия равновесия элемента прямолинейного стержня можно установить, что между внутренними усилиями и интенсивностью внешних нагрузок существуют следующие дифференциальные зависимости.



$$\frac{dN}{dZ} = -q_Z(Z). \quad (4.1)$$

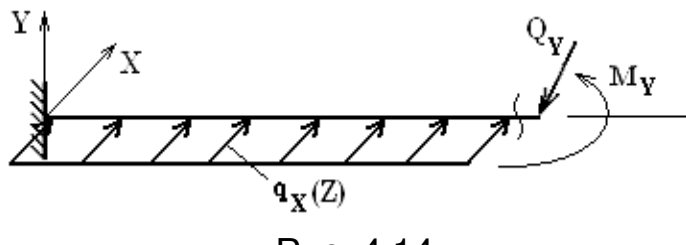
Рис. 4.12



$$\frac{dQ_Y}{dZ} = -q_Y(Z). \quad (4.2)$$

$$\frac{dM_X}{dZ} = -Q_Y(Z). \quad (4.3)$$

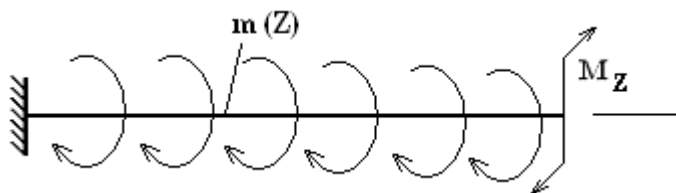
Рис. 4.13



$$\frac{dQ_X}{dZ} = -q_X(Z). \quad (4.4)$$

$$\frac{dM_Y}{dZ} = -Q_X(Z). \quad (4.5)$$

Рис. 4.14



$$\frac{dM_Z}{dZ} = -m(Z). \quad (4.6)$$

Рис. 4.15

Выражения (4.1) – (4.6) представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения. Запишем их решения, предполагая, что нагрузки q_Z, q_Y, q_X и m распределены равномерно, то есть $q_Z, q_Y, q_X, m = const$. Получим

$$N(Z) = -q_Z \cdot Z + C_1; \quad (4.7)$$

$$Q_Y(Z) = q_Y \cdot Z + C_2; \quad (4.8)$$

$$M_X(Z) = -q_Y \cdot Z^2 - C_2 \cdot Z + C_3; \quad (4.9)$$

$$Q_X(Z) = q_X \cdot Z + C_4; \quad (4.10)$$

$$M_Y(Z) = -q_X \cdot Z^2 - C_4 \cdot Z + C_5; \quad (4.11)$$

$$M_Z(Z) = -m \cdot Z + C_6, \quad (4.12)$$

здесь C_1, C_2, \dots, C_6 – постоянные интегрирования.

Анализ выражений позволяет сделать следующие выводы:

1. Если на участке стержня действует равномерно распределенная нагрузка: q_Z, q_Y, q_X или m , то внутренние усилия: N, Q_Y, Q_X или M_Z , соответственно, меняются на этих участках по закону прямой линии, а изгибающие моменты M_X и M_Y – по закону квадратной параболы.

2. Если на участке стержня распределенная нагрузка отсутствует, т.е. q_Z, q_Y, q_X или m равны нулю, то внутренние усилия: N, Q_Y, Q_X или M_Z на этих участках являются постоянной величиной, а изгибающие моменты M_X и M_Y меняются по линейному закону.

Значит, функции, описывающие характер изменения того или иного внутреннего усилия, можно установить по виду внешней нагрузки. Это обстоятельство положено в основу метода характерных сечений.

4.7. Виды деформаций стержня

В общем случае нагружения стержня в его сечении возникает шесть внутренних усилий – $N, Q_Y, Q_X, M_Z, M_X, M_Y$. Однако в реальных условиях встречаются случаи нагружения, когда некоторые внутренние усилия оказываются равными нулю. Такие виды деформации называются **простыми**.

Назовем некоторые из них:

1) Все внешние силы лежат на продольной оси стержня (рис. 4.12), здесь только $N \neq 0$, а все остальные внутренние усилия равны

нулю. Такой вид деформации называется **осевым растяжением-сжатием**.

- 2) Все внешние силы действуют перпендикулярно оси стержня: только в вертикальной плоскости (рис. 4.13) или только в горизонтальной плоскости (рис. 4.14). В этом случае отличны от нуля только Q_Y , M_X или только Q_X , M_Y ; остальные внутренние усилия равны нулю. Этот вид деформации называется **плоским изгибом**.
- 3) Все внешние силы создают пары сил относительно оси Z (рис. 4.15), т.е. только $M_Z \neq 0$, остальные внутренние усилия отсутствуют. Вид деформации называется **кручением**.

Таким образом, по виду внешнего нагружения стержня можно определить вид деформации стержня и, следовательно, выяснить, сколько и каких именно эпюр следует строить для рассматриваемого стержня.

4.8. Метод характерных сечений

Основываясь на выводах, сделанных в пунктах **4.7** и **4.8**, можно сформулировать план построения эпюры внутреннего усилия с помощью метода характерных сечений.

- 1) Определяем вид деформации стержня с тем, чтобы выяснить, эпюру каких именно внутренних усилий следует построить в данной задаче (см. **п. 4.8**).
- 2) Проводим ось, параллельную оси стержня, от которой будем откладывать полученные значения внутреннего усилия.
- 3) Разбиваем стержень на участки, в пределах которых внешняя нагрузка не изменяется; они называются **участками нагружения**.
- 4) Вычисляем внутреннее усилие в начале и конце каждого участка (см. **п. 4.5**) и откладываем полученные значения от оси.
- 5) Соединяем отложенные от оси значения внутреннего усилия соответствующими линиями (см. **п. 4.7**).
- 6) На полученной таким образом эпюре ставим знак, штрихуем её (*штриховка всегда идет перпендикулярно оси*) и обозначаем.

7) Проверяем эпюру. Проверка состоит из двух этапов:

а. **по дифференциальным зависимостям**: еще раз проверяем, соответствует ли полученный график закономерностям, изложенным в п. 4.7.

б. **по скачкам**: в тех сечениях, где приложены внешние сосредоточенные силы, на эпюрах соответствующих внутренних сил $N(Q_Y, Q_X)$ должны быть скачки (ступеньки) на величину внешней силы. В сечениях, где приложены внешние сосредоточенные моменты, на эпюрах соответствующих моментов $M_Z(M_X, M_Y)$ появляются скачки на величину приложенного внешнего момента.

Для проверки эпюр удобно воспользоваться схемой 1 (см. стр. 111).

Такова общая схема построения эпюры любого внутреннего усилия с помощью метода характерных сечений. Отдельные особенности, касающиеся эпюр конкретных внутренних усилий, будут рассмотрены ниже при решении задач.

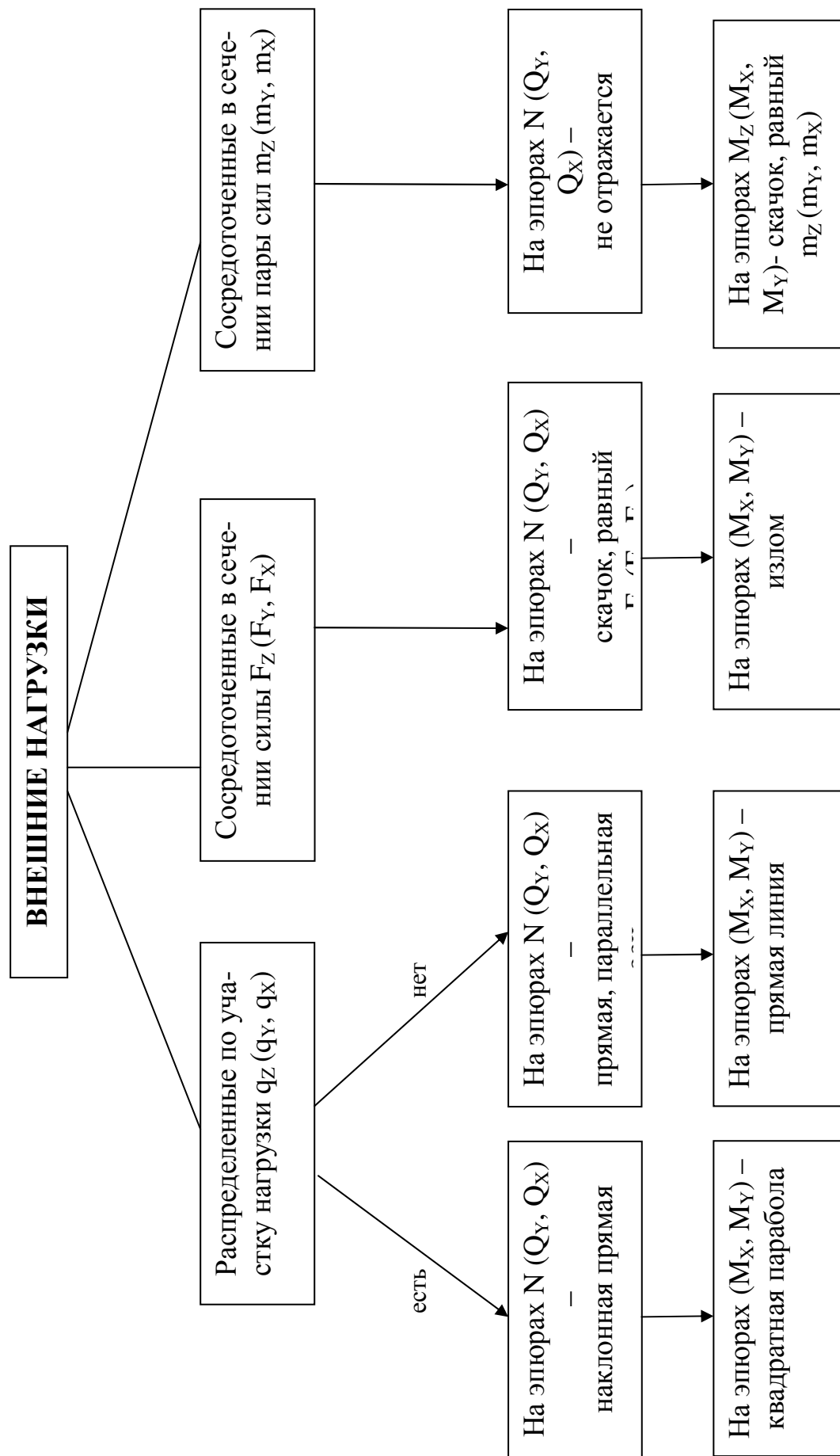


Схема 1

4.9. Примеры построения эпюр внутренних усилий

Пример 1. Построить эпюру внутренних усилий в жестко заделанном стержне, на который действуют силы $F_1 = 6 \text{ кН}$, $F_2 = 10 \text{ кН}$ (рис. 4.16, а).

Дано: $F_1 = 6 \text{ кН}$, $F_2 = 10 \text{ кН}$.

Определить: внутренние усилия и построить их эпюры.

Решение: 1. Определяем вид деформации стержня. Все силы лежат на оси стержня, значит, имеем осевое растяжение-сжатие, будем строить эпюру продольных сил N .

2. Проводим ось, параллельную оси стержня (рис.4.16, б).

3. Разбиваем стержень на два участка. В качестве участка нагружения будем понимать часть стержня между двумя ближайшими точками приложения сил. Отметим, что изменение площади поперечного сечения не влияет на определение границ участков (рис.4.16, в).

4. Делаем сечения в начале и конце первого участка нагружения и определяем N (см. п. 4.5). В сечении 1 (рис. 4.16, б) $\Rightarrow N_1 = F_1 = 6 \text{ кН}$; в сечении 2 (рис. 4.16, в) $\Rightarrow N_2 = F_1 = 6 \text{ кН}$. Знак определяем по правилу, изложенному в п. 4.5: $N_1, N_2 > 0$, так как сила F_1 растягивает продольные волокна. Откладываем значения N_1, N_2 , например, выше оси (строгое правило для продольной силы не существует), и соединяем прямой линией. Внутри ставим в кружочке знак «+» (рис. 4.16, в). Переходим ко второму участку. В сечении 3 (рис. 4.16, г) определяем $N_3 = F_1 - F_2 = 6 - 10 = -4 \text{ кН}$; в сечении 4 (рис. 4.16, д) – $N_4 = F_1 - F_2 = = 6 - 10 = -4 \text{ кН}$. Поскольку $N_3, N_4 < 0$, откладываем полученные значения ниже оси и внутри эпюры ставим в кружочке знак «-». Числовые значения $N_1 \div N_4$ обязательно проставляем на эпюре (рис. 4.16, е).

5. Эпюру штрихуем и обозначаем.

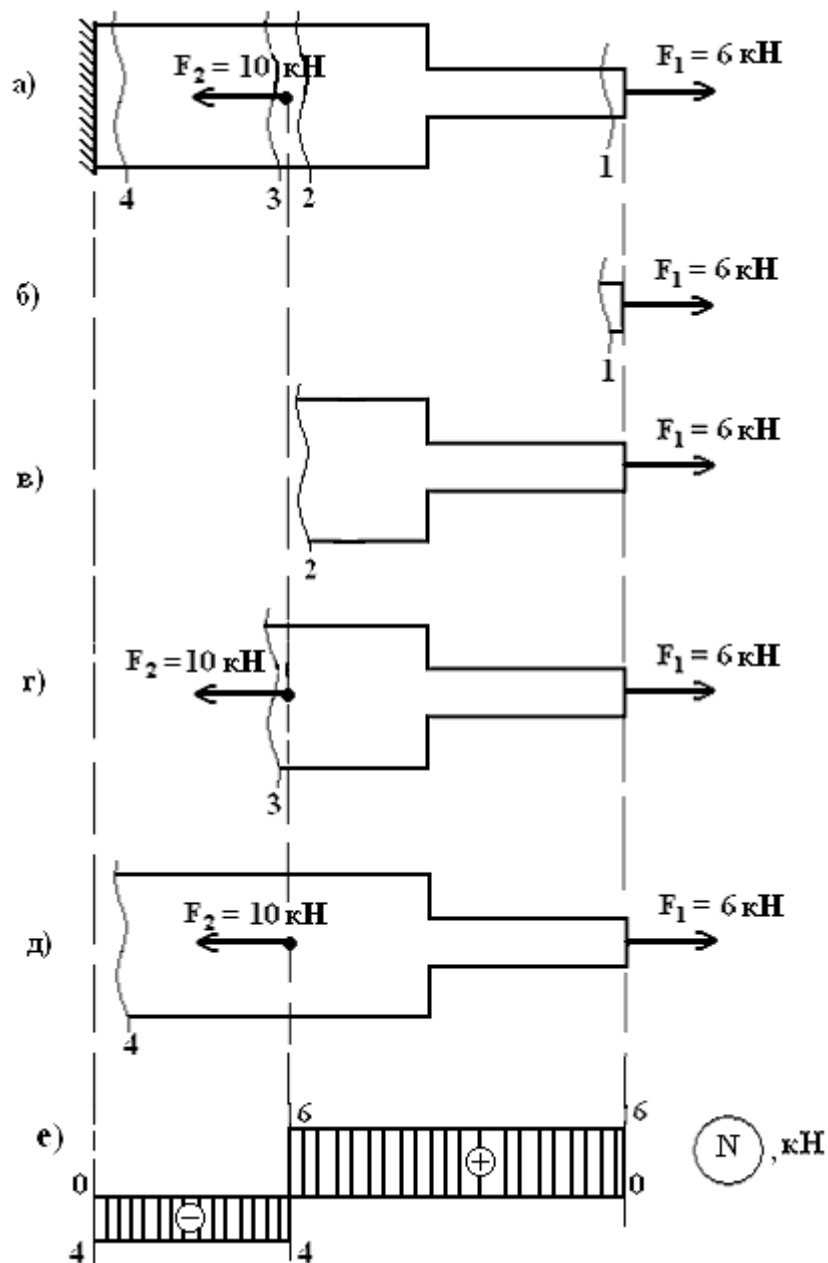


Рис. 4.16

6. Эпюру проверяем. Так как к стержню не приложены распределенные нагрузки, на эпюре не образуются наклонные прямые. В сечении 1 приложена сила $F_1 = 6 \text{ кН}$, \Rightarrow на эпюре в этом сечении скачок равный 6. На границе первого и второго участков приложена сила $F_2 = 10 \text{ кН}$, следовательно, на эпюре имеем скачок на величину $6 + 4 = 10$. Скачок равный 4 в сечении 4 соответствует реакции в заделке, которую мы заранее не определяли.

Ответ: Эпюра построена верно.

Пример 2. Построить эпюру внутренних усилий в жестко заделанном стержне длиной $\ell = 2 \text{ м}$, на который действует распределённая нагрузка интенсивностью $q = 6 \text{ кН/м}$ (рис. 4.17, а).

Дано: $\ell = 2 \text{ м}$, $q = 6 \text{ кН/м}$.

Определить: внутренние усилия и построить их эпюры.

Решение: 1. Вид деформации – осевое растяжение-сжатие, строим эпюру продольного усилия N .

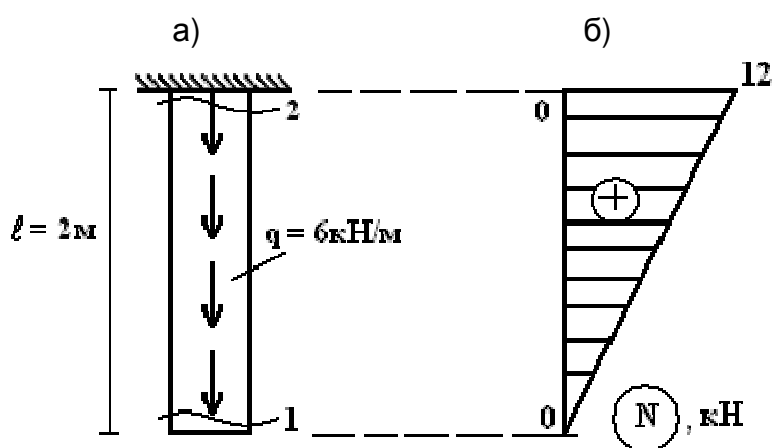


Рис. 4.17

2. Проводим вертикальную ось, параллельную оси стержня (рис. 4.17, б).

3. Имеем один участок загрузки.

4. Делаем сечение в начале и конце участка. В целях упрощения решения задачи оставшиеся после отбрасывания жесткой заделки части стержня, как на рис. 4.16, изображать не станем. Будем эту процедуру проделывать мысленно. Для наглядности можно просто закрывать отброшенную часть стержня листом бумаги. Имеем $N_1 = 0$, $N_2 = q \cdot \ell = 6 \cdot 2 = 12 \text{ кН}$.

5. Откладываем N_1, N_2 от оси, например, вправо, и соединяем прямой линией (рис. 4.17, б).

6. Ставим знак, штрихуем и обозначаем эпюру.

7. Проверка эпюры: так как на стержень действует равномерно распределенная нагрузка, на графике должна быть наклонная прямая.

Сосредоточенных сил нет, поэтому нет и скачков (скачок в заделке соответствует реакции в заделке).

Ответ: Эпюра построена верно.

Пример 3. Построить эпюру внутренних усилий в жестко заделанном стержне длиной $\ell = 3 \text{ м}$, на который действуют сосредоточенная сила $F = 8 \text{ кН}$ и распределённая, интенсивностью $q = 10 \text{ кН/м}$ (рис. 4.18, а).

Дано: $\ell = 3 \text{ м}$, $F = 8 \text{ кН}$, $q = 10 \text{ кН/м}$.

Определить: внутренние усилия и построить их эпюры.

Решение: 1. Вид деформации – осевое растяжение-сжатие, строим эпюру продольного усилия N .

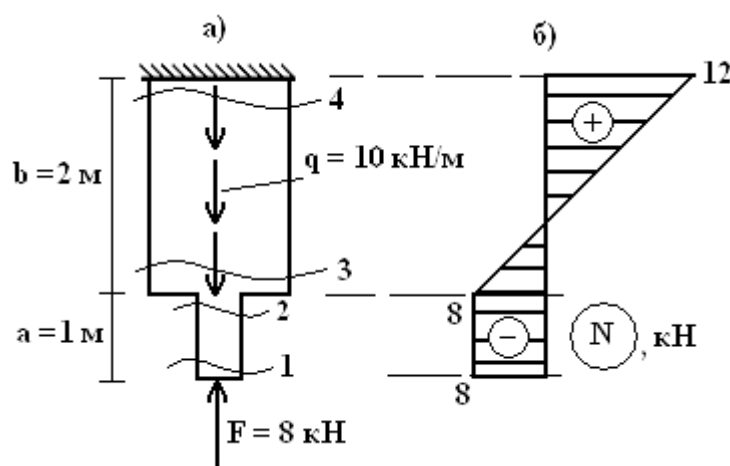


Рис. 4.18

2. Проводим вертикальную ось (рис. 4.18, б).

3. Делим на участки загрузки – в данном примере будет два участка.

4. Делаем сечения на первом участке и определяем:

$$N_1 = -F = -8 \text{ кН},$$

$$N_2 = -F = -8 \text{ кН}.$$

Откладываем значения, например, влево от оси, соединяем прямой линией. Делаем сечение на втором участке. Вычисляем $N_3 = -F + q \cdot 0 = -8 \text{ кН}$ и $N_4 = -F + q \cdot b = -8 + 10 \cdot 2 = 12 \text{ кН}$. Значение $N_3 < 0$, откладываем его влево от оси, $N_4 > 0$ – вправо и соединяем прямой.

5. Ставим знаки, штрихуем и обозначаем эпюру (рис. 4.18, б).

6. Проверка эпюры: на первом участке нет распределенной нагрузки – на эпюре прямая, параллельная оси; на втором участке распреде-

лена нагрузка – на эпюре наклонная прямая. В сечении 1 приложена сосредоточенная сила $F = 8 \text{ кН}$, \Rightarrow на эпюре скачок, равный 8.

Ответ: Эпюра построена верно.

Пример 4. Построить эпюру внутренних усилий в жестко заделанном стержне длиной $\ell = (a + b + c) \text{ м}$, на который действуют 3 пары сил с моментами $M_1 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_2 = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ и $M_3 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (рис. 4.19, а).

Дано: $\ell = (a + b + c) \text{ м}$, $M_1 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_2 = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ и $M_3 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Определить: внутренние усилия и построить их эпюры.

Решение: 1. Вид деформации – кручение. Следует построить эпюру крутящего момента M_Z .

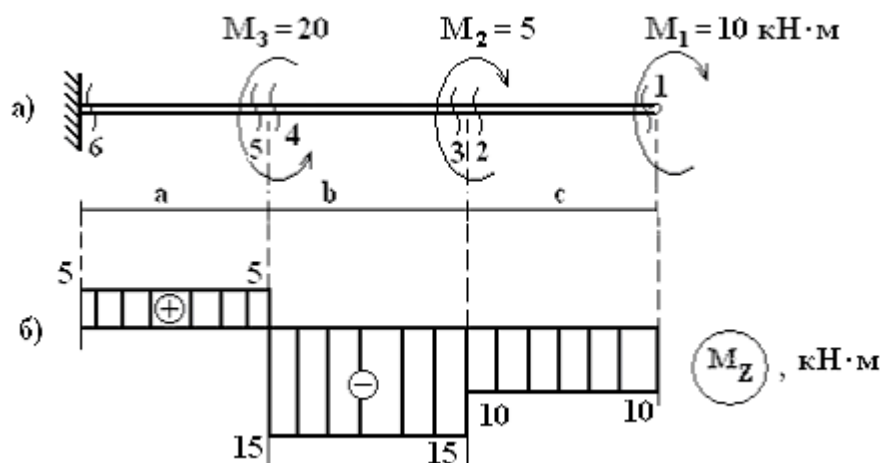


Рис. 4.19

2. Проводим ось (рис. 4.19, б).

3. Стержень имеет три участка закружения. Делаем сечения в начале и конце каждого участка, отбрасываем жесткую заделку и определяем M_Z , используя правило знаков, изложенное в п. 4.5. Полученные положительные значения откладываем, например, вверх, отрицательные – вниз и соединяем прямой линией (рис. 4.19, б):

$$M_Z^{(1)} = -M_1 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_Z^{(2)} = -10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_Z^{(3)} = -M_1 - M_2 = -10 - 5 = -15 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_Z^{(4)} = -15 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_Z^{(5)} = -M_1 - M_2 + M_3 = -15 + 20 = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_Z^{(6)} = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4. Ставим знак, эюру штрихуем и обозначаем.

5. Проверка эюры: к стержню не приложены распределенные нагрузки, поэтому на эюре нет наклонных прямых. В сечении 1 приложена пара сил $M_1 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$, \Rightarrow на эюре имеем скачок, равный 10; на границе первого и второго участка приложена пара сил $M_2 = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$, \Rightarrow на эюре скачок $15 - 10 = 5$; на границе второго и третьего участка приложена пара сил $M_3 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$, \Rightarrow на эюре получился скачок $15 + 5 = 20$.

Ответ: Эюра построена верно.

Пример 5. Построить эюру внутренних усилий в жестко заделанном стержне длиной $\ell = 2 \text{ м}$, на который действует сила $F = 6 \text{ кН}$ (рис. 4.20, а).

Дано: $\ell = 2 \text{ м}$, $F = 6 \text{ кН}$.

Определить: внутренние усилия и построить их эюры.

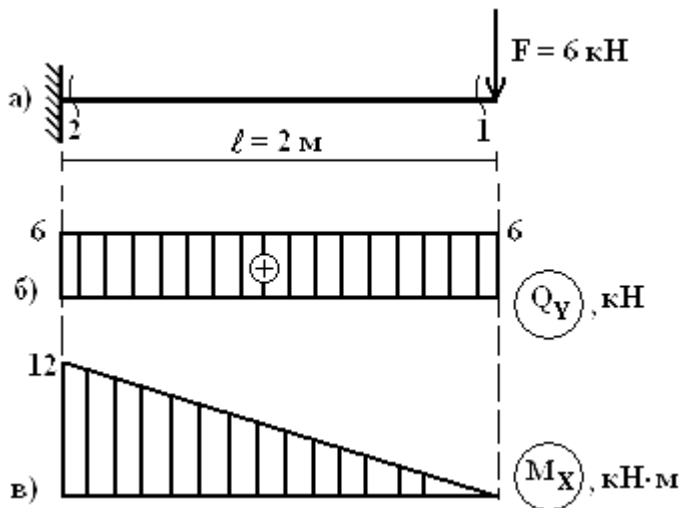


Рис. 4.20

Решение: 1. Вид деформации – плоский изгиб (см. п. 4.8). Будем строить две эюры: поперечных сил Q_Y и изгибающего момента M_X .

2. Проведем две оси, параллельные оси балки, одну для эюры Q_Y (рис.4.20. б), вторую для эюры M_X (рис. 4.20, в).

3. Балка имеет один участок загрузкиения. Строим эюру Q_Y . Для чего делаем сечение 1, отбрасываем жесткую заделку. Учитывая правило знаков из п. 4.5, находим $Q_Y^{(1)} = F = 6 \text{ кН}$. В сечении 2 полу-

чаем $Q_Y^{(2)} = F = 6 \text{ кН}$. Силы $Q_Y^{(1)}, Q_Y^{(2)} > 0$, так как сила F поворачивает оставшуюся часть балки вокруг сечения по часовой стрелке (рис. 4.21, а).

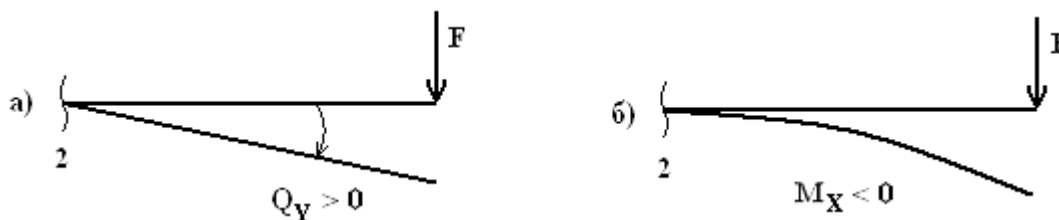


Рис. 4.21

Положительные значения поперечной силы откладываются всегда выше оси. Соединим эти значения прямой линией, поставим знак, эпюру заштрихуем и обозначим (рис. 4.20, б).

4. Строим эпюру M_X . Сделав сечение и отбросив часть с жесткой заделкой, сосчитаем момент от силы F относительно сделанного сечения: $M_X^{(1)} = F \cdot 0 = 0$, $M_X^{(2)} = -F \cdot \ell = -12 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Для эпюры изгибающих моментов принимается следующее правило: значения моментов откладываются от оси в сторону **растянутого волокна**. Из рис. 4.21, б следует, что сила F растягивает верхние волокна, поэтому полученное значение M_X откладываем выше оси. Соединяем отложенные значения прямой линией. Знак на эпюре изгибающих моментов **можно не ставить**. Эпюру штрихуем и обозначаем (рис. 4.20, в).

5. Проверка эпюр. К балке не приложена распределенная нагрузка, следовательно, на графиках Q_Y и M_X имеем прямые линии, причем на эпюре Q_Y это прямая, параллельная оси. На свободном конце балки приложена сосредоточенная сила $F = 6 \text{ кН}$, \Rightarrow в этом сечении на эпюре Q_Y образовался скачок, равный 6.

Ответ: Эпюра построена верно.

Пример 6. Построить эпюру внутренних усилий жестко заделанной балки длиной $\ell = 3 \text{ м}$, на которую действуют сосредоточенная сила

$F = 8 \text{ кН}$ и распределённая, интенсивностью $q = 2 \text{ кН/м}$ (рис. 4.22, а).

Дано: $\ell = 3 \text{ м}$, $F = 8 \text{ кН}$, $q = 2 \text{ кН/м}$.

Определить: внутренние усилия и построить их эпюры.

Решение: 1. Вид деформации – плоский изгиб, строим эпюры Q_Y и M_X .

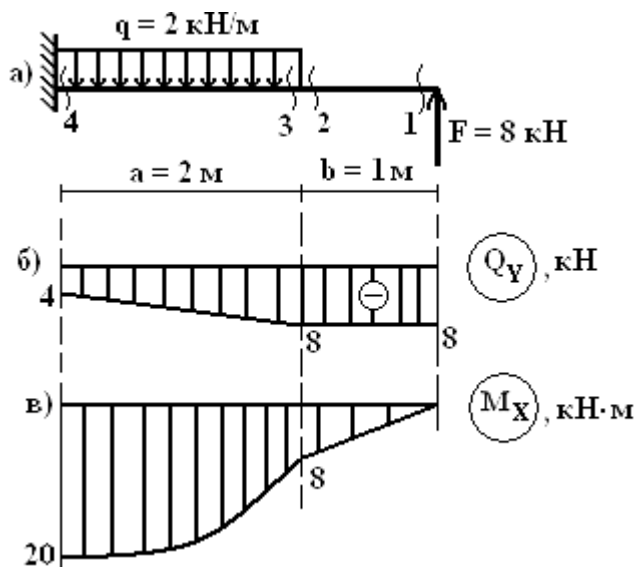


Рис. 4.22

2. Проводим оси для построения эпюр (рис. 4.22, б и в).

3. Делим балку на два участка загрузки.

4. Строим эпюру Q_Y .

1-й участок.

$$Q_Y^{(1)} = -F = -8 \text{ кН};$$

$$Q_Y^{(2)} = -F = -8 \text{ кН}.$$

Откладываем значения ниже оси, соединяем прямой линией (рис. 4.22, б).

2-й участок.

$$Q_Y^{(3)} = -F + q \cdot 0 = -8 \text{ кН}; \quad Q_Y^{(4)} = -F + q \cdot a = -8 + 2 \cdot 2 = -4 \text{ кН}.$$

Значения $Q_Y^{(3)}$, $Q_Y^{(4)}$ откладываем ниже оси, соединяем прямой линией. Ставим знаки, эпюру штрихуем и обозначаем (рис. 4.22, б).

5. Строим эпюру M_X .

1-й участок. $M_X^{(1)} = F \cdot 0 = 0$; $M_X^{(2)} = F \cdot b = 8 \cdot 1 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Откладываем значение $M_X^{(2)}$ ниже оси, так как сила F растягивает нижние волокна, соединяем прямой линией (рис. 4.22, в).

2-й участок. $M_X^{(3)} = F \cdot b - q \cdot 0 = 8 \cdot 1 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$;

$$M_X^{(4)} = F \cdot (a + b) - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 8 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Значения $M_X^{(3)}$, $M_X^{(4)}$ откладываем ниже оси и соединяем параболой. При этом выпуклость параболы должна быть обращена в сторону действия распределенной нагрузки. Это правило называют «**правилом паруса**». Роль паруса здесь играет эюра, а роль ветра – нагрузка (рис. 4.22, в).

6. Проверка эюр. На участке балки с распределенной нагрузкой получаем на эюре Q_Y наклонную прямую, на эюре M_X – параболу. В сечении с приложенной сосредоточенной силой $F = 8 \text{ кН}$ на эюре Q_Y образовался скачек равный 8.

Ответ: Эюра построена верно.

Пример 7. Построить эюру внутренних усилий в жестко заделанном стержне длиной $\ell = 3 \text{ м}$, на который действуют сосредоточенная сила $F = 8 \text{ кН}$ и распределённая, интенсивностью $q = 10 \text{ кН/м}$ (рис. 4.23, а).

Дано: $\ell = 3 \text{ м}$, $F = 8 \text{ кН}$, $q = 10 \text{ кН/м}$.

Определить: внутренние усилия и построить их эюры.

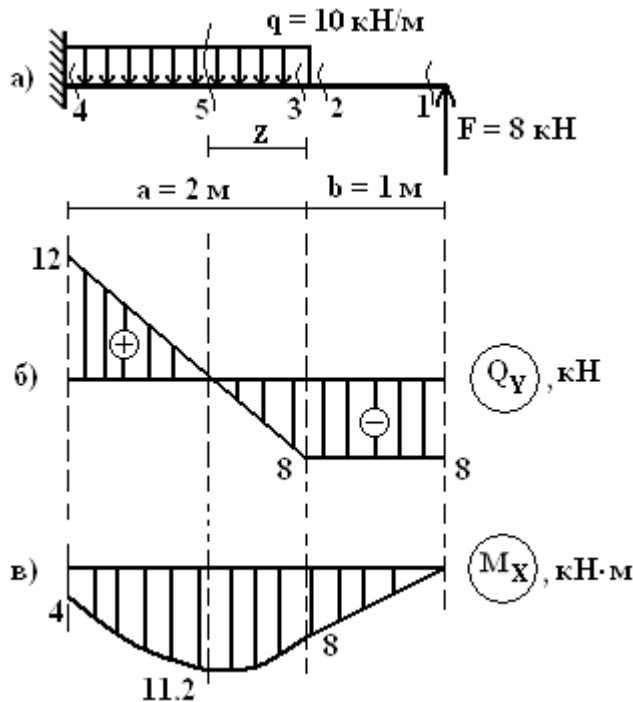


Рис. 4.23

Решение: 1 – 3. Первые три пункта – как в предыдущем примере: вид деформации – плоский изгиб; проводим оси для построения эюр; делим балку на два участка загрузки (рис. 4.23, б и в).

4. Строим эюру Q_Y :

1-й участок.

$$Q_Y^{(1)} = -F = -8 \text{ кН};$$

$$Q_Y^{(2)} = -F = -8 \text{ кН}.$$

Откладываем значения ниже оси, соединяем прямой линией (рис. 4.23, б).

2-й участок. $Q_Y^{(3)} = -F + q \cdot 0 = -8 \text{ кН}$; $Q_Y^{(4)} = -F + q \cdot a = -8 + 10 \cdot 2 = 12 \text{ кН}$. $Q_Y^{(3)} < 0$ откладываем ниже оси, а $Q_Y^{(4)} > 0$ – выше оси, соединяем прямой линией (рис. 4.23, б).

5. Строим эпюру M_X .

1-й участок. $M_X^{(1)} = F \cdot 0 = 0$; $M_X^{(2)} = F \cdot b = 8 \cdot 1 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Откладываем $M_X^{(2)}$ ниже оси, соединяем с нулем прямой линией (рис. 4.23, в).

2-й участок. Из рис. 4.23, б следует, что эпюра поперечных сил Q_Y на этом участке пересекает ось, то есть в некотором сечении 5 сила $Q_Y^{(5)} = 0$. Из дифференциальных зависимостей (4.2) и (4.3) следует, что в сечении 5 изгибающий момент M_X достигает экстремального значения (максимума или минимума). Таким образом, на этом участке следует просчитать момент в трех точках: сечения 3, 4 и 5, где 5 – экстремальное.

$$M_X^{(3)} = F \cdot b = 8 \cdot 1 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_X^{(4)} = F \cdot (a + b) - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 8 \cdot 3 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для вычисления экстремального значения момента выясним сначала, на каком расстоянии Z от правой границы участка находится сечение 5, в котором поперечная сила равна нулю:

$$Q_Y^{(5)} = F - q \cdot Z = 8 - 10 \cdot Z = 0; \Rightarrow Z = 0.8 \text{ м}.$$

Затем, найдем значение момента в этой точке:

$$M_X^{(5)} = M_X^{\text{экс}} = F(b + Z) - qZ \frac{Z}{2} = 8 \cdot (1 + 0.8) - 10 \cdot 0.8 \cdot 0.4 = 11.2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Откладываем значения $M_X^{(3)}$, $M_X^{(4)}$, $M_X^{(5)}$ ниже оси и соединяем параболой по правилу «паруса», т.е. выпуклостью вниз (рис. 4.23, в).

6. Проверка эпюр. Все линии на эпюрах соответствуют приложенным нагрузкам, и силе $F = 8 \text{ кН}$ соответствует скачок, равный 8 на эпюре Q_Y .

Ответ: Эпюра построена верно.

Пример 8. Построить эпюры внутренних усилий расположенного на двух опорах стержня длиной $\ell = 5 \text{ м}$, на который действуют пара сил с моментом $M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$, сосредоточенная сила $F = 15 \text{ кН}$ и распределённая, интенсивностью $q = 10 \text{ кН/м}$. (рис. 4.24, а).

Дано: $\ell = 5 \text{ м}$, $M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $F = 15 \text{ кН}$, $q = 10 \text{ кН/м}$.

Определить: внутренние усилия и построить их эпюры.

Решение: 1. Вид деформации – плоский изгиб.

2. Расчет балки с шарнирным закреплением следует начинать с определения реакций связей. Расставим эти реакции. В шарнирно-подвижной опоре А

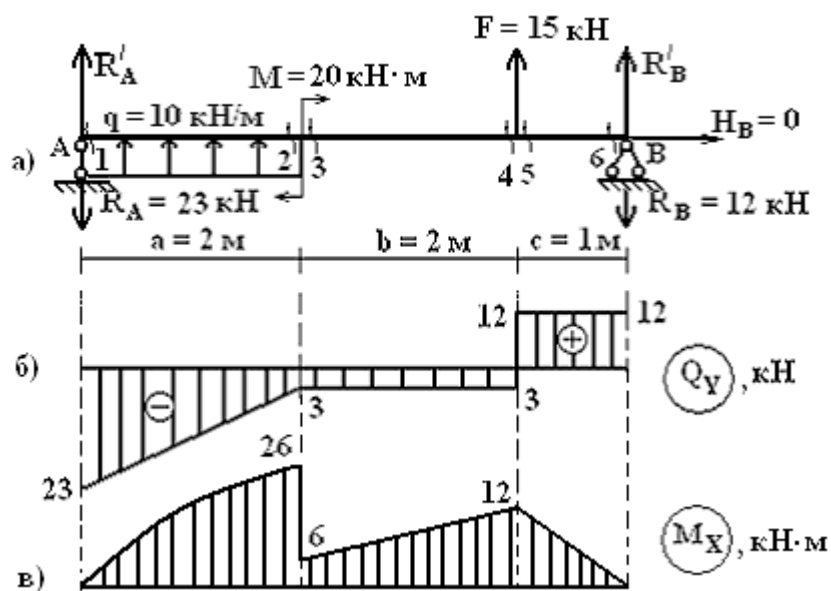


Рис. 4.24

возникает одна вертикальная реакция R'_A . В шарнирно-неподвижной опоре В, вообще говоря, возникает две реакции: вертикальная R'_B и горизонтальная H_B , однако, поскольку в случае

вертикального плоского изгиба все силы действуют перпендикулярно оси балки, горизонтальная реакция H_B всегда будет равна нулю, поэтому в дальнейшем показывать ее на схеме балки не будем. Вертикальные реакции найдем из уравнений статики:

$$\sum \text{mom}_A = 0; \Rightarrow -q \cdot a \cdot 0.5 \cdot a + M - F(a+b) - R'_B(a+b+c) = 0,$$

$$-10 \cdot 2 \cdot 1 + 20 - 15 \cdot 4 - R'_B \cdot 5 = 0, \Rightarrow R'_B = -12 \text{ кН}.$$

$$\sum \text{mom}_B = 0; \Rightarrow$$

$$R'_A(a+b+c) + q \cdot a \cdot (0.5 \cdot a + b + c) + M + F \cdot c = 0,$$

$$R'_A \cdot 5 + 10 \cdot 2 \cdot 4 + 20 + 15 \cdot 1 = 0, \Rightarrow R'_A = -23 \text{ кН}.$$

При записи уравнений использовалось следующее правило знаков: если сила поворачивает балку вокруг точки А (или точки В) по часовой стрелке, то момент от этой силы берется со знаком «+». Для проверки найденных реакций используем уравнение статики: $\sum F_{KY} = 0$ (сумма всех вертикальных сил должна быть равна нулю). При этом силы, изображенные на схеме балки направленными вверх, берем со знаком «+».

$$\sum F_{KY} = R'_A - q \cdot a + F + R'_B = 0.$$

Подставим сюда найденные значения реакций со своими знаками:

$$-23 + 10 \cdot 2 + 15 - 12 = 0;$$

$$35 - 35 = 0;$$

$$0 = 0.$$

Поскольку направления вертикальных реакций поначалу были взяты произвольно, то полученные в результате знаки «-» у реакций R'_A и R'_B показывают, что мы не угадали направление реакций, в действительности они направлены вниз. Удобно изменить направление этих реакций на обратное и в дальнейшем считать эти реакции положительными R_A и R_B (рис. 4.24, а).

3. Проводим оси для построения эпюр (рис. 4.24, б и в).

4. Делим балку на три участка загрузки.

5. Все реакции в закреплениях балки найдены, поэтому, сделав сечение, можно отбрасывать любую (обычно более загруженную) часть балки.

6. Строим эпюру Q_Y .

1-й участок.

$$Q_Y^{(1)} = -R_A = -23 \text{ кН} \text{ (отбросили правую часть балки),}$$

$$Q_Y^{(2)} = R_B - F = 12 - 15 = -3 \text{ кН} \text{ (отбросили левую часть балки).}$$

Пару сил $M = 20 \text{ кН}$ при вычислении Q_Y не учитываем.

Откладываем значения от оси, соединяем точки прямой линией (рис. 4.24, б).

2-й участок. $Q_Y^{(3)} = R_B - F = 12 - 15 = -3 \text{ кН};$

$$Q_Y^{(4)} = R_B - F = 12 - 15 = -3 \text{ кН}.$$

3-й участок. $Q_Y^{(5)} = R_B = 12 \text{ кН};$ $Q_Y^{(6)} = R_B = 12 \text{ кН}.$

7. Строим эпюру M_X .

1-й участок: $M_X^{(1)} = R_A \cdot 0 = 23 \cdot 0 = 0;$

$$M_X^{(2)} = -R_B \cdot (b + c) + F \cdot b - M = -12 \cdot 3 + 15 \cdot 2 - 20 = -26 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Чтобы не ошибиться в знаке изгибающего момента, стоит помнить: сечение, в котором он определяется, следует представлять защемленным,

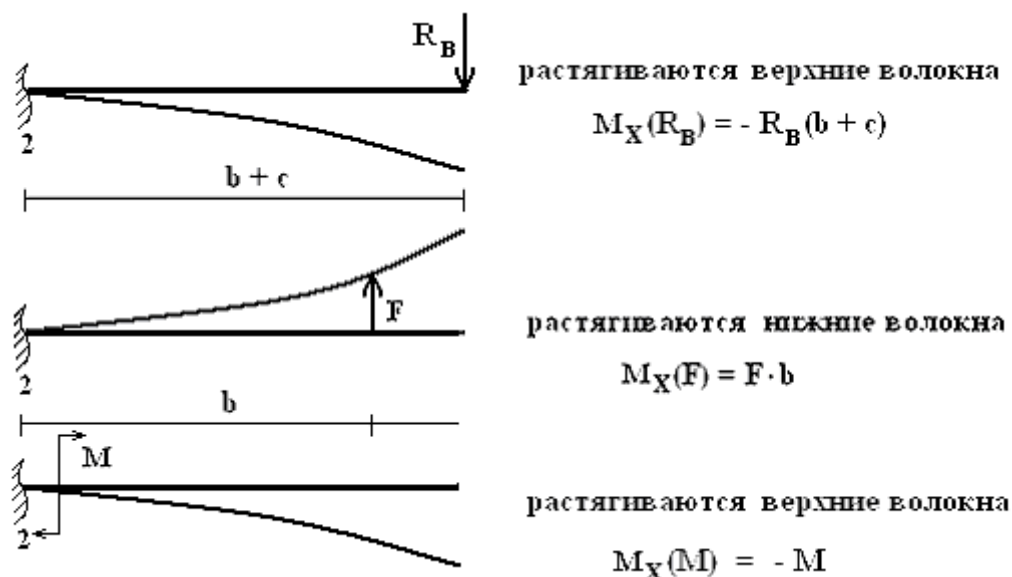


Рис. 4.25

а опоры – отброшенными (рис. 4.25).

Откладываем значения от оси и соединяем параболой по правилу «паруса», то есть направленной выпуклостью вверх (рис. 4.24, в).

2-й участок. $M_X^{(3)} = -R_B \cdot (b + c) + F \cdot b = -12 \cdot 3 + 15 \cdot 2 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м};$

$$M_X^{(4)} = -R_B \cdot c + F \cdot 0 = -12 \cdot 1 = -12 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Отмечаем значения выше оси, соединяем прямой линией (рис. 4.24, в).

3-й участок. $M_X^{(5)} = -R_B \cdot c = -12 \cdot 1 = -12 \text{ кН} \cdot \text{м};$
 $M_X^{(6)} = R_B \cdot 0 = 12 \cdot 0 = 0.$

Отложенные значения соединяем прямой линией (рис. 4.24, в).

8. Проверка эпюр. Все линии на эпюрах соответствуют действующим нагрузкам. К балке приложены три сосредоточенные силы: R_A , F , R_B . На эпюре Q_Y получили три скачка: на опоре А – равный $R_A = 23$, на границе 2-го и 3-го участков – равный $F = 3 + 12 = 15$, на опоре В – равный $R_B = 12$. К балке приложена пара сил $M = 20$. На эпюре M_X на границе 1-го и 2-го участков имеем скачок, равный $M = (26 - 6) = 20$.

Ответ: Эпюра построена верно.

Пример 9. Построить эпюру внутренних усилий расположенного на двух опорах стержня длиной $\ell = 5 \text{ м}$, на который действуют пара сил с моментом $M = 48 \text{ кН} \cdot \text{м}$, сила $F = 36 \text{ кН}$ и распределенная нагрузка с интенсивностью $q = 3 \text{ кН} / \text{м}$ (рис. 4.26, а).

Дано: $\ell = 5 \text{ м}$, $M = 48 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $F = 36 \text{ кН}$, $q = 3 \text{ кН} / \text{м}$.

Определить: внутренние усилия и построить их эпюры.

Решение: 1. Вид деформации – плоский изгиб.

2. Найдем реакции опор R_A и R_B :

$$\sum \text{mom}_A = 0; \Rightarrow q \cdot a \cdot 0.5 \cdot a + F \cdot a + M - R_B(a + b) = 0,$$

$$3 \cdot 4 \cdot 2 + 36 \cdot 4 + 48 - R_B \cdot 5 = 0, \Rightarrow R_B = 43.2 \text{ кН}.$$

$$\sum \text{mom}_B = 0; \Rightarrow R_A(a + b) - q \cdot a \cdot (0.5 \cdot a + b) - F \cdot b + M = 0,$$

$$R_A \cdot 5 - 3 \cdot 4 \cdot 3 - 36 \cdot 1 + 48 = 0, \Rightarrow R_A = 4.8 \text{ кН}.$$

Проверим полученный результат.

$$\sum F_{kY} = 0; \Rightarrow R_A - q \cdot a - F + R_B = 0,$$

$$4.8 - 3 \cdot 4 - 36 + 43.2 = 0,$$

$$48 - 48 = 0, \Rightarrow$$

$$0 = 0.$$

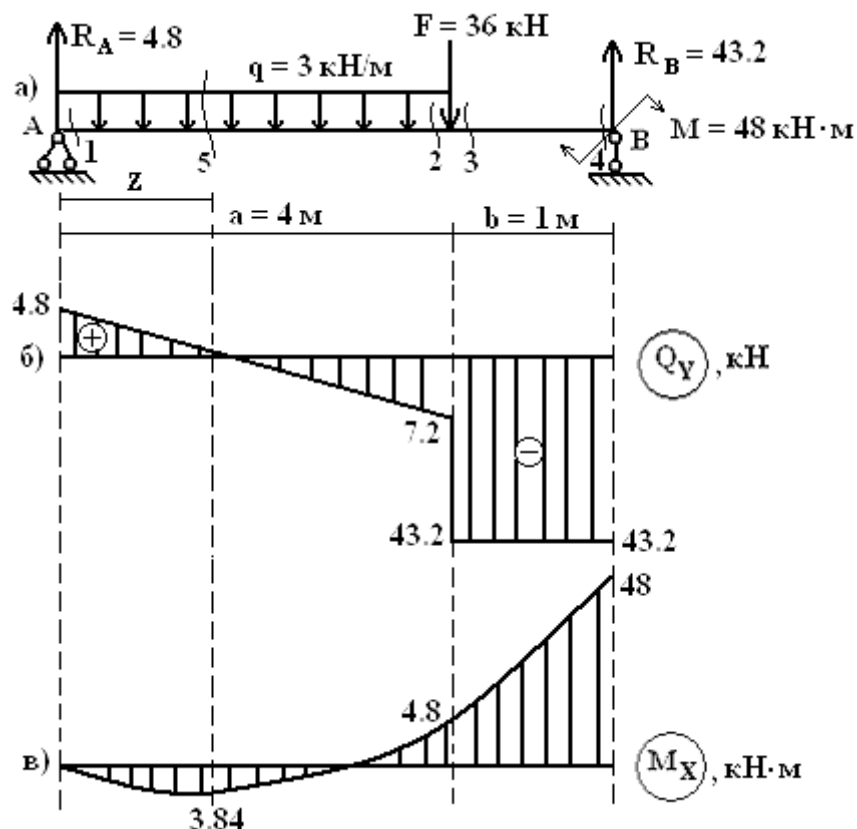


Рис. 4.26

Обе реакции получились положительными, то есть мы угадали их направление, они действительно направлены вверх. Подписываем их значения на рисунке (рис. 4.26, а).

3. Балка имеет два участка загрузки (рис. 4.26, б и в).

4. Строим эпюру Q_Y .

1-й участок. $Q_Y^{(1)} = R_A = 4.8$ кН;

$$Q_Y^{(2)} = R_A - q \cdot a = 4.8 - 3 \cdot 4 = -7.2 \text{ кН}.$$

2-й участок. $Q_Y^{(3)} = -R_B = -43.2$ кН; $Q_Y^{(4)} = -R_B = -43.2$ кН.

Откладываем значения от оси и соединяем прямыми (рис. 4.26, б).

5. Строим эпюру M_X .

1-й участок. Из эпюры сил следует, что на этом участке будет возникать экстремальный момент, поэтому будем определять M_X в трех сечениях 1, 2 и 5, где 5 – экстремальное.

$$M_X^{(1)} = R_A \cdot 0 = 0 \text{ (отбрасываем правую часть балки);}$$

$$M_X^{(2)} = R_B \cdot b - M = 43.2 \cdot 1 - 48 = -4.8 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (отбрасываем левую часть балки).}$$

Находим координату Z сечения 5

$$Q_Y^{(5)} = R_A - q \cdot Z = 4.8 - Z \cdot 3 = 0, \quad Z = 1.6 \text{ м},$$

и экстремальный момент в этом сечении

$$M_X^{\text{экт}} = M_X^{(5)} = R_A \cdot Z - q \cdot Z \cdot 0.5 \cdot Z = 4.8 \cdot 1.6 - 3 \cdot 1.6 \cdot 0.8 = 3.84 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Отмечаем полученные значения от оси и соединяем параболой по правилу «паруса», то есть выпуклостью вниз (рис. 4.26, в).

2-й участок. $M_X^{(3)} = R_B \cdot b - M = 43.2 \cdot 1 - 48 = -4.8 \text{ кН} \cdot \text{м};$

$$M_X^{(4)} = -M = -48 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Отложенные от оси значения соединяем прямой (рис. 4.26, в).

6. Проверка эпюр. Линии эпюры соответствуют приложенным нагрузкам. К балке приложены три сосредоточенные силы: R_A , F , R_B , и на эпюре Q_Y в соответствующих сечениях имеем скачки. На опоре B к балке приложена пара сил $M = 48 \text{ кН} \cdot \text{м}$ – на эпюре M_X на правом конце имеем скачок, равный 48.

Ответ: Эпюра построена верно.

4.10. Методические указания к заданию № 7. Построение эпюр внутренних усилий

1. Необходимо определить вид деформации для того, чтобы выяснить, эпюру каких именно внутренних усилий следует построить в данной задаче.
2. Изображаем ось, параллельную оси стержня, от которой будем откладывать полученные значения внутреннего усилия.
3. Разбиваем стержень на участки загрузки.
4. Вычисляем внутреннее усилие в начале и конце каждого участка и отмечаем полученные значения.
5. Соединяем отложенные от оси значения соответствующими линиями.

6. Проставляем знаки полученных значений, штрихуем и обозначаем эпюру. Штриховка всегда идет перпендикулярно оси!
7. Обязательно проверяем эпюру в два этапа:
 - а) проверка по дифференциальным зависимостям,
 - б) проверка по скачкам.

4.11. Варианты задания № 7

Для балок из задания № 2 (задачи 1 а и 1 б) построить эпюры внутренних усилий (Q_Y и M_X), исходные данные в таблицах 2.2 и 2.3. Студент выбирает один вариант, соответствующий его номеру в журнале преподавателя; в соответствии с цифрой шифра, которую указывает преподаватель.

5. Расчеты на прочность и жесткость при центральном растяжении-сжатии

Центральное (осевое) растяжение-сжатие – это такой вид напряженно-деформированного состояния, при котором все нагрузки (сосредоточенные и распределенные силы) лежат вдоль оси стержня, например, рис. 5.1, а.

При таком виде деформации стержня в нём возникает только одно внутреннее усилие – **продольная сила N** , обычно измеряемая в меганьютонах $[МН]$. Эпюра этого усилия изображена на рис. 5.1, б. Выбор знаков при построении производят по правилу знаков 1, стр. 105 (рис. 5.1, в).

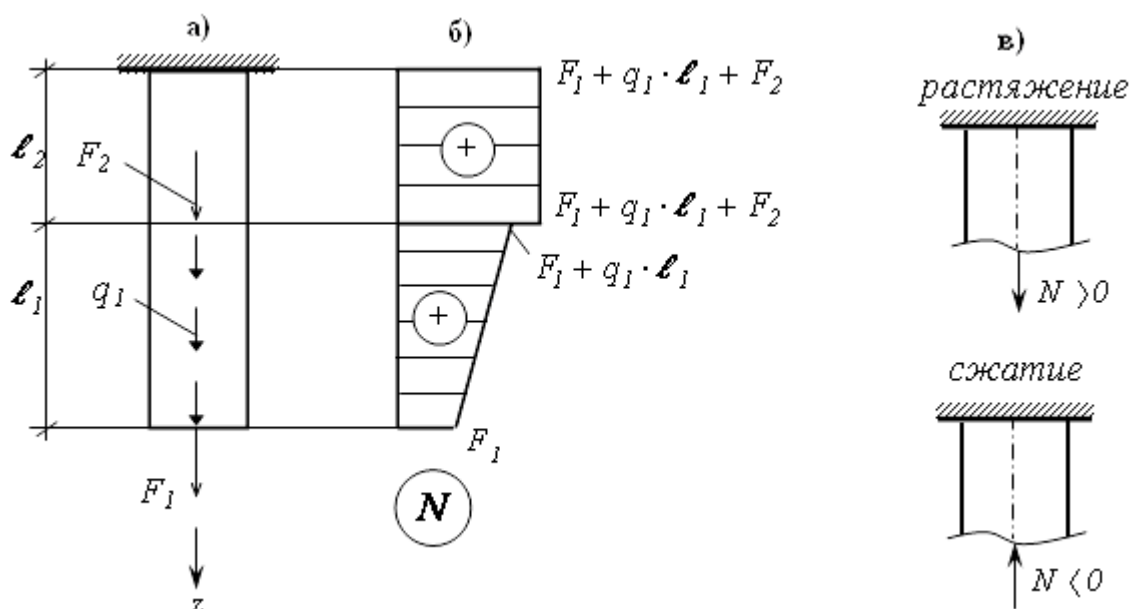


Рис. 5.1

5.1. Понятие о напряжениях

В зависимости от толщины стержня или от свойств материала стержень может выдержать бóльшую или меньшую нагрузку. Поэтому возникает вопрос, как учесть эти особенности работы стержня? Так как внутренние силы по сечению часто распределяются неравномерно, вводится характеристика их интенсивности P , равная величине внутренних сил, приходящихся на единицу площади ΔA (рис. 5.2).

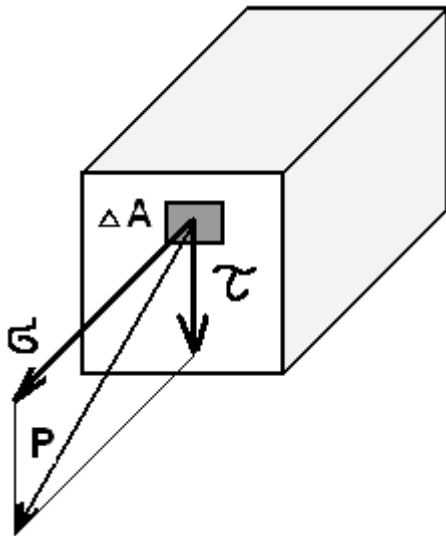


Рис. 5.2

Данная характеристика называется **напряжением в точке**. В сопроаме это ключевое понятие. Разделяют его на два вида напряжений: нормальное, σ «сигма», действующее по нормали к сечению, и касательные напряжения, τ «тау», которые скользят вдоль площадки, т.е. касаются её. Напряжения измеряют в мегапаскалях

$$\left[\text{МПа} \equiv \frac{\text{МН}}{\text{м}^2} \right].$$

5.2. Условие прочности при центральном растяжении-сжатии

При **центральном растяжении-сжатии** в поперечных сечениях стержней возникают только нормальные напряжения σ , которые определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (5.1)$$

Правило знаков для них совпадает с правилом знаков для продольных сил N : **сжимающие напряжения** принято считать отрицательными, **растягивающие** – положительными.

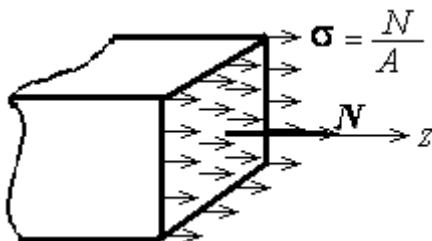


Рис. 5.3

Нормальные напряжения при центральном растяжении-сжатии распределены по площади поперечного сечения равномерно (рис. 5.3), поэтому при расчете стержня на прочность определяют лишь положение наиболее напряженного сечения. Такое сечение называют **опасным сечением**. Под **прочностью** понимают способность конструкции не разрушаться под действием нагрузок в течение достаточно длительного времени.

Под **прочностью** понимают способность конструкции не разрушаться под действием нагрузок в течение достаточно длительного времени.

Для определения опасного сечения строят эпюру продольных сил (см. п. 4.9) и эпюру нормальных напряжений, используя формулу (5.1). По эпюре нормальных напряжений определяют поперечное сечение стержня, в котором возникает наибольшее по абсолютной величине напряжение – это и будет опасное сечение.

Пример 1. Для жестко заделанного стержня (рис. 5.4, а) построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений вдоль оси стержня в долях силы F , определить опасное сечение.

Дано: $2F$, A , $2A$, $3A$.

Определить: опасное сечение.

Решение: Для определения опасного сечения сначала необходимо построить эпюру продольных сил (рис. 5.4, б), затем эпюру нормальных напряжений. Для чего по формуле (5.1) находим нормальные напряжения на участках, где меняется площадь сечения стержня:

$$\sigma_1 = \frac{2F}{A}, \quad \sigma_2 = \frac{2F}{2A} = \frac{F}{A}, \quad \sigma_3 = \frac{2F}{3A},$$

и изображаем эпюру нормальных напряжений (рис. 5.4, в). Порядок построения эпюр описан в п. 4.9.

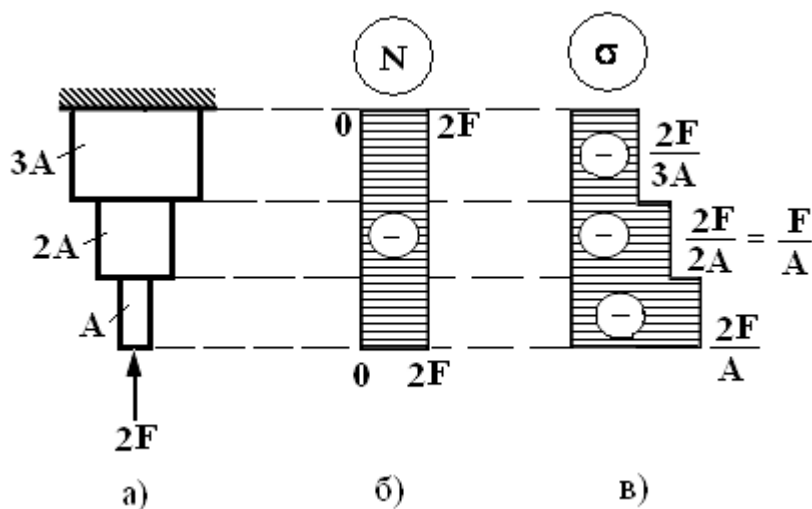


Рис. 5.4

По эпюре нормальных напряжений выбираем наибольшие по абсолютной величине напряжения: $\sigma_{\max} = \frac{2F}{A}$. Следовательно,

опасными сечениями в данной задаче являются все сечения стержня с площадью поперечного сечения A .

Условие прочности стержня при растяжении-сжатии для опасного сечения имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq R, \quad (5.2)$$

где σ_{\max} – **наибольшее рабочее напряжение**, возникающее в одной из точек опасного сечения и определяемое расчетом, R , [МПа] – расчетное сопротивление материала, устанавливаемое строительными нормами и правилами (СНиП). Для различных материалов ориентировочные значения расчетных сопротивлений обычно приводятся в справочниках, например, Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. Формула (5.2), в зависимости от цели поставленной задачи, позволяет выполнять расчеты двух видов: проектный – связанный с определением размеров поперечного сечения стержня, и проверочный. Для спроектированного стержня можно также определять его грузоподъемность, то есть подобрать нагрузку, которую способен выдержать стержень, не разрушаясь.

При любом виде деформации можно выполнять подобные виды расчетов на прочность, используя соответствующие им формулы определения напряжений.

Пример 2. Для деревянного ступенчатого стержня, изображенного на рис. 5.4, а, определить допускаемую нагрузку F из условия прочности, приняв расчетное сопротивление материала $R = 16$ МПа и $A = 11$ см².

Дано: $2F$, $R = 16$ МПа, $A = 11$ см².

Определить: F .

Решение: Используя результаты, полученные в предыдущем примере 1, запишем для данной задачи условие прочности

$\sigma_{\max} = \frac{2F}{A} \leq R$. Откуда вычислим грузоподъемность стержня:

$$F \leq \frac{R \cdot A}{2}, \text{ т.е.}$$

$$F \leq \frac{16 \text{ МПа} \cdot 11 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2}{2} = 88 \cdot 10^{-4} \text{ МН}.$$

Ответ: $F \leq 88 \cdot 10^{-4} \text{ МН}$.

5.3. Условие жесткости при центральном растяжении-сжатии

В некоторых случаях работоспособность элемента конструкции определяется не только его прочностью, но и жесткостью. Под **жесткостью** понимают способность конструкции не деформироваться под действием нагрузки.

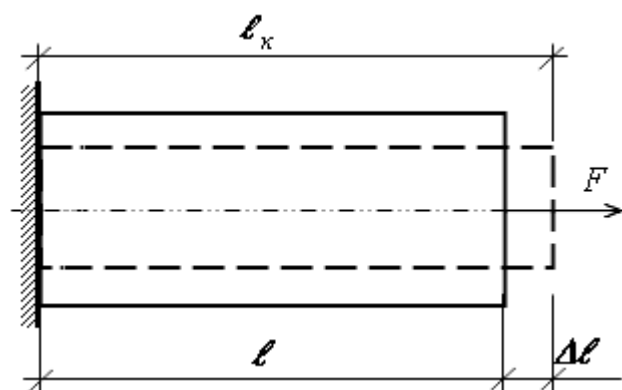


Рис.5.5

Рассмотрим стержень (рис. 5.5), защемленный одним концом и нагруженный растягивающей силой F , здесь l и l_k – длина стержня до и после приложения нагрузки, измеряемая в метрах. В результате действия нагрузки длина стержня увеличится на величину

$\Delta l = l_k - l$, которая называется **абсолютной продольной деформацией**, или **удлинением** стержня. **Относительная линейная деформация** является более удобной безразмерной характеристикой при расчетах

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (5.3)$$

Согласно одной из гипотез механики деформируемого твердого тела, между напряжением σ и продольной деформацией ε существует прямо пропорциональная зависимость

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \quad (5.4)$$

Для малых удлинений эта зависимость установлена экспериментально. В случае линейной деформации формула (5.4) является математическим выражением закона Гука, причем E – физическая константа, которая характеризует жесткость материала при данном типе деформации и называется модулем продольной упругости или модулем Юнга. Измеряется она в мегапаскалях $[МПа]$. Если про-

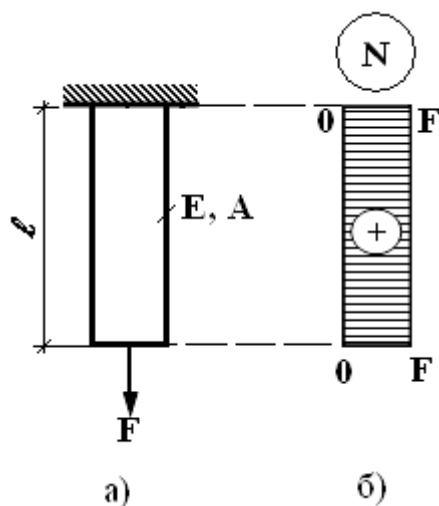


Рис. 5.6

дольная сила во всех сечениях одинакова, и стержень изготовлен из одного материала (рис. 5.6), то, подставляя (5.1) и (5.3) в формулу (5.4), получаем другую запись закона Гука, удобную для вычисления абсолютного удлинения стержня:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \quad (5.5)$$

Произведение EA называют **жесткостью стержня** при растяжении-сжатии.

Условие жесткости требует, чтобы максимальные деформации стержня не превышали некоторой предельной величины, которая зависит от его роли в работе сооружения. При центральном растяжении-сжатии эти условия могут быть записаны в виде:

$$\Delta l_{\max} \leq [\Delta l], \quad (5.6)$$

$$\varepsilon_{\max} \leq [\varepsilon], \quad (5.7)$$

где Δl_{\max} и ε_{\max} – максимальные абсолютная и относительная деформации стержня, а $[\Delta l]$ и $[\varepsilon]$ – предельно допустимые значения для деформаций, устанавливаемые СНиПом.

Пример 3. Для деревянного ступенчатого стержня (рис. 5.7, а) с размерами $l_1 = 1\text{ м}$, $l_2 = 1.2\text{ м}$, $l_3 = 0.5\text{ м}$, и $A = 11\text{ см}^2$ определить полное удлинение, приняв модуль упругости $E = 1 \cdot 10^4\text{ МПа}$.

Дано: $2F$, $l_1 = 1\text{ м}$, $l_2 = 1.2\text{ м}$, $l_3 = 0.5\text{ м}$, $A = 11\text{ см}^2$,
 $E = 1 \cdot 10^4\text{ МПа}$.

Определить: Δl .

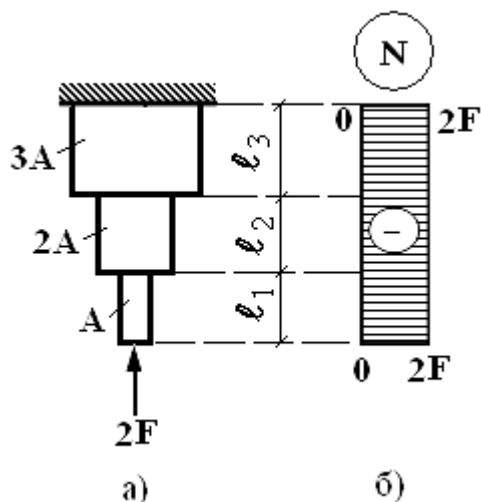


Рис. 5.7

Решение: Разобьем стержень на участки, где величина продольной силы N и жесткость стержня EA постоянны. Для данного стержня получаем три таких участка (рис. 5.7 а). Тогда абсолютную деформацию стержня будем вычислять как сумму абсолютных деформаций на каждом участке, определяя их по отдельности с помощью формулы (5.5):

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} + \frac{N_3 \cdot l_3}{E_3 \cdot A_3}.$$

здесь l_1, l_2, l_3 – длины участков, N_1, N_2, N_3 – значения продольных сил, A_1, A_2, A_3 – площади поперечных сечений и E_1, E_2, E_3 – значения модулей упругости материалов стержня для каждого участка соответственно. Подставляя данные задачи, имеем

$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{(-2F) \cdot 1}{E \cdot A} + \frac{(-2F) \cdot 1.2}{E \cdot 2A} + \frac{(-2F) \cdot 0.5}{E \cdot 3A} = \frac{(-2F)}{E \cdot A} \left(1 + \frac{1.2}{2} + \frac{0.5}{3}\right) = \\ &= \frac{(-2 \cdot 88 \cdot 10^{-4})}{1 \cdot 10^4 \cdot 11 \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{1.2}{2} + \frac{0.5}{3}\right) = 28.3 \cdot 10^{-4} \text{ м}, \end{aligned}$$

Ответ: $\Delta l = 28.3 \cdot 10^{-4} \text{ м}$.

5.4. Пример решения задания № 8. Расчеты на прочность и жесткость при центральном растяжении-сжатии

Деревянный ступенчатый стержень, изображенный на рис. 5.8, находится под действием продольных сил F . Необходимо построить эпюры продольных сил и распределения нормальных напряжений вдоль оси стержня в долях силы F . Определить допускаемую нагрузку F из условия прочности, приняв $R = 16 \text{ МПа}$, а также полное удлинение стержня, считая $E = 1 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

Дано: $R = 16 \text{ МПа}$, $E = 1 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $A = 24 \text{ см}^2$, $a = 1 \text{ м}$, $b = 0.5 \text{ м}$, $c = 1.5 \text{ м}$.

Определить: F , $\Delta \ell$.

Решение. Расчетная схема стержня представлена на рис. 5.8, а, а эпюры продольных сил N и распределения нормальных напряжений σ вдоль оси стержня в долях силы F – на рис. 5.8, б и в. Под-

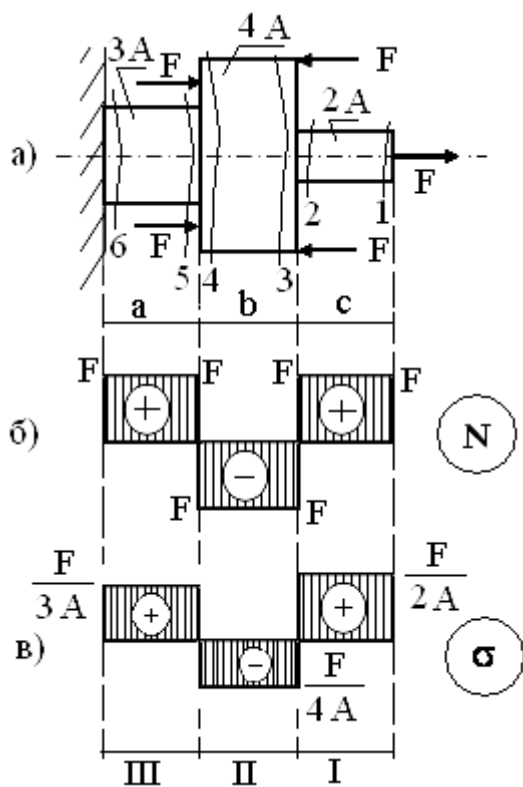


Рис. 5.8

робности по построению эпюр см. в п. 4.9.

Из условия прочности $\sigma_{\max} = \frac{F}{2A} \leq R$ найдем грузоподъемность стержня $F \leq R \cdot 2A$, т.е. $F = 16 \text{ МПа} \cdot 2 \cdot 24 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 768 \cdot 10^{-4} \text{ МН} = 0.0768 \text{ МН}$.

Напоминаем, что формулу (5.5) можно применять на участках, где постоянна величина продольной силы N и жесткость стержня EA . В данной задаче три участка, удовлетворяющие этим условиям.

Абсолютную деформацию стержня Δl вычисляем как сумму абсолютных деформаций на каждом участке:

$$\begin{aligned} \Delta l &= \Delta l_I + \Delta l_{II} + \Delta l_{III} = \frac{N_I \cdot \ell_I}{E_I \cdot A_I} + \frac{N_{II} \cdot \ell_{II}}{E_{II} \cdot A_{II}} + \frac{N_{III} \cdot \ell_{III}}{E_{III} \cdot A_{III}} = \\ &= \frac{F \cdot c}{E \cdot 2A} + \frac{-F \cdot b}{E \cdot 4A} + \frac{F \cdot a}{E \cdot 3A} = \frac{0.0768 \cdot 1.5}{1 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 24 \cdot 10^{-4}} + \\ &+ \frac{-0.0768 \cdot 0.5}{1 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 24 \cdot 10^{-4}} + \frac{0.0768 \cdot 1}{1 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 24 \cdot 10^{-4}} = 0.0031 \text{ м.} \end{aligned}$$

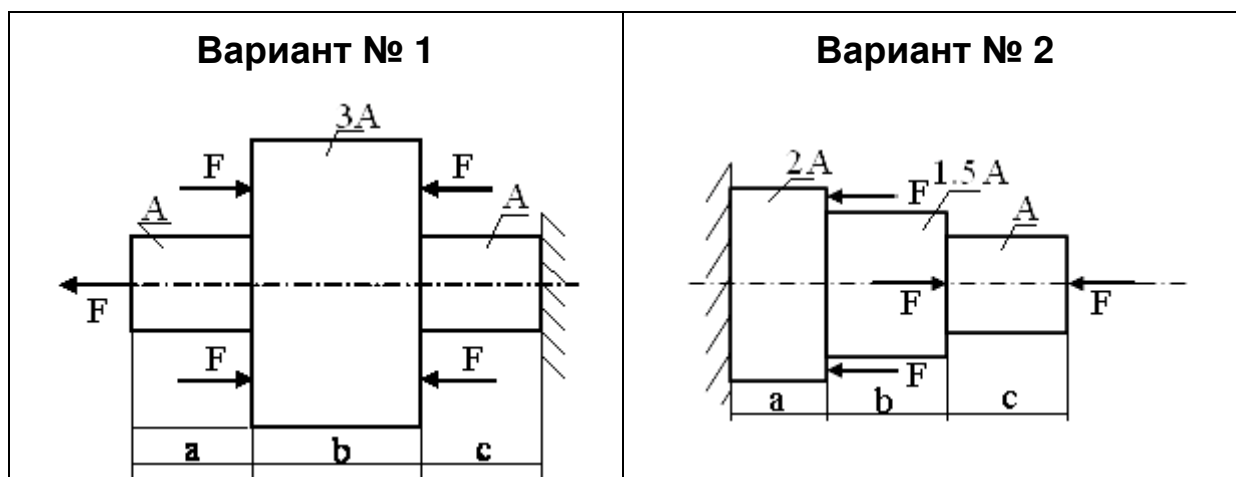
Ответ: $F \leq 0.0768 \text{ МН}$, $\Delta l = 0.0031 \text{ м}$.

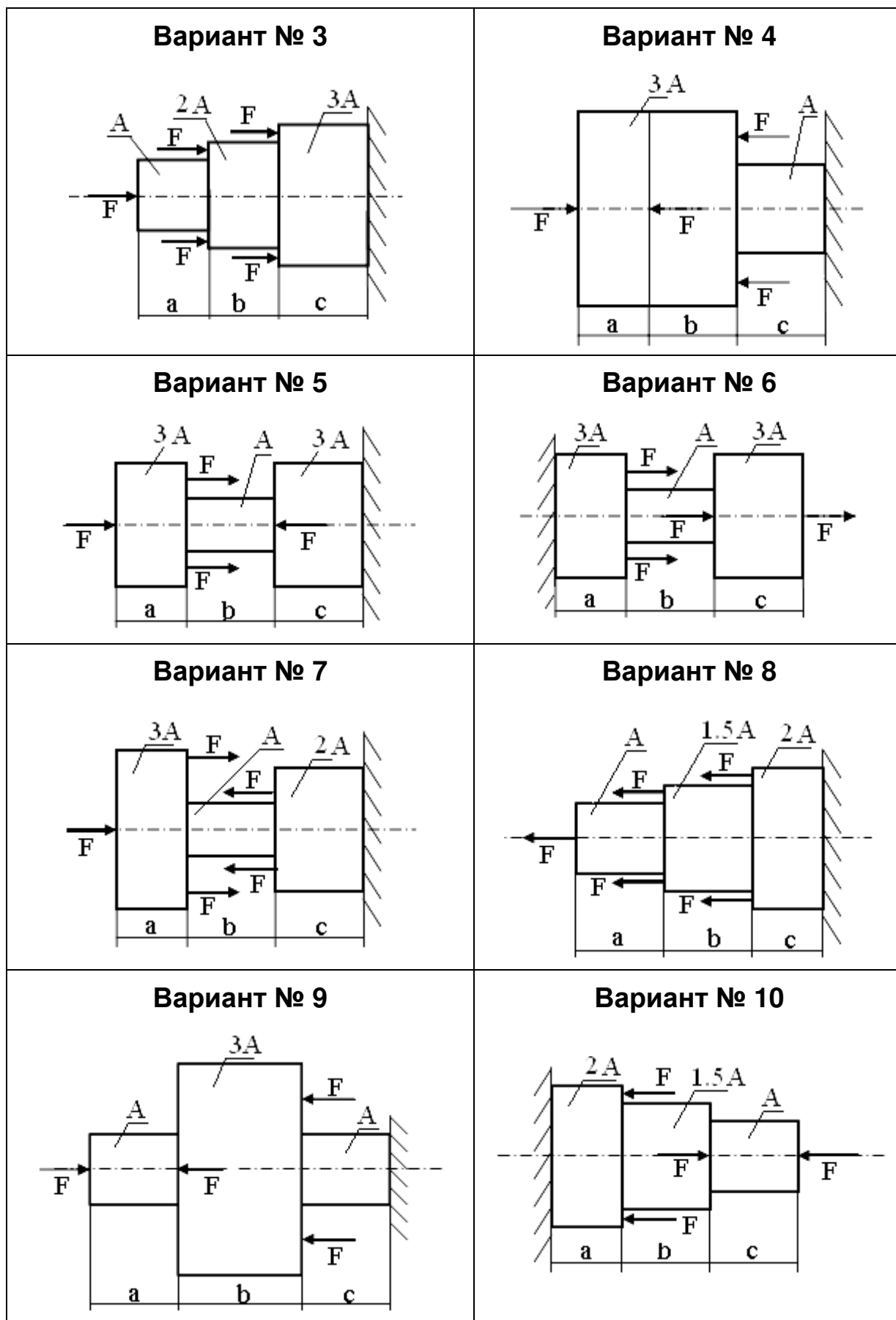
5.5. Методические указания к заданию № 8

Подробный порядок решения задач изложен в теоретической части этой главы, см. примеры 1, 2, 3.

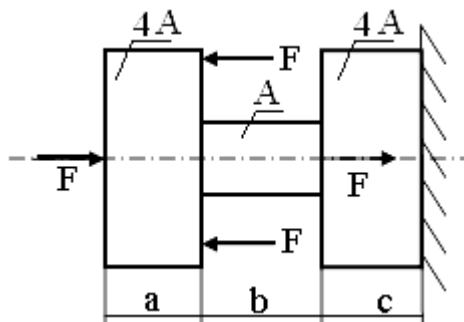
5.6. Варианты задания № 8

Деревянный ступенчатый стержень, изображенный на схеме, находится под действием продольных сил P . Необходимо построить эпюры продольных сил и распределения нормальных напряжений вдоль оси стержня в долях силы P . Определить допускаемую нагрузку P из условия прочности, приняв $R = 16 \text{ МПа}$, а также полное удлинение стержня, считая $E = 1 \cdot 10^4 \text{ МПа}$. Необходимые данные для расчета взять из таблицы 5.1 стр. 141.

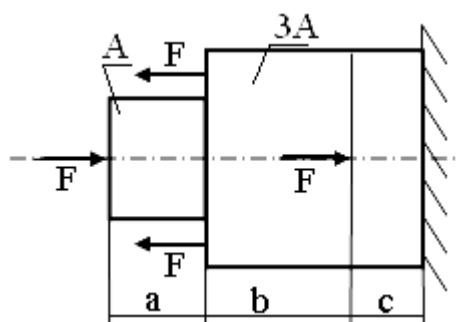




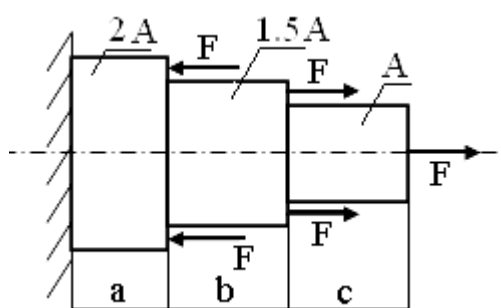
Вариант № 11



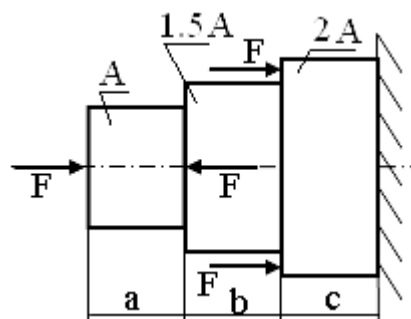
Вариант № 12



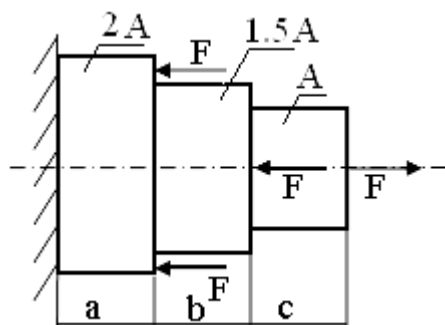
Вариант № 13



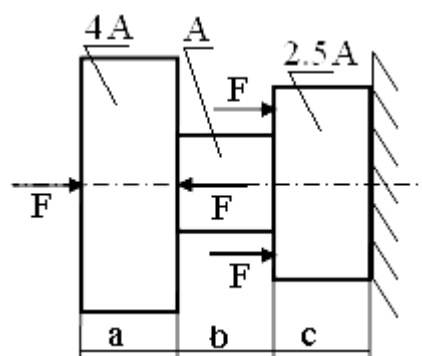
Вариант № 14



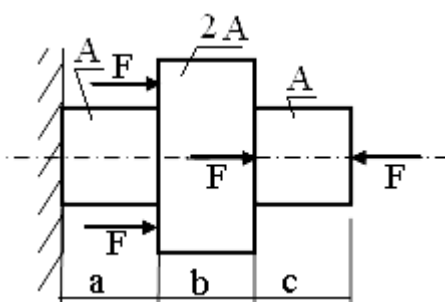
Вариант № 15



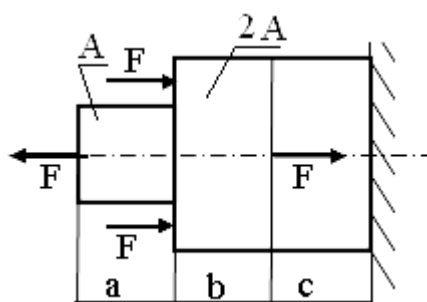
Вариант № 16



Вариант № 17



Вариант № 18



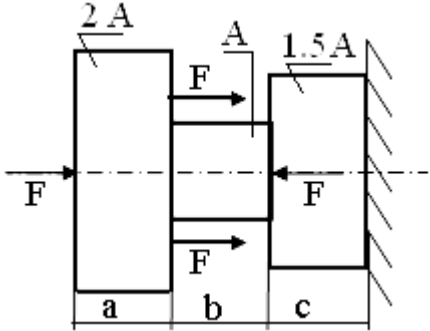
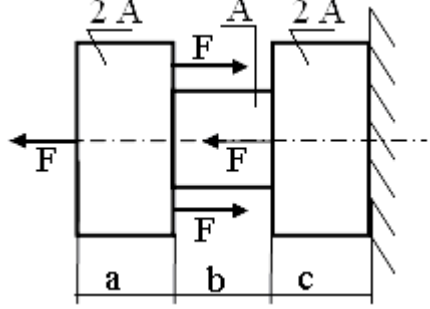
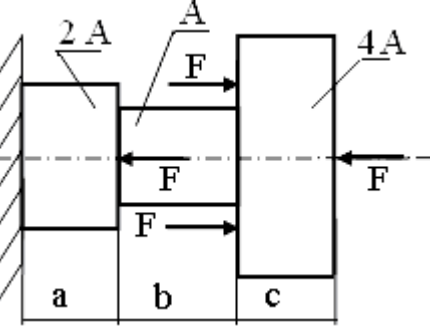
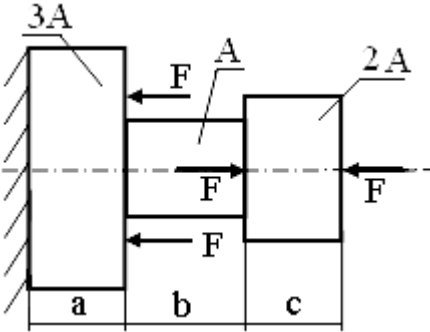
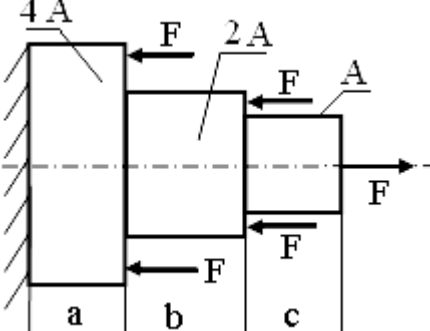
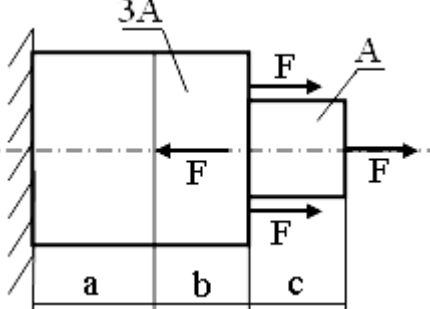
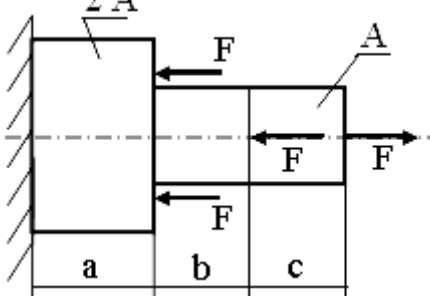
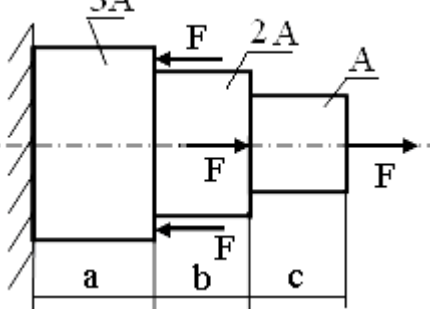
<p style="text-align: center;">Вариант № 19</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант № 20</p> 
<p style="text-align: center;">Вариант № 21</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант № 22</p> 
<p style="text-align: center;">Вариант № 23</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант № 24</p> 
<p style="text-align: center;">Вариант № 25</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант № 26</p> 

Таблица 5.1

цифра шиф- ра	$A, \text{см}^2$	$a, \text{м}$	$b, \text{м}$	$c, \text{м}$
1	10	1	0.8	1
2	12	1.2	1	0.9
3	13	1.3	1.2	0.8
4	14	1.4	0.6	0.7
5	15	1.5	0.4	0.6
6	16	1.6	0.2	1.1
7	17	1.7	0.5	1.2
8	18	1.8	0.7	1.3
9	19	1.9	0.9	0.4
10	20	2	1	0.5

6. Расчет балки на прочность и жесткость

В инженерной практике часто применяются балки с поперечным сечением, имеющим ось симметрии. Если внешняя нагрузка и реактивные усилия лежат в одной плоскости, которая совпадает с осью симметрии сечения, то балка будет изгибаться в той же плоскости. Такой изгиб называется **плоским**. Далее для определенности будем считать, что сечения балок имеют вертикальную ось симметрии (рис. 6.1).

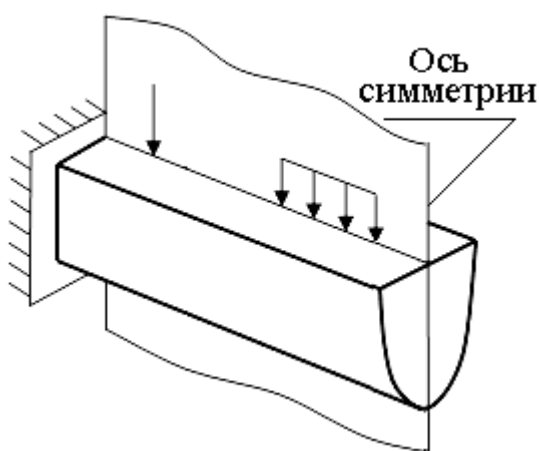


Рис. 6.1

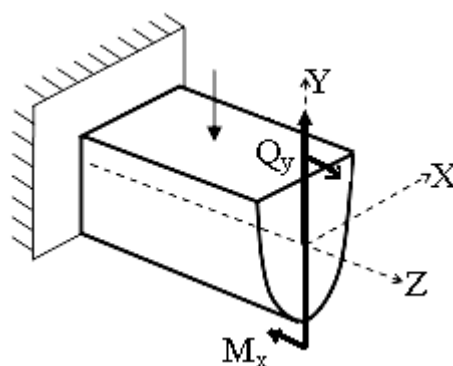


Рис. 6.2

При плоском поперечном изгибе в сечениях балки возникают два внутренних усилия: поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_x (рис. 6.2).

6.1. Напряжения в поперечных сечениях

Поскольку поперечная сила Q_y является равнодействующей касательных напряжений τ (рис. 6.3, а), а изгибающий момент M_x – равнодействующей нормальных напряжений σ (рис. 6.3, б), то, следовательно, в поперечных сечениях балки в общем случае возникают и нормальные напряжения σ , и касательные τ .

Нормальные напряжения σ распределяются по высоте сечения по линейному закону (рис. 6.4).

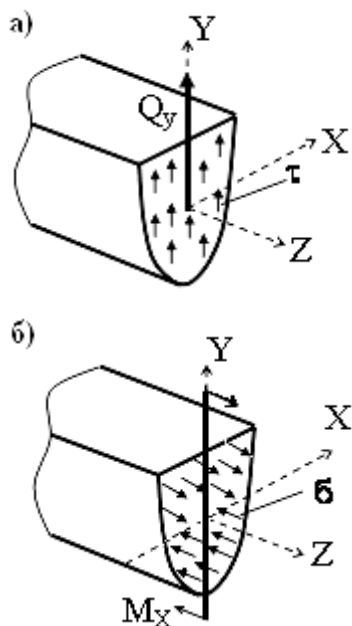


Рис. 6.3

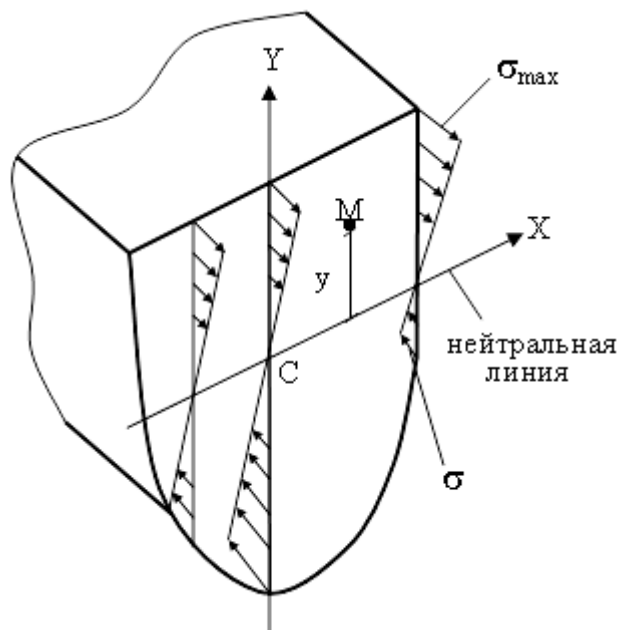


Рис. 6.4

Линия, во всех точках которой $\sigma = 0$, называется **нейтральной линией**. В рассматриваемом случае плоского вертикального изгиба нейтральная линия совпадает с осью CX (рис. 6.4). По мере удаления от неё, напряжения возрастают по модулю, достигая наибольших по модулю значений в крайних точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной линии.

Чтобы определить нормальные напряжения в произвольной точке $M(x, y)$, используется следующая формула:

$$\sigma = \pm \frac{M_x}{J_x} |y|, \quad (6.1)$$

где M_x – величина изгибающего момента в рассматриваемом сечении, определяется по эпюре M_x ; J_x – осевой момент инерции поперечного сечения, табличная величина; y – координата точки, в которой определяется напряжение.

Знак σ определяется с помощью эпюры M_x . Подробнее это будет рассмотрено при решении конкретных задач.

Вводя осевой момент сопротивления сечения W_x , можно получить формулу для определения максимальных напряжений

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}, \quad (6.2)$$

причем W_x – табличная величина.

Отметим, что в дальнейшем касательными напряжениями τ будем пренебрегать, т.к. в подавляющем большинстве задач они значительно меньше нормальных σ .

Пример 1. Определить наибольшие нормальные напряжения, которые возникают в балке круглого сечения (рис. 6.5, а) под действием изгибающего момента $M_X^{\max} = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$, растягивающего её верхние волокна.

Дано: $d = 20 \text{ см}$ и $M_X^{\max} = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Определить: σ_{\max} .

Решение. 1. Покажем положение главной центральной системы координат CXY (рис. 6.5, а).

2. Найдем осевой момент сопротивления круга W_X , используя Приложение II, табл. 1. $W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{\pi \cdot (20 \text{ см})^3}{32} = 785 \text{ см}^3$.

3. Так как сечение симметрично относительно оси CX , то $\sigma_{\max}^{\text{раст}} = \sigma_{\max}^{\text{сж}}$ и удобнее использовать формулу (6.2)

$\sigma_{\max}^{\text{раст}} = \sigma_{\max}^{\text{сж}}$ и удобнее использовать формулу (6.2)

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{12 \text{ кН} \cdot \text{м}}{785 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 15287 \text{ кПа} \approx 15.3 \text{ МПа}.$$

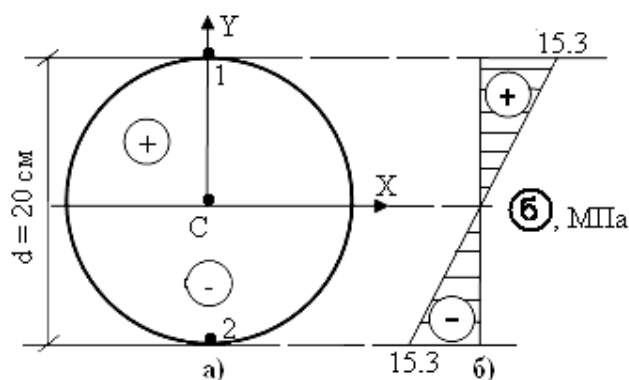


Рис. 6.5

Согласно условию задачи, растягиваются верхние волокна, поэтому $\sigma_{\max}^{\text{раст}} = \sigma^{(1)}$;

$\sigma_{\max}^{\text{сж}} = \sigma^{(2)}$ (рис. 6.5, а).

4. Построим эпюру σ (рис. 6.5, б).

Ответ: $\sigma_{\max} \approx 15.3 \text{ МПа}$.

6.2. Расчет балки на прочность

Расчет на прочность начинается с построения эпюр внутренних усилий балки Q_Y , M_X . Сечение, в котором величина M_X достигает наибольшего значения, считается опасным сечением. Именно для такого сечения и делается расчет на прочность.

Если балка выполнена из пластического материала, который одинаково работает на растяжение и сжатие, то условие прочности записывается в виде:

$$\sigma_{\max} \leq R, \quad (6.3)$$

где R – расчетное сопротивление, заданная величина.

Если балка выполнена из хрупкого материала, который неодинаково работает на растяжение и сжатие, то используются два условия прочности:

$$\begin{cases} \sigma_{\max}^{раст} \leq R_{раст}, \\ \sigma_{\max}^{сж} \leq R_{сж}, \end{cases} \quad (6.4)$$

где $R_{раст}$ – расчетное сопротивление на растяжение; $R_{сж}$ – расчетное сопротивление на сжатие.

Пример 2. Проверить выполнение условий прочности для деревянной круглой балки (рис. 6.6, а), если $R = 16 \text{ МПа}$.

Дано: $d = 20 \text{ см}$, $R = 16 \text{ МПа}$.

Определить: проверить условие $\sigma_{\max} \leq R$.

Решение. 1. Строим эпюры Q_Y и M_X (рис. 6.6, б и в). Опасным является сечение в заделке: $M_x^{\max} = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

2. Проверяем условие прочности по нормальным напряжениям $\sigma_{\max} \leq R$. Величина σ_{\max} была определена в примере 1:

$$\sigma_{\max} = 15.3 < 16 \text{ МПа}.$$

Ответ: условие прочности выполняется.

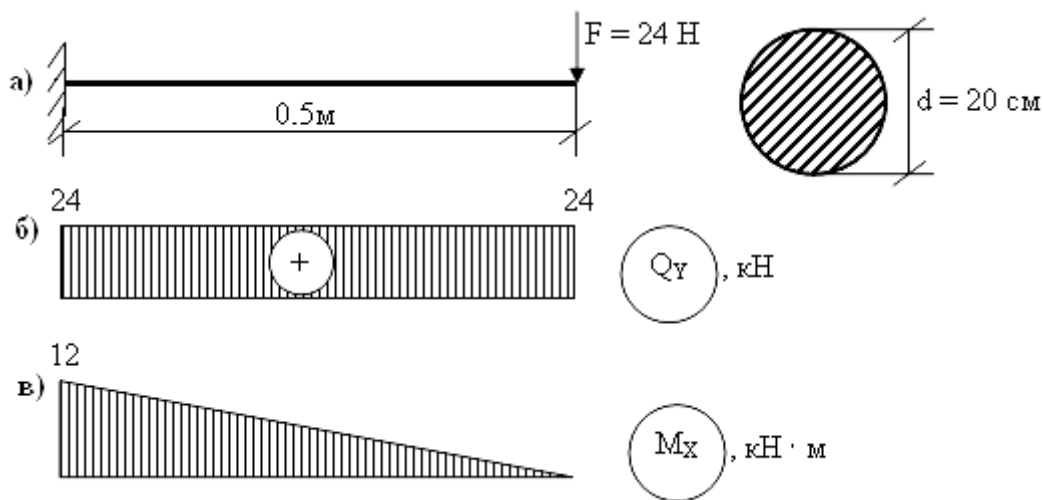


Рис. 6.6

Пример 3. Определить грузоподъемность стальной балки (рис. 6.7, а), если её расчетное сопротивление $R = 240 \text{ МПа}$.

Дано: сечение балки – двутавр № 12, $R = 240 \text{ МПа}$.

Определить: P .

Решение. 1. Строим эпюры Q_Y и M_X (рис. 6.7, б и в). По эпюре M_X определяем положение опасного сечения: $M_X^{\max} = 3P$.

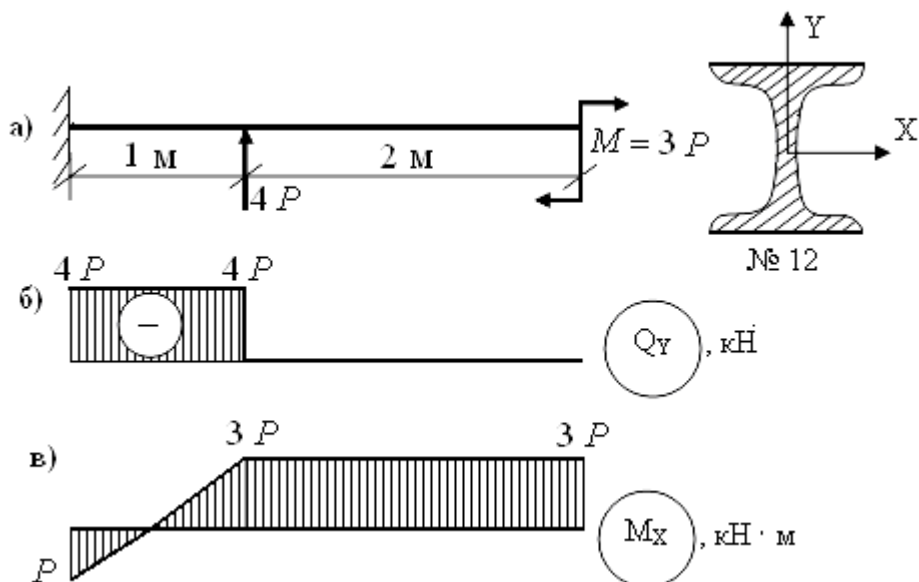


Рис. 6.7

2. Находим величину силы P из условия прочности. Для этого сначала выписываем из сортамента (Приложение I, табл. 3, строка 2)

значение W_x для двутавра № 12: $W_x = 58.4 \text{ см}^2 = 58.4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$. Из условия прочности

$$\sigma_{\max} \leq R; \quad \frac{M_x^{\max}}{W_x} \leq R; \quad \frac{3 \cdot P}{58.4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} \leq 240 \text{ МПа};$$

находим грузоподъёмность балки $P \leq 0.002 \text{ МН} = 2 \text{ кН}$.

Ответ: $P \leq 2 \text{ кН}$.

6.3. Примеры решения задания № 9. Определение размеров поперечного сечения из условия прочности

Примеры I – III. Для балок, изображенных на рисунках 6.8; 6.9; 6.10, определить размеры поперечного сечения из условия прочности по нормальным напряжениям.

I. Дано: балка прямоугольной формы с размерами $b \times h$ (рис. 6.8, а), $h = 2b \text{ см}$, и расчётное сопротивление $R = 16 \text{ МПа}$.

Определить: h, b .

Решение. 1. Строим эпюры Q_Y и M_X (рис. 6.8, б и в). В опасном сечении

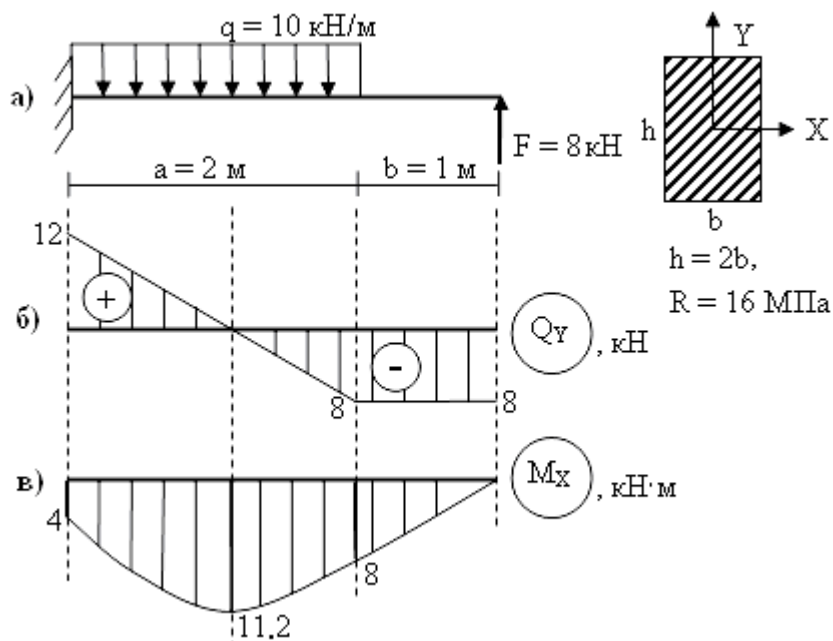


Рис. 6.8

сечении

$$M_x^{\max} = 11.2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2. Из условия прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x^{\max}}{W_x} \leq R$$

находим размеры сечения

$$W_x \geq \frac{M_x^{\max}}{R}.$$

Подставляя значения, имеем

$$W_x \geq \frac{11.2 \text{ кН} \cdot \text{м}}{16 \cdot 10^3 \text{ кПа}} = 0.7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3. \text{ Из Приложения II, табл. 1 выписываем формулу для определения осевого сопротивления } W_x \text{ в случае прямоугольного сечения}$$

формулу для определения осевого сопротивления W_x в случае прямоугольного сечения

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{4b^3}{6}.$$

Тогда $\frac{4b^3}{6} = 0.7 \cdot 10^{-3}$, $b = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 0.7 \cdot 10^{-3}}{4}} = 0.10 \text{ м}$; $h = 2b = 0.20 \text{ м}$.

Ответ: $h = 2b = 0.20 \text{ м}$.

II. Дано: балка, сечение которой двутавр (рис. 6.9, а), лежит на двух опорах, её расчётное сопротивление $R = 240 \text{ МПа}$.

Определить: номер двутавра.

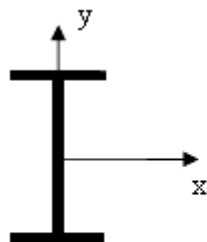
Решение. 1. Строим эпюры Q_Y и M_X (рис. 6.9, б и в). В опасном сечении $M_x^{\max} = 26 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

2. Величина момента сопротивления W_x из условия прочности:

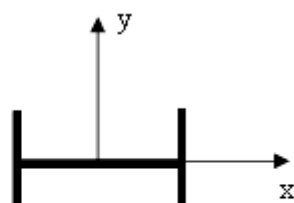
$$\sigma_{\max} \leq R; \quad \frac{M_x^{\max}}{W_x} \leq R; \quad W_x \geq \frac{M_x^{\max}}{R};$$

$$W_x \geq \frac{26 \cdot 100 \text{ кН} \cdot \text{см}}{24 \text{ кН} / \text{см}^2} = 108.3 \text{ см}^3.$$

Дальше используем сортамент (см. Приложение I, табл. 3). При этом учитываем, что двутавровое сечение рассматриваемой балки повернуто на 90° по сравнению с сечением двутавра в сортаменте.



Изображение двутавра в сортаменте



Положение двутавра в сечении нашей балки

В этом случае при определении номера профиля величину момента сопротивления 108.3 см^3 , полученную из условия прочности, ищем в колонке сортамента « W_y ». Ближайшее значение

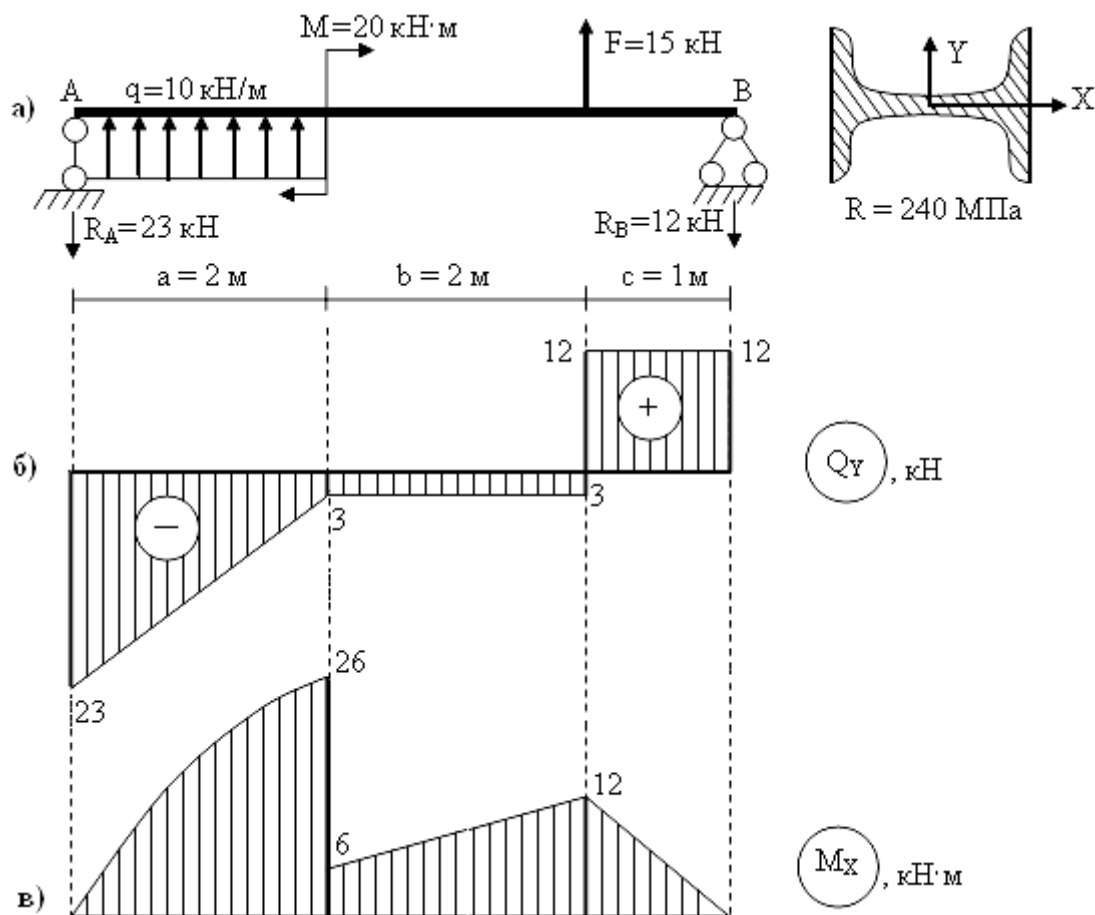


Рис. 6.9

$W_y = 123 \text{ см}^3$, что соответствует двутавру № 50.

Ответ: двутавр № 50.

III. Дано: балка на двух опорах, сечение которой состоит из двух швеллеров (рис. 6.10, а), с расчётным сопротивлением $R = 240 \text{ МПа}$.

Определить: номер швеллера.

Решение: 1. Строим эпюры Q_y , M_x (рис. 6.10, б, в). В опасном сечении $M_x^{\max} = 48 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

2. Найдем значение W_x из условия прочности

$$\sigma_{\max} \leq R; \quad \frac{M_x^{\max}}{W_x} \leq R; \quad W_x \geq \frac{M_x^{\max}}{R};$$

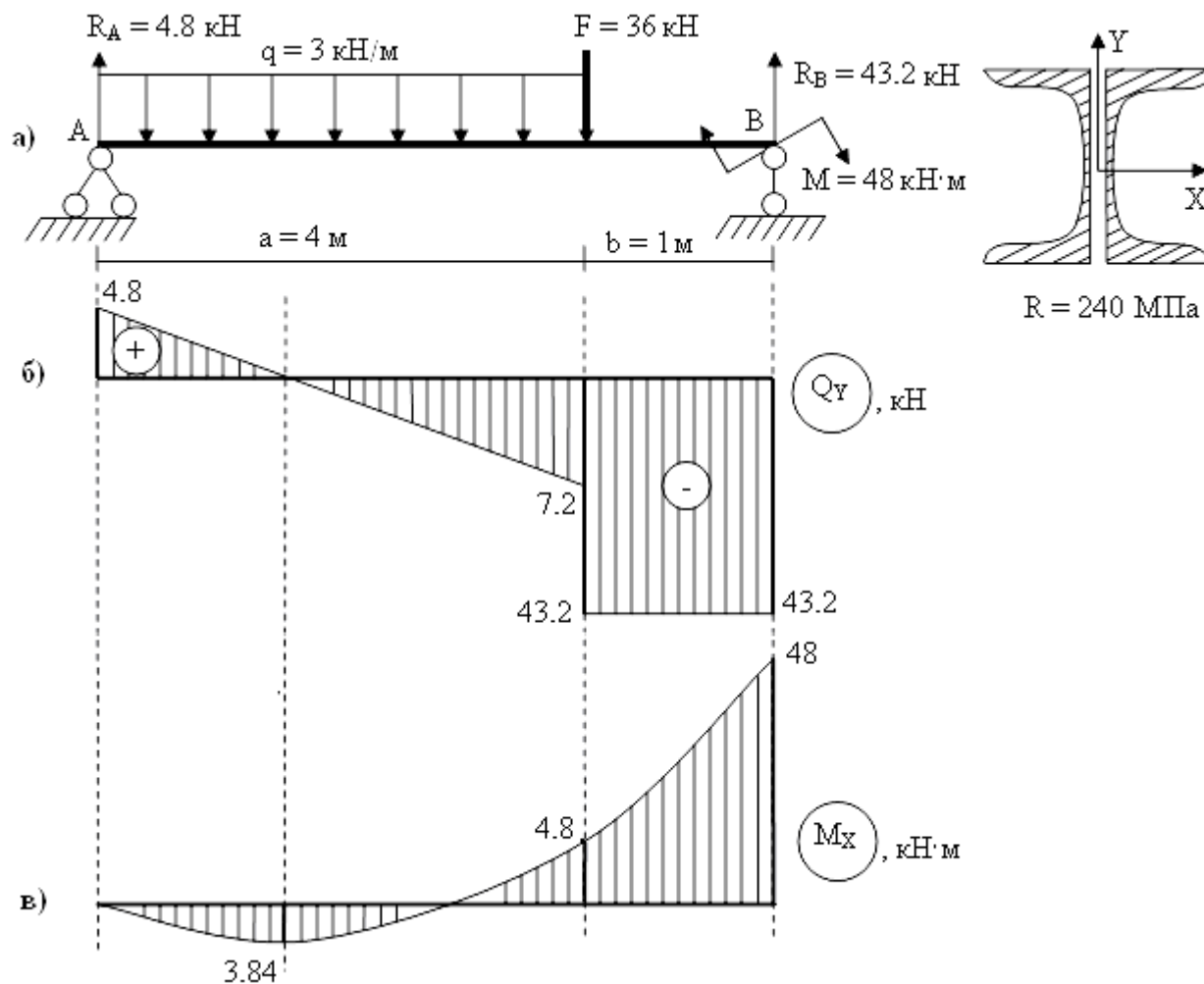


Рис. 6.10

$$W_x \geq \frac{48 \cdot 100 \text{ кН} \cdot \text{см}}{24 \text{ кН} / \text{см}^2} = 200 \text{ см}^3.$$

Сечение состоит из двух одинаковых швеллеров, тогда момент сопротивления одного из них: $W_x^{шв} = W_x / 2 = 100 \text{ см}^3$. Из Приложения I, табл. 4, номер профиля, имеющего $W_x^{шв} = 103 \text{ см}^3$ – швеллер № 16 а.

Ответ: швеллер № 16 а.

6.4. Методические указания к заданию № 9

1. Найти изгибающий момент M_x^{\max} в опасном сечении.

2. Из условия прочности определить осевой момент сопротивления балки W_x .
3. Из сортамента (Приложения I или II) определить номер прокатного профиля или размеры поперечного сечения стальной или деревянной балки соответственно.

6.5. Варианты задания № 9

Из условия прочности подобрать размеры поперечных сечений балок из задания № 2 задачи 1. Вид сечения указан в правой колонке. Исходные данные брать из таблиц 2.2 и 2.3. Эпюры поперечной силы Q_Y и изгибающего момента M_X можно взять из задания № 7.

- 1) в задачах 1 а) балки считать деревянными, $E = 1 \cdot 10^4$ МПа, $R = 16$ МПа.
- 2) в задачах 1 б) балки полагать стальными, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $R = 240$ МПа.

6.6. Перемещения балки при изгибе.

Расчет на жесткость

Перемещения сечений балок характеризуют:

1. линейными перемещениями центров тяжести поперечных сечений в направлении, перпендикулярном оси Z , называемыми **прогибами** (v);
2. угловыми перемещениями поперечных сечений вокруг нейтральной оси X , которые называют **углами поворота сечения** (θ) (рис. 6.11).

Определение линейных и угловых перемещений необходимо для расчетов на жесткость при изгибе. Так как поперечная сила оказывает заметное влияние на деформацию только коротких балок, то обычно v и θ определяют лишь от изгибающего момента.

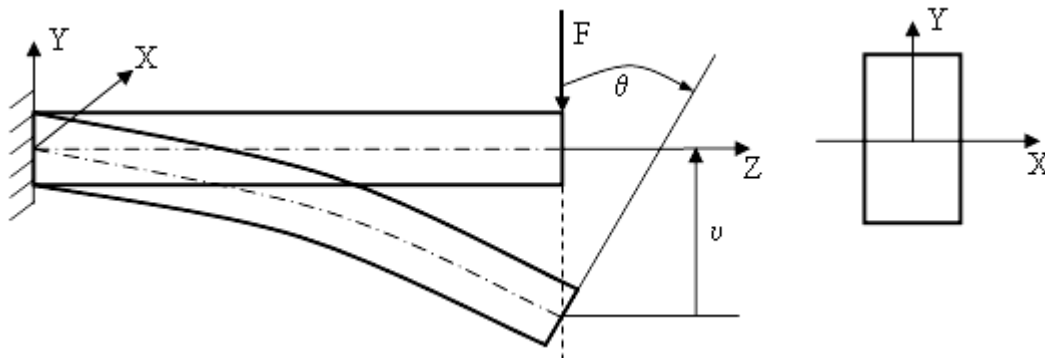


Рис. 6.11

Будем рассматривать наиболее распространенный метод определения перемещений v и θ – **метод Мора**.

Так как метод Мора является универсальным методом, то он применим для определения перемещения любых объектов – балок, плоских и пространственных рам, арок и др. Ниже будет рассмотрено применение этого метода к расчету балок при плоском изгибе.

Для определения перемещений методом Мора используют формулу:

$$\Delta = \sum_i \int_{\ell_i} \frac{M_X^F \cdot M_X^1}{EJ_X} dz, \quad (6.5)$$

здесь Δ – это искомое перемещение: прогиб v или угол поворота θ ; M_X^F – грузовой изгибающий момент, то есть момент от заданных внешних нагрузок; M_X^1 – единичный изгибающий момент, то есть момент от фиктивной единичной нагрузки; EJ_X – жесткость балки, где E – модуль продольной упругости, J_X – осевой момент инерции сечения относительно главной центральной системы координат.

Фиктивная единичная нагрузка всегда прикладывается к тому сечению балки, перемещения которого требуется определить. При этом, если необходимо определить прогиб, в качестве фиктивной берется сосредоточенная безразмерная сила, которую будем обозначать $\bar{F} = 1$, а при определении угла поворота – безразмерная пара сил $\bar{M} = 1$.

Наиболее просто метод Мора реализуется с помощью графо-аналитического способа с использованием формул численного интегрирования. Проиллюстрируем на примере схему решения задачи этим способом.

Пример. Определить прогиб балки в точке A (рис. 6.13, а).

Дано: $F = 8 \text{ кН}$, $M = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$, двутавр № 12, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Определить: v_A

Решение. 1. Строим грузовую эпюру M_X^F , то есть эпюру изгибающих моментов для заданной балки (рис. 6.13, б).

2. Строим единичную балку (рис. 6.13, в). Для этого освобождаем заданную балку от **всех** нагрузок и к точке A , **прогиб** которой следует определить, прикладываем фиктивную **силу** $\bar{F} = 1$.

3. Строим единичную эпюру M_X^1 , то есть эпюру изгибающих моментов для единичной балки (рис. 6.13, г).

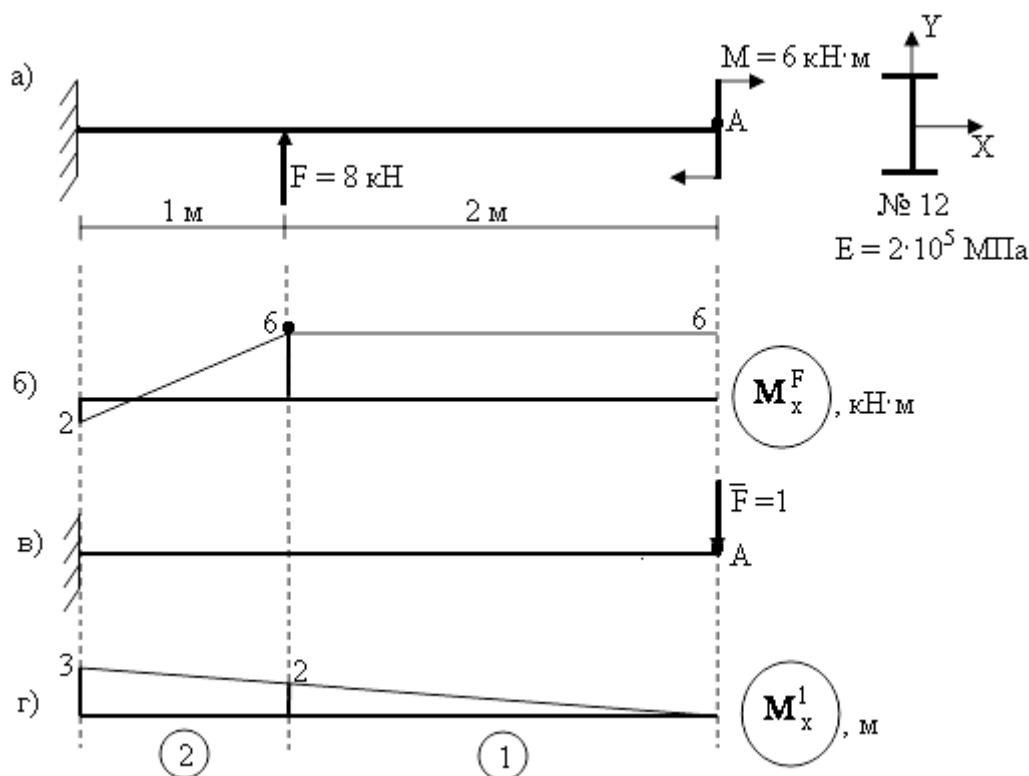


Рис. 6.13

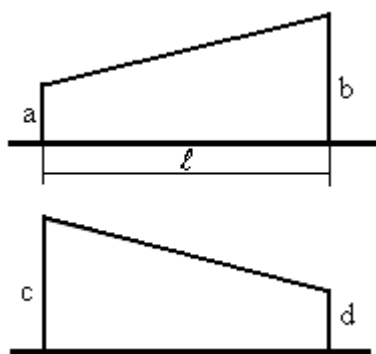
Примечания.

а) Для заданной балки, как правило, строят и эпюру поперечных сил Q_Y ; для единичной балки эпюру поперечных сил **никогда** не строят.

б) Эпюры моментов M_X^F и M_X^1 , как правило, не штрихуют.

4. Разбиваем эпюру от внешней нагрузки M_X^F на участки, где характер эпюры моментов не меняется, т.е. от излома до излома (рис.6.13, б) и перемножаем их с соответствующими участками единичной эпюры моментов M_X^1 (рис. 6.13, а). В данном случае получается два участка «перемножения».

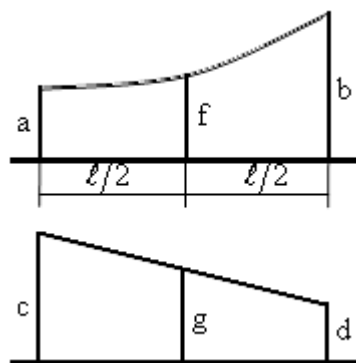
5. К каждому участку применяем одну из формул численного интегрирования:



Формула трапеций:

$$\Delta = \frac{l}{6EJ} (ad + bc + 2ac + 2bd) \quad (6.6)$$

Рис. 6.14



Формула Симпсона:

$$\Delta = \frac{l}{6EJ} (ac + 4fg + bd) \quad (6.7)$$

Рис. 6.15

Произведения ординат, лежащих по одну сторону от оси, подставляются в эти формулы с положительным знаком, по разные – со знаком «минус». Например, в случаях, изображенных на рис. 6.14. и 6.15, все произведения в круглых скобках будут положительными; в

случае, изображенном на рис. 6.16: $\Delta = \frac{l}{6EJ} (ac - 4fg - bd)$.

При выборе формулы необходимо учитывать, что формула Симпсона является универсальной, то есть применима для «перемножения» эпюр любых очертаний, а формула трапеций – только

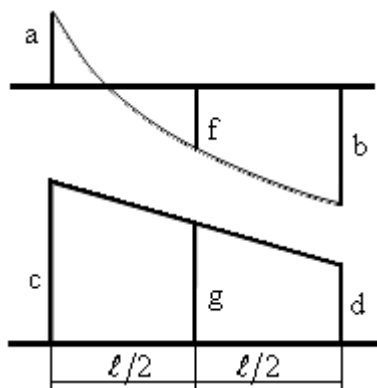


Рис. 6.16

для прямолинейных участков.

В нашем примере грузовая эпюра линейна, применим формулу трапеций.

Участок 1: Длина участка $l = 2$ м; значения на грузовой эпюре: правое $b = -6$; левое $a = -6$; значения на единичной эпюре: правое $d = 0$; левое $c = -2$. Подставляем их в формулу (6.6):

$$\Delta_1 = \frac{2}{6E J_x} ((-6) \cdot 0 + (-6) \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) \cdot (-6) + 2 \cdot (-6) \cdot 0) = \frac{72}{6E J_x}.$$

Участок 2: Длина участка $l = 1$ м; значения на грузовой эпюре: правое $b = -6$; левое $a = 2$ (лежит ниже оси); значения на единичной эпюре: правое $d = -2$; левое $c = -3$. Подставляем в формулу (6.6):

$$\Delta_2 = \frac{1}{6E J_x} (2 \cdot (-2) + (-6) \cdot (-3) + 2 \cdot (-3) \cdot 2 + 2 \cdot (-6) \cdot (-2)) = \frac{26}{6E J_x}.$$

6. Складываем полученные значения:

$$v_A = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{72}{6E J_x} + \frac{26}{6E J_x} = \frac{98 \text{ кН} \cdot \text{м}^3}{6E J_x}.$$

7. Вычисляем жесткость балки. Величину J_x для двутавра № 12 берем из сортамента (Приложение I, табл. 3):

$$J_x = 350 \text{ см}^4 = 350 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 \text{ и}$$

$$\text{считаем } EJ_x = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \text{ кПа} \cdot 350 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 700 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

8. Находим окончательное значение прогиба:

$$v_A = \frac{98 \text{ кН} \cdot \text{м}^3}{6 \cdot 700 \text{ кН} \cdot \text{м}^2} = 0.023 \text{ м}.$$

9. Определяем направление перемещения по следующему правилу: положительное значение искомого перемещения указывает на то, что его направление совпадает с направлением фиктивной единичной нагрузки. В нашем примере единичная сила направлена вниз,

прогиб v_A получился положительным, следовательно, сечение A также перемещается вниз.

Ответ: прогиб $v_A = 0.023 \text{ м}$.

6.7. Примеры решения задания № 10.

Расчеты на жесткость при изгибе

Ниже рассмотрим несколько примеров расчета балки на жесткость с помощью метода Мора.

Пример 1. Определить прогиб деревянной балки в сечении A (рис. 5.27, а), полагая, что модуль продольной упругости материала $E = 1 \cdot 10^4 \text{ МПа}$. Поперечное сечение балки – прямоугольник с размерами: $h = 0.2 \text{ м}$; $b = 0.1 \text{ м}$.

Дано: $F = 8 \text{ кН}$, $q = 10 \text{ кН/м}$, $h = 0.2 \text{ м}$, $b = 0.1 \text{ м}$.

Определить: v_A

Решение. 1. Строим эпюры внутренних усилий Q_Y и M_X^F (рис. 6.17, б и в) аналогично примеру 7 из п. 4.9.

2. Изобразим единичную балку. Для этого рисуем исходную балку, сохраняя размеры и опоры, снимаем с неё **все** заданные нагрузки и прикладываем в точке A фиктивную нагрузку. Так как по условию задачи требуется определить **прогиб** v , то в качестве фиктивной берем сосредоточенную **силу** $\bar{F} = 1$ произвольного направления (рис. 6.17, г).

3. Строим единичную эпюру M_X^I для единичной балки (рис. 6.17, д).

4. Разбиваем эпюры M_X^F и M_X^I на **два** участка «перемножения» (рис. 6.17, в и д).

5. Применяем формулы численного интегрирования. К первому участку применим формулу трапеций (6.6). Из эпюр M_X^F и M_X^I видно, что $\ell = 1 \text{ м}$; $a = 8$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 0$. Тогда

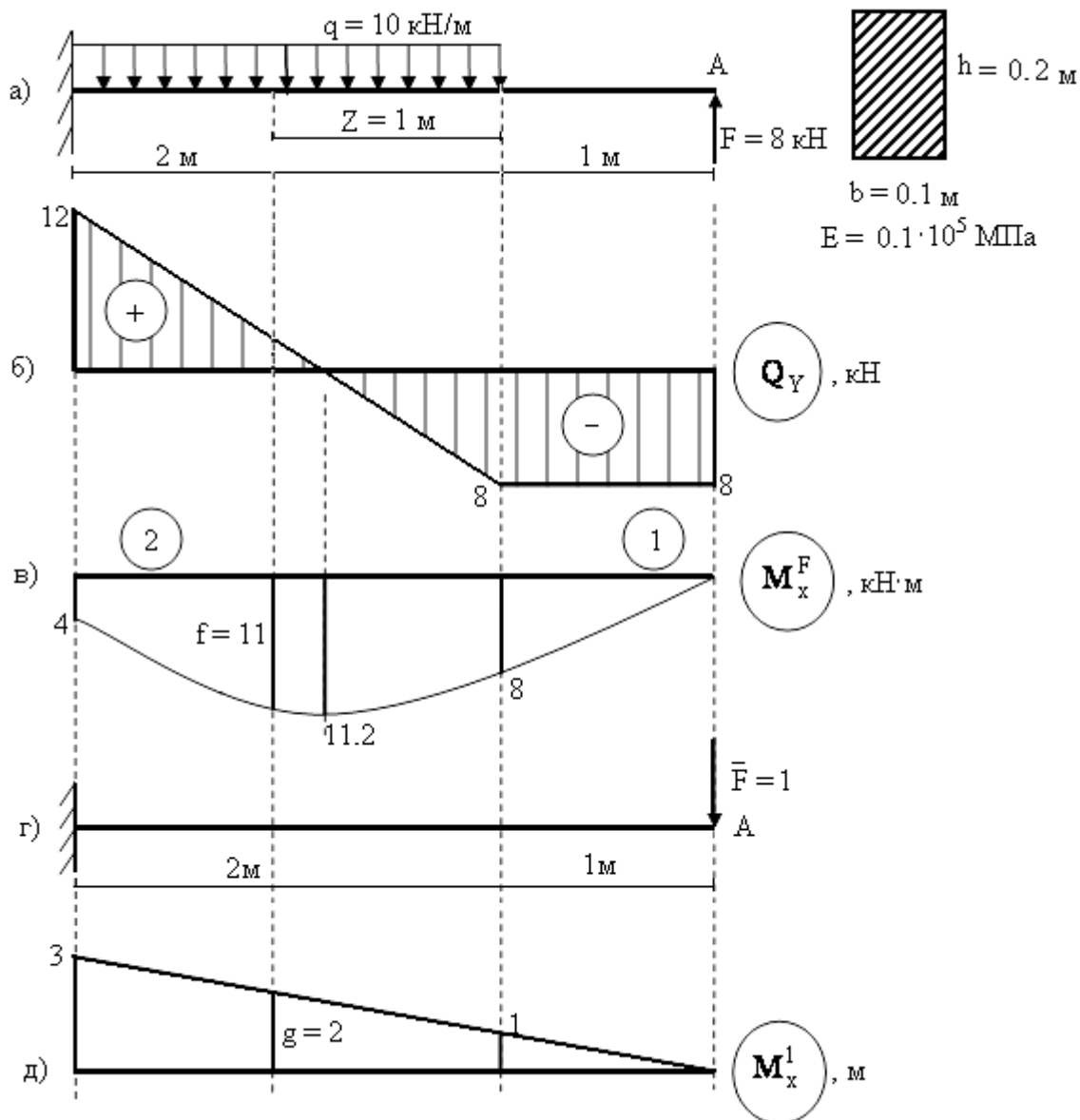


Рис. 6.17

$$\Delta_1 = \frac{1}{6EJ_X} (8 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 2 \cdot 8 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0) = -\frac{16}{6EJ_X}.$$

Ко второму участку формулу трапеций применить нельзя, так как эпюра M_x^F на этом участке ограничена параболой, поэтому используем формулу Симпсона (6.7). Из эпюр находим $\ell = 2 \text{ м}$; $a = 4$, $b = 8$, $c = 3$, $d = 1$.

Определим средние значения f и g . Сделаем на исходной балке дополнительное сечение Z посередине второго участка (рис. 6.17, а), отбросим часть балки с жесткой заделкой и посчитаем

$$f = M_{cp}^F = F(1+Z) - q \cdot Z \cdot 0.5 \cdot Z = 8 \cdot 2 - 10 \cdot 1 \cdot 0.5 = 11 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Аналогично вычислим величину g на эпюре M_X^1

$$g = M_{cp}^1 = \bar{F} \cdot 2 = 2.$$

Подставив полученные значения в формулу (6.7), получим

$$\Delta_2 = \frac{2}{6EJ_X} (-4 \cdot 3 - 4 \cdot 11 \cdot 2 - 8 \cdot 1) = -\frac{216}{6EJ_X}.$$

6. Складывая значения Δ_1 и Δ_2 , считаем прогиб в точке A

$$v_A = \Delta_1 + \Delta_2 = -\frac{16}{6EJ_X} - \frac{216}{6EJ_X} = -\frac{232}{6EJ_X}.$$

7. Вычислим жесткость балки

$$EJ_X = 0.1 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \cdot \frac{0.1 \cdot 0.2^3}{12} \text{ м}^4 \approx 667 \text{ кН} \cdot \text{м}^2,$$

где $J_x = \frac{b h^3}{12} = \frac{A h^2}{12}$ (см. Приложение II табл. 1).

8. Окончательное значение прогиба – $v_A = -\frac{232}{6 \cdot 667} = -0.058 \text{ м}.$

Так как $v_A < 0$, то направление перемещения противоположно направлению фиктивной единичной силы \bar{F} (см. рис. 6.17, *з*), то есть сечение A перемещается вверх.

Ответ: прогиб $v_A = -0.058 \text{ м}.$

Пример 2. Определить величину угла поворота θ в сечении C стальной балки с модулем Юнга равным $2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, поперечное сечение которой двутавр № 50 (рис. 6.18, *а*). На балку действуют силы: пара с моментом $M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $F = 15 \text{ кН}$ и распределенная нагрузка интенсивностью $q = 10 \text{ кН/м}.$

Дано: $M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $F = 15 \text{ кН}$, $q = 10 \text{ кН/м}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$

Определить: θ_c

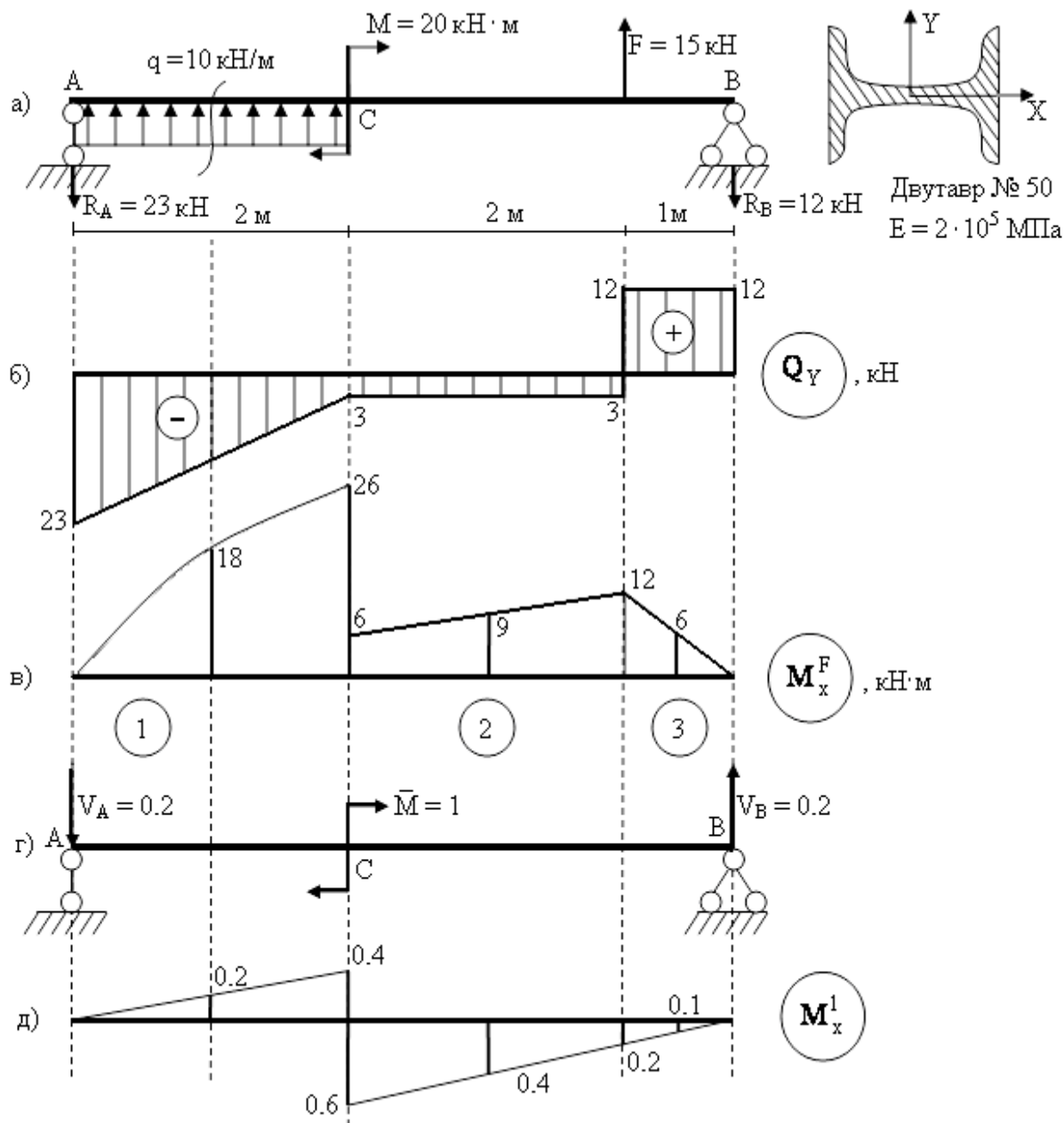


Рис. 6.18

Решение. 1. Строим эпюры внутренних усилий Q_Y и M_x^F (см. п. 4.9, пример 8) (рис. 6.18, б и в).

2. Изображаем единичную балку. Для этого снимаем с исходной балки все заданные нагрузки и прикладываем в точке C фиктивную нагрузку. Так как по условию задачи требуется определить угол поворота θ , то в качестве фиктивной берем пару сил $\bar{M} = 1$ произвольного направления (рис. 6.18, г).

3. Для единичной балки сначала определяем реакции опор V_A и V_B :

$$\sum \text{mom}_A = 0; V_B \cdot 5 - \bar{M} = 0; V_B = \frac{\bar{M}}{5} = \frac{1}{5} = 0.2;$$

$$\sum \text{mom}_B = 0; V_A \cdot 5 - \bar{M} = 0; V_A = \frac{\bar{M}}{5} = \frac{1}{5} = 0.2.$$

Сделаем проверку: $\sum F_Y = 0; V_B - V_A = 0, 0.2 - 0.2 = 0, 0 = 0$. После этого строим эпюру M_X^1 обычным образом (рис. 6.18, в и д).

4. Делим эпюры M_X^F и M_X^1 на участки «перемножения», их оказалось три (рис. 6.18, в и д).

5. Ко всем участкам применим формулу Симпсона (6.7):

1-й участок. $\ell = 2 \text{ м}; a = 0; b = 26; c = 0; d = 0.4$. Находим величины f и g , делая дополнительно сечение в середине участка на обеих эпюрах (рис. 6.18):

$$|f| = |-R_A \cdot 1 + q \cdot 1 \cdot 0.5| = |-23 + 10 \cdot 1 \cdot 0.5| = 18,$$

$$|g| = |-V_A \cdot 1| = 0.2.$$

$$\text{Тогда } \Delta_1 = \frac{2}{6EJ_X} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 18 \cdot 0.2 + 26 \cdot 0.4) = \frac{49.6}{6EJ_X}.$$

2-й участок. $\ell = 2 \text{ м}; a = 6; b = 12; c = 0.6; d = 0.2$.

Величины f и g здесь можно найти как средние линии трапеций:

$$f = \frac{6+12}{2} = 9; g = \frac{0.6+0.2}{2} = 0.4. \text{ Значит,}$$

$$\Delta_2 = \frac{2}{6EJ_X} (-6 \cdot 0.6 - 4 \cdot 9 \cdot 0.4 - 12 \cdot 0.2) = -\frac{40.8}{6EJ_X},$$

т.к. ординаты a, b, f лежат по одну сторону от оси, а c, d, g – по другую.

3-й участок. $\ell = 1 \text{ м}, a = 12, b = 0, c = 0.2, d = 0$,

$$f = \frac{12+0}{2} = 6, g = \frac{0.2+0}{2} = 0.1. \text{ Следовательно,}$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{6EJ_X} (-12 \cdot 0.2 - 4 \cdot 6 \cdot 0.1 - 0 \cdot 0) = -\frac{4.8}{6EJ_X}.$$

6. Складывая полученные значения, определяем угол поворота сечения:

$$\theta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \frac{49.6}{6EJ_X} - \frac{40.8}{6EJ_X} - \frac{4.8}{6EJ_X} = \frac{4}{6EJ_X}.$$

7. Найдем жесткость балки EJ_X . Используя сортамент табл. 3, находим для двутавра № 50, учитывая поворот осей сечения: $J_X^{\partial 6} = 1043 \text{ см}^4$.

$$EJ_X = 2 \cdot 10^8 \text{ кПа} \cdot 1043 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 2086 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

8. Окончательно имеем $\theta = \frac{4}{6 \cdot 2086} = 0.0003 \text{ рад}$. Знак «плюс» показывает, что поворот сечения C совпадает с направлением фиктивного момента $\bar{M} = 1$ (рис. 6.18, а), то есть поворот происходит по ходу часовой стрелки.

Ответ: угол поворота $\theta = 0.0003 \text{ рад}$.

Пример 3. Определить прогиб стальной балки в сечении C , поперечное сечение которой состоит из двух швеллеров № 16, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ (рис. 6.19, а). $F = 36 \text{ кН}$, $q = 3 \text{ кН/м}$, $M = 48 \text{ кН} \cdot \text{м}$ – приложенные к ней нагрузки:

Дано: $F = 36 \text{ кН}$, $q = 3 \text{ кН/м}$, $M = 48 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Определить: v_C .

Решение. 1. Строим эпюры Q_Y и M_X^F как в примере 9 из п. 4.9 (рис. 6.19, б и в).

2. Изображаем единичную балку, прикладывая в точке C единичную силу $\bar{F} = 1$ (рис. 6.19, а).

3. Вычисляем реакции опор V_A и V_B для единичной балки:

$$\sum \text{mom}_A = 0; \bar{F} \cdot 2 - V_B \cdot 5 = 0; V_B = \frac{1 \cdot 2}{5} = 0.4;$$

$$\sum \text{mom}_B = 0; V_A \cdot 5 - \bar{F} \cdot 3 = 0; V_A = \frac{1 \cdot 3}{5} = 0.6.$$

Проверка: $\sum F_Y = 0$; $V_B + V_A - \bar{F} = 0$, $0.6 + 0.4 - 1 = 0$, $0 = 0$. После этого строим эпюру M_X^1 обычным образом (рис. 6.19, д).

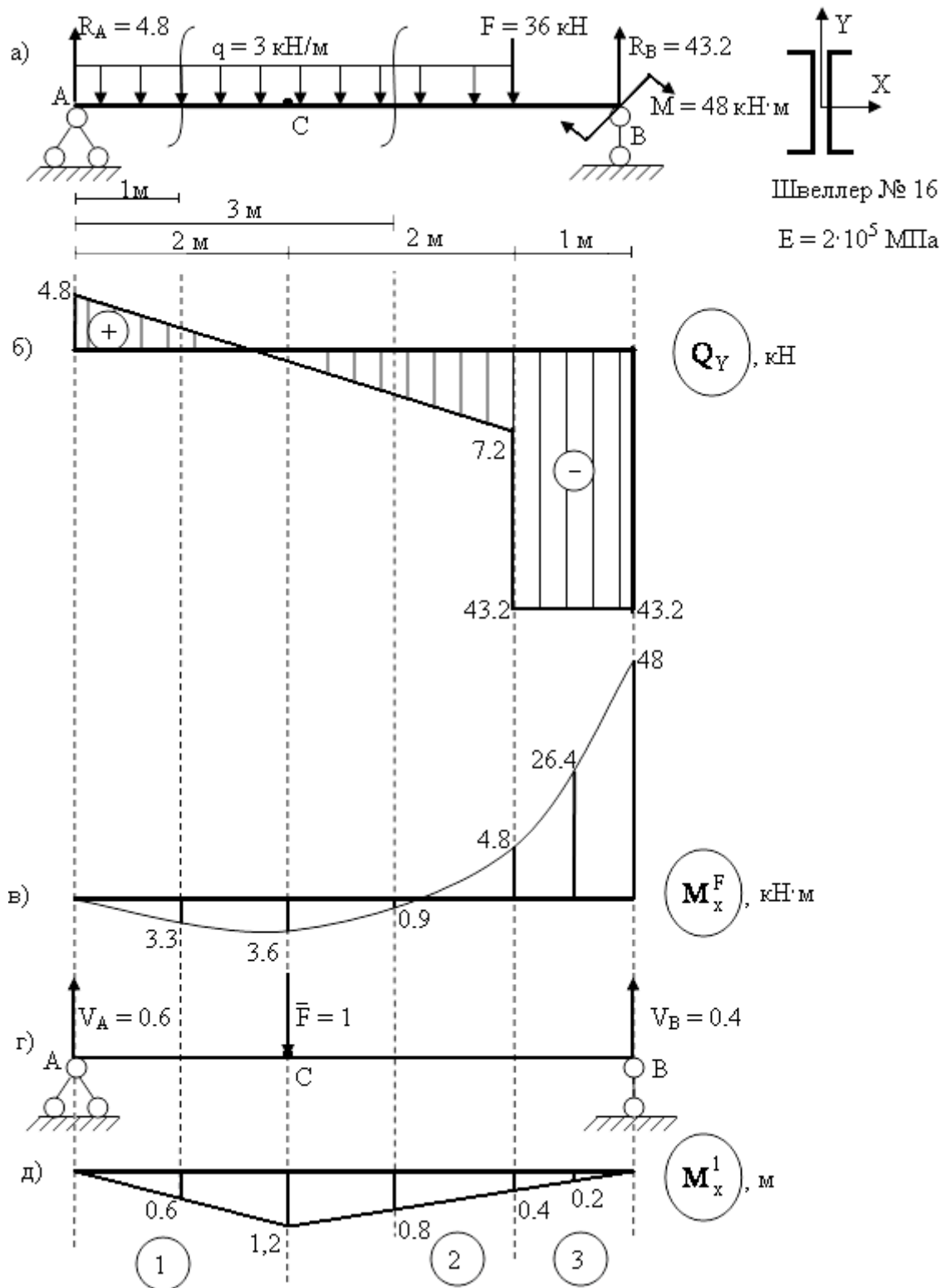


Рис. 6.19

4. Разобьем эпюры M_X^F и M_X^1 на участки «перемножения».

5. Применим к каждому участку формулу Симпсона (6.7).

1-й участок. $\ell = 2 \text{ м}$; $a = 0$; $b = 3.6$; $c = 0$; $d = 1.2$; $g = \frac{1.2}{2} = 0.6$.

Среднее значение f на эпюре M_X^F найдем, делая дополнительное сечение (рис. 6.19, а): $|f| = |R_A \cdot 1 - q \cdot 1 \cdot 0.5| = |4.8 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 0.5| = 3.3$.

Вычислим $\Delta_1 = \frac{2}{6EJ_X} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 3.3 \cdot 0.6 + 3.6 \cdot 1.2) = \frac{24.48}{6EJ_X}$.

2-й участок. $\ell = 2 \text{ м}$; $a = 3.6$; $b = -4.8$; $c = 1.2$; $d = 0.4$;

$g = \frac{1.2 + 0.4}{2} = 0.8$; $|f| = |R_A \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1.5| = |4.8 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 1.5| = 0.9$.

Тогда $\Delta_2 = \frac{2}{6EJ_X} (3.6 \cdot 1.2 + 4 \cdot 0.9 \cdot 0.8 - 4.8 \cdot 0.4) = \frac{10.56}{6EJ_X}$,

3-й участок. $\ell = 1 \text{ м}$; $a = 4.8$; $b = 48$; $c = 0.4$; $d = 0$; $g = 0.2$;

$|f| = \frac{|-4.8 - 48|}{2} = 26.4$.

$\Delta_3 = \frac{1}{6EJ_X} (-4.8 \cdot 0.4 - 4 \cdot 26.4 \cdot 0.2 + 48 \cdot 0) = -\frac{23.04}{6EJ_X}$.

6. Складывая полученные значения, определяем перемещение сечения:

$$v_C = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \frac{24.48}{6EJ_X} + \frac{10.56}{6EJ_X} + \frac{23.04}{6EJ_X} = \frac{12}{6EJ_X}.$$

7. Найдем жесткость балок EJ_X . Используя сортамент табл. 4, находим для швеллера № 16: $J_X^{шв} = 93.4 \text{ см}^4$. Сечение нашей балки состоит из двух швеллеров, поэтому

$$J_X = 2 \cdot J_X^{шв} = 2 \cdot 93.4 \text{ см}^4 = 186.8 \text{ см}^4 = 186.8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 \text{ и}$$

$$EJ_X = 2 \cdot 10^8 \text{ кПа} \cdot 186.8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 373.6 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

8. Окончательно имеем $v_C = \frac{12}{6 \cdot 373.6} = 0.0053 \text{ м}$. Перемещение сечения в точке C происходит вниз, так как $v_C > 0$, т.е. направление перемещения должно совпадать с направлением единичной силы, которая была направлена вниз (рис. 6.19, а).

Ответ: прогиб сечения в точке C равен $v_C = 0.0053 \text{ м}$.

6.8. Методические указания к заданию № 10

1. Выписать значения опорных реакций из решения задания № 2 задачи 1, а и б.
2. Использовать эпюры изгибающих моментов M_x (грузовая эпюра) из результатов задания № 7.
3. Строим единичную балку. Для этого освобождаем заданную балку от **всех** нагрузок и к точке K , **прогиб** которой следует определить, прикладываем фиктивную **силу** $\bar{F} = 1$.
4. Строим единичную эпюру M_x^I , то есть эпюру изгибающих моментов для единичной балки.
5. Определяем количество участков перемножения, те участки, где характер эпюры моментов не меняется.
6. К каждому участку применяем формулы численного интегрирования Симпсона или трапеций. Сумма полученных на участках результатов дает величину вертикального перемещения, а знак указывает направление перемещения.

6.9. Варианты задания № 10

С помощью метода Мора определить величину и направление вертикального перемещения сечения балки в точке K для

а) деревянной балки с модулем продольной упругости

$E = 1 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ и расчетным сопротивлением $R = 16 \text{ МПа}$ из задачи 1, а задания № 2;

б) стальной балки с $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и $R = 240$ МПа из задачи 1, б задания № 2.

Вид сечения балки указан справа от неё. Можно использовать результаты расчета из задания № 8.

7. Сложное сопротивление

Сложным сопротивлением называется явление, возникающее в стержне под действием внешних сил, которые вызывают в стержне одновременно несколько простых деформаций: растяжение – сжатие, сдвиг, кручение, поперечный изгиб. На практике по отдельности такие простые деформации встречаются весьма редко.

В общем случае действующие внешние силы в любом сечении стержня могут создать три силовых и три моментных внутренних фактора (рис. 7.1), а именно:

а) три силы: N – продольная сила, Q_X и Q_Y – поперечные силы. Это проекции главного вектора на оси Z, X, Y .

б) три момента: M_Z – крутящий момент, M_X и M_Y – изгибающие моменты. Это проекции главного момента на оси Z, X, Y .

Одновременное возникновение в сечении всех шести факторов будет самым общим случаем сложного сопротивления. Каждый из этих шести внутренних факторов в любой точке сечения вызовет шесть соответствующих напряжений: три нормальных $\sigma_N, \sigma_{M_X}, \sigma_{M_Y}$ и три касательных напряжения $\tau_{Q_X}, \tau_{Q_Y}, \tau_{M_Z}$.

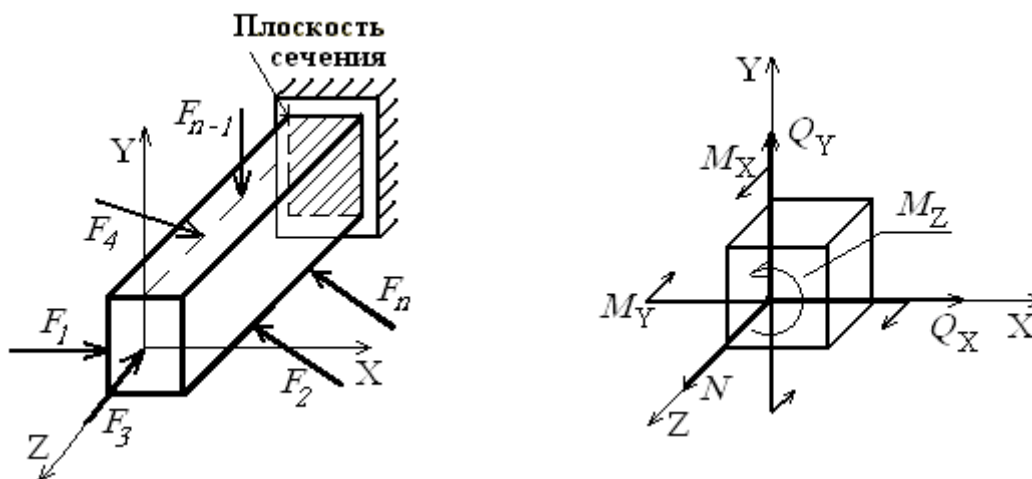


Рис. 7.1

7.1. Косой изгиб

Косым называют изгиб, при котором плоскость действия изгибающего момента, возникающего в сечении, не совпадает ни с одной из главных плоскостей бруса OYZ и OXZ , при этом плоскость действия изгибающего момента обязательно должна проходить через центр тяжести сечения (рис. 7.2). Оси OX , OY – главные центральные оси сечения.

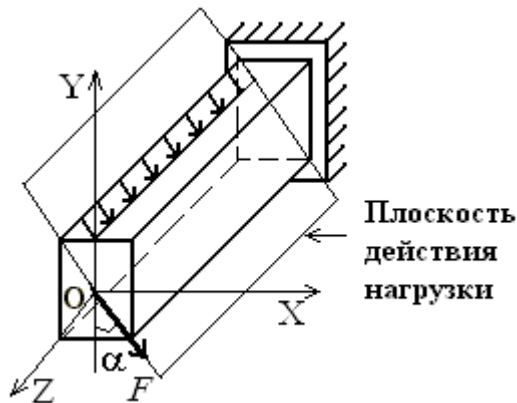


Рис. 7.2

внутренних силовых фактора: Q_X , Q_Y , M_X и M_Y .

Косой изгиб удобнее всего рассматривать как одновременный изгиб в двух плоскостях OYZ и OXZ . Тогда получим две системы сил, лежащих в плоскостях OXZ и OYZ , каждая из которых вызывает прямой изгиб. В этом случае в сечении бруса возникает четыре

7.2. Определение напряжений при косом изгибе

Рассмотрим стержень произвольного поперечного сечения, испытывающий деформацию косоуго изгиба (рис. 7.3). При этом внутренние усилия должны быть

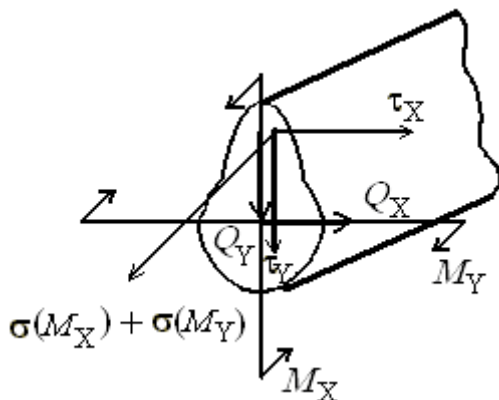


Рис. 7.3

$$M_X \neq 0;$$

$$M_Y \neq 0;$$

$$Q_X \neq 0;$$

$$Q_Y \neq 0.$$

В произвольной точке K возникают нормальные (σ) и касательные (τ) напряжения. Касательные напряжения при косом изгибе

чаще всего малы, и ими в расчетах можно пренебречь. Поэтому расчет на прочность при косом изгибе будем вести только по нормальным напряжениям.

Нормальные напряжения в любой точке поперечного сечения стержня определяют на основе принципа независимости действия сил:

$$\sigma = \pm \frac{M_X}{J_X} \cdot |y| \pm \frac{M_Y}{J_Y} \cdot |x|, \quad (7.1)$$

где M_X , M_Y – изгибающие моменты; J_X , J_Y – моменты инерции поперечного сечения относительно главных центральных осей; x , y – координаты точки, где отыскивается напряжение.

Изгибающие моменты M_X и M_Y в формуле берутся со знаком «+», если в точках первой четверти им соответствуют растягивающие нормальные напряжения, и со знаком «-», если сжимающие. Например, см. рис. 7.4.

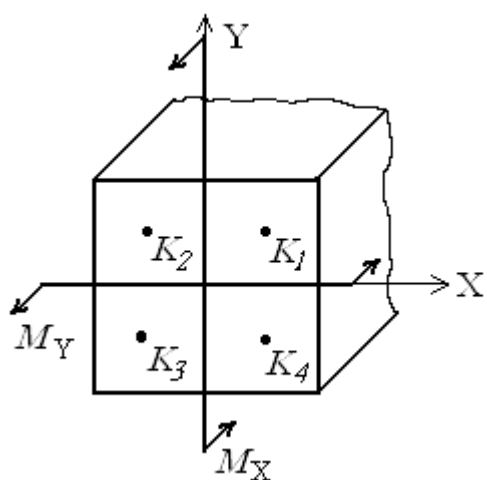


Рис. 7.4

$$\begin{aligned} \sigma^{K_1} &= + \frac{M_X}{J_X} |y_{K_1}| - \frac{M_Y}{J_Y} |x_{K_1}|; \\ \sigma^{K_2} &= + \frac{M_X}{J_X} |y_{K_2}| + \frac{M_Y}{J_Y} |x_{K_2}|; \\ \sigma^{K_3} &= - \frac{M_X}{J_X} |y_{K_3}| + \frac{M_Y}{J_Y} |x_{K_3}|; \\ \sigma^{K_4} &= - \frac{M_X}{J_X} |y_{K_4}| - \frac{M_Y}{J_Y} |x_{K_4}|. \end{aligned}$$

Условие прочности по нормальным напряжениям имеет вид:

$$|\sigma_{max}| \leq R. \quad (7.2)$$

7.3. Нейтральная линия и силовая плоскость при косом изгибе

В точках **нейтральной линии** нормальные напряжения равны нулю ($\sigma = 0$), её уравнение имеет вид

$$\frac{M_X}{J_X} |y_N| + \frac{M_Y}{J_Y} |x_N| = 0. \quad (7.3)$$

Из формулы (7.3) видно, что координаты x_N и y_N связаны линейно, следовательно, это уравнение прямой линии (рис. 7.5). Координаты $x_N = 0$, $y_N = 0$ удовлетворяют уравнению (7.3), поэтому нейтральная линия при косом изгибе проходит через центр тяжести сечения.

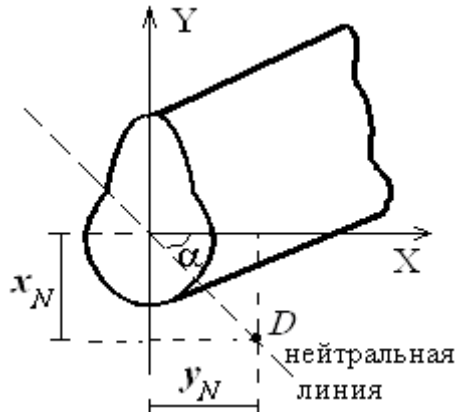


Рис. 7.5

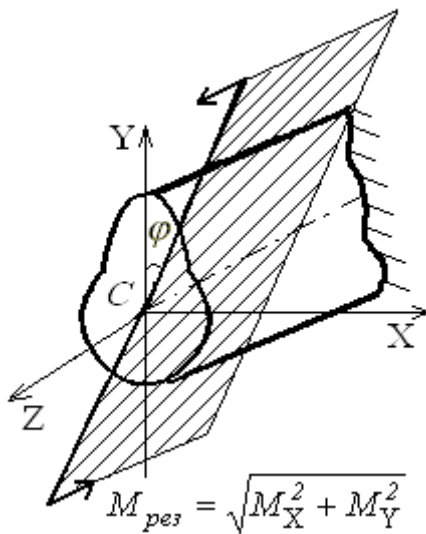


Рис. 7.6

Точка D с координатами $(x_N; y_N)$ принадлежит нейтральной линии. Вычислим угол наклона α нейтральной линии к оси X , используя уравнение (7.3):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_N}{x_N} = -\frac{M_Y}{M_X} \cdot \frac{J_X}{J_Y}. \quad (7.4)$$

Силовая плоскость – это плоскость действия результирующего момента $M_{рез}$ (рис. 7.6). Угол наклона этой плоскости к вертикали принято обозначать буквой φ , и $\operatorname{tg} \varphi = \frac{M_Y}{M_X}$.

(7.4) можно записать в виде

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{J_X}{J_Y}. \quad (7.5)$$

Свойства нейтральной линии

1. Если $J_X \neq J_Y$, то $\alpha \neq \varphi$, т.е. силовая плоскость и нейтральная линия не перпендикулярны друг другу.
2. Если $J_X = J_Y$, то $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \varphi$, т.е. нейтральная линия и силовая плоскость перпендикулярны друг другу. Стержень испытывает плоский изгиб.

3. Знак « \rightarrow » в формуле (7.5) показывает, что силовая плоскость и нейтральная линия при косом изгибе проходят через противоположные квадранты.

7.4. Наибольшие нормальные напряжения при косом изгибе

Пусть в плоскостях OZY и OXZ действуют изгибающие моменты соответственно M_X и M_Y , которые создают растягивающие (+) и сжимающие (-) нормальные напряжения в сечении балки. Суммарные максимальные растягивающие $\sigma_{max}^{раст}$ и сжимающие $\sigma_{max}^{сж}$ нормальные напряжения будут действовать в точках, максимально удаленных от нейтральной линии (рис. 7.7).

Условия прочности при изгибе записываются в виде:

$$\sigma_{max}^{раст} = \sigma_A \leq R_{раст}, \quad \sigma_{max}^{сж} = \sigma_B \leq R_{сж},$$

где $R_{раст}$ и $R_{сж}$ – расчетные значения напряжения и сжатия.

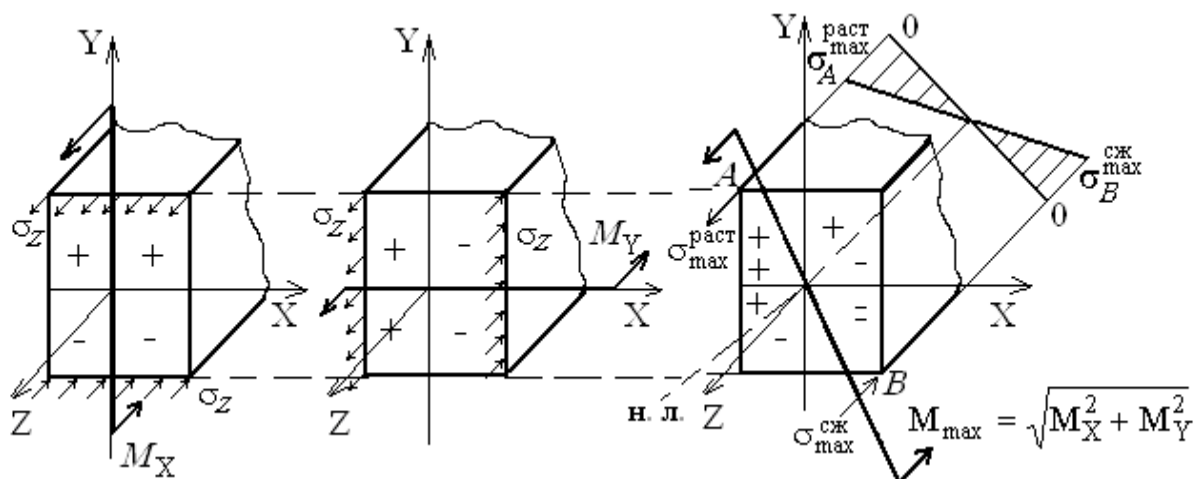


Рис. 7.7

7.5. Пример решения задания № 11. Расчет на прочность при косом изгибе

Для стальной консольной балки с поперечным сечением, состоящим из двух швеллеров № 30, найти положение нейтральной линии, построить эпюру нормальных напряжений в долях силы P вдоль оси, перпендикулярной нейтральной линии, если на неё действуют сила P , лежащая в плоскости OXZ , и момент $M = 0.5 \cdot P$ – в плоскости OYZ (рис. 7.8, а). Определить грузоподъемность балки, полагая расчетное сопротивление $R = 240 \text{ МПа}$.

Дано: P , $M = 0.5 \cdot P$, $R = 240 \text{ МПа}$.

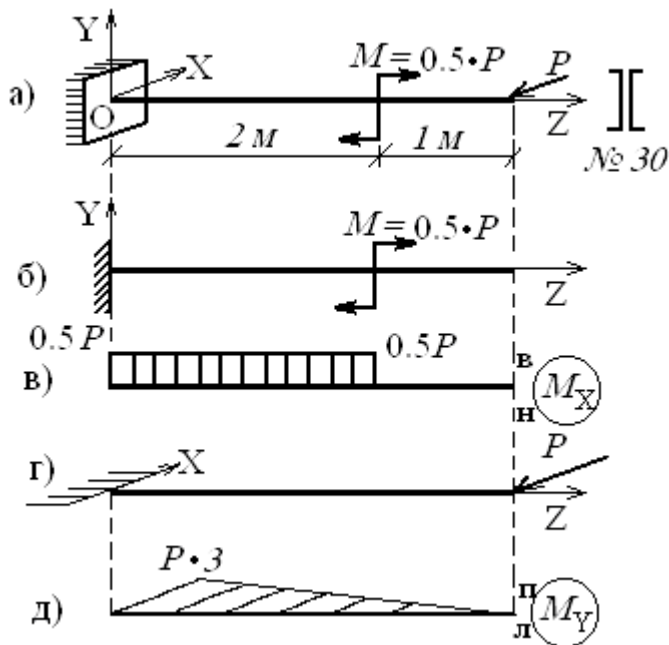


Рис. 7.8

Определить: силу P , положение нейтральной линии в опасном сечении, построить эпюру нормальных напряжений в долях силы P вдоль оси, перпендикулярной нейтральной линии.

Решение. 1. Определим геометрические характеристики сечения. По таблице 4 Приложения I стандартных профилей записываем для собственных осей швеллера x и y :

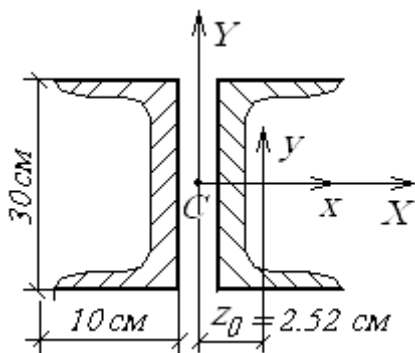


Рис. 7.9

$$J_x^{[№ 30]} = 5810 \text{ см}^4, \quad J_y^{[№ 30]} = 327 \text{ см}^4,$$

$$A^{[№ 30]} = 40.5 \text{ см}^2, \quad z_0^{[№ 30]} = 2.52 \text{ см}.$$

XCY – главная центральная система координат: ось X параллельна оси x , ось Y параллельна оси y . Вычислим главные центральные моменты инерции (см. п. 3.2):

$$J_X^I = 2 \cdot J_x^{[№ 30]} = 2 \cdot 5810 \text{ см}^4 = 11620 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

$$J_Y^I = 2 \left[J_y^{[№ 30]} + (z_0^{[№ 30]})^2 A^{[№ 30]} \right] = 2 \cdot [327 + 2.52^2 \cdot 40.5] \approx 1168 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

2. Рассмотрим вертикальную плоскость OYZ (рис. 7.8, б) и построим эпюру M_x (рис. 7.8, в).

3. Затем строим эпюру M_y (рис. 7.8, д), рассматривая горизонтальную плоскость $O X Z$. Детали построения эпюр см. в п. 4.9.

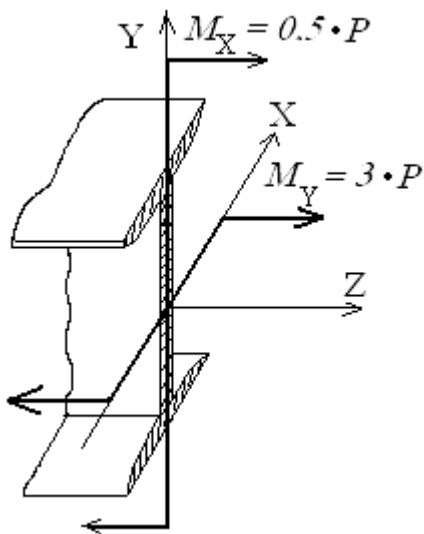


Рис. 7.10

4. Так как изгибающие моменты оказались наибольшими в сечении, ближайшем к жесткой заделке, то оно является опасным:

$$M_x = 0.5 \cdot P^6 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$M_y = 3 \cdot P^n \text{ кН} \cdot \text{м}$. Индексы у силы P означают, что растянуто v – верхнее волокно, n – правое волокно (рис. 7.10). Силовая плоскость, т.е. плоскость действия результирующего момента

$$M_{рез} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}, \text{ проходит через I}$$

и III квадранты. Тогда по свойству 3 нейтральная линия должна проходить через II и IV квадранты.

Воспользовавшись формулой (7.4), вычисляем угол наклона нейтральной линии к оси X

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y} = -\frac{3P}{0.5P} \cdot \frac{11620 \cdot 10^{-8}}{1168 \cdot 10^{-8}} \approx -59.69;$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}(-59.69), \text{ следовательно, } \alpha \approx -89^\circ.$$

Знак « \leftarrow » показывает, что угол α откладывается от оси X по ходу часовой стрелки.

5. Используя рис. 7.9, определяем координаты угловых точек сечения A, L, B, K в главной центральной системе координат CXY :

$$A(X_A = 10, Y_A = 15); L(X_L = -10, Y_L = 15); B(X_B = -10, Y_B = -15);$$

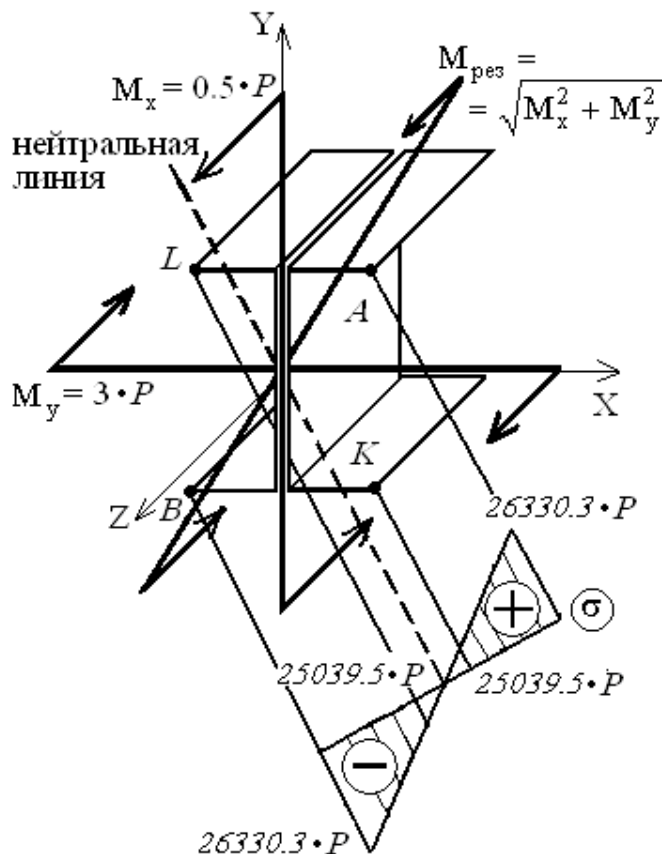


Рис. 7.11

$$K(X_K = 10, Y_K = -15).$$

По формуле (7.1) подсчитаем напряжения в точках A, L, B, K.

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{M_x}{J_x} \cdot Y_A + \frac{M_y}{J_y} \cdot X_A = \\ &= \frac{0.5 \cdot P}{11620 \cdot 10^{-8}} \cdot 15 \cdot 10^{-2} + \\ &+ \frac{3 \cdot P}{1168 \cdot 10^{-8}} \cdot 10 \cdot 10^{-2} = \\ &= 645.4 \cdot P - 25684.9 \cdot P \approx \\ &\approx 26330.3 \cdot P \text{ м}^{-2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_L &= \frac{M_x}{J_x} \cdot Y_L + \frac{M_y}{J_y} \cdot X_L = \\ &= \frac{0.5 \cdot P}{11620 \cdot 10^{-8}} \cdot 15 \cdot 10^{-2} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{3 \cdot P}{1168 \cdot 10^{-8}} \cdot (-10) \cdot 10^{-2} = 645.4 \cdot P - 25684.9 \cdot P \approx -25039.5 \cdot P \text{ м}^{-2};$$

$$\begin{aligned} \sigma_B &= \frac{M_x}{J_x} \cdot Y_B + \frac{M_y}{J_y} \cdot X_B = \frac{0.5 \cdot P}{11620 \cdot 10^{-8}} \cdot (-15) \cdot 10^{-2} + \\ &+ \frac{3 \cdot P}{1168 \cdot 10^{-8}} \cdot (-10) \cdot 10^{-2} = -645.4 \cdot P - 25684.9 \cdot P \approx -26330.3 \cdot P \text{ м}^{-2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_K &= \frac{M_x}{J_x} \cdot Y_K + \frac{M_y}{J_y} \cdot X_K = \frac{0.5 \cdot P}{11620 \cdot 10^{-8}} \cdot (-15) \cdot 10^{-2} + \\ &+ \frac{3 \cdot P}{1168 \cdot 10^{-8}} \cdot 10 \cdot 10^{-2} = -645.4 \cdot P - 25684.9 \cdot P \approx 25039.5 \cdot P \text{ м}^{-2}. \end{aligned}$$

Изобразим перпендикуляр на продолжении нейтральной линии и на нем построим эпюру напряжений (рис. 7.11).

6. Вычислим грузоподъемность балки. Выпишем значение максимального нормального напряжения (рис. 7.11):

$$|\sigma_{max}| = 26330.3 \cdot P.$$

По условию прочности (7.2): $|\sigma_{max}| \leq R$ или $26330.3 \cdot P \leq 240 \text{ МПа}$.

Решая неравенство, имеем $P \leq \frac{240}{26330.3} \text{ МН}$ или $P \leq 0.0091 \text{ МН}$.

Ответ: $P \leq 0.0091 \text{ МН}$.

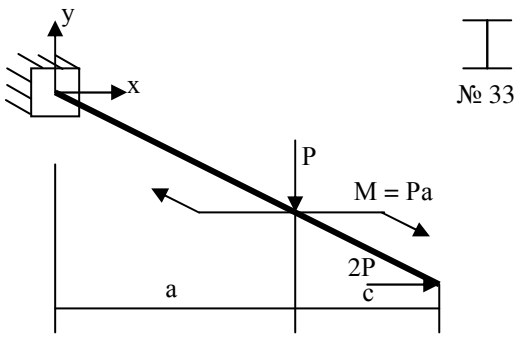
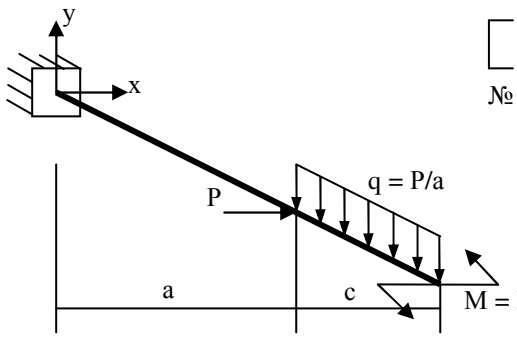
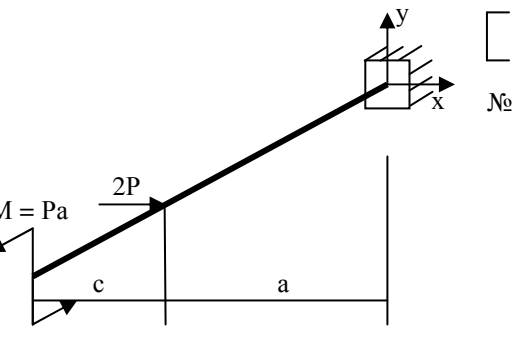
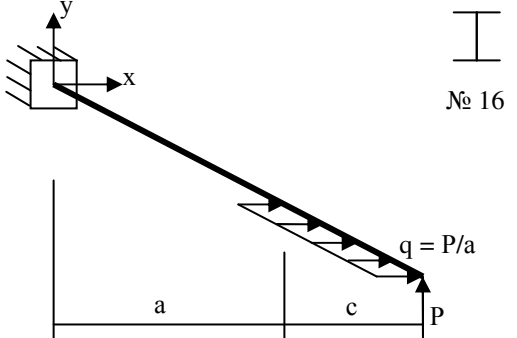
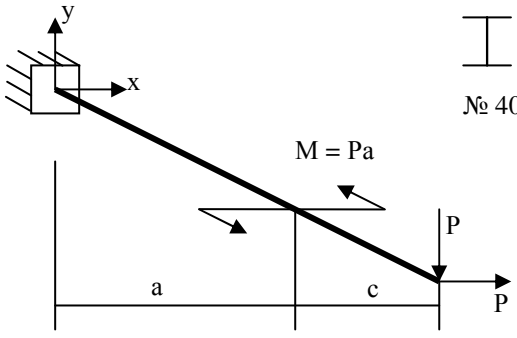
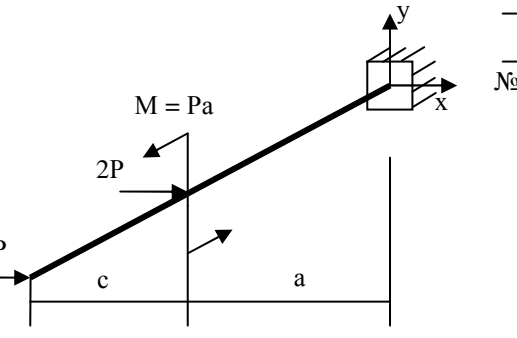
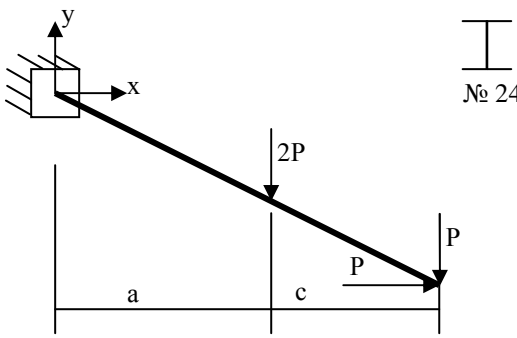
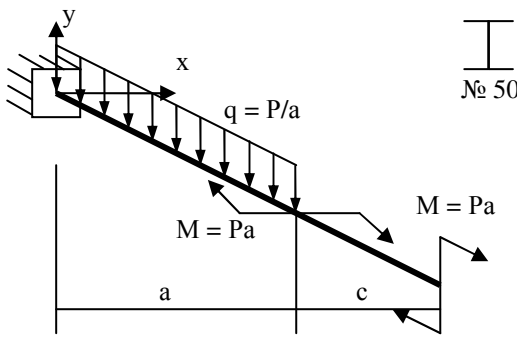
7.6. Методические указания к заданию № 11

1. Решение задачи начинаем с построения эпюр изгибающих моментов.
2. По эпюрам определяем опасное сечение.
3. Изображаем сечение и показываем на чертеже изгибающие моменты.
4. Определяем положение нейтральной линии и изображаем её.
5. Находим опасные точки, т.е. наиболее удаленные от нейтральной линии точки.
6. Используя формулу (7.1) для вычисления напряжений при косом изгибе, рассчитываем напряжения в опасных точках.
7. Записываем условие прочности и вычисляем неизвестную силу.
8. Проводим нулевую линию, перпендикулярную нейтральной линии, и линии, параллельные нейтральной, проходящие через опасные точки сечения. От нулевой линии откладываем значения нормальных напряжений в опасных точках, соединяя которые, получаем эпюры нормальных напряжений в опасном сечении.

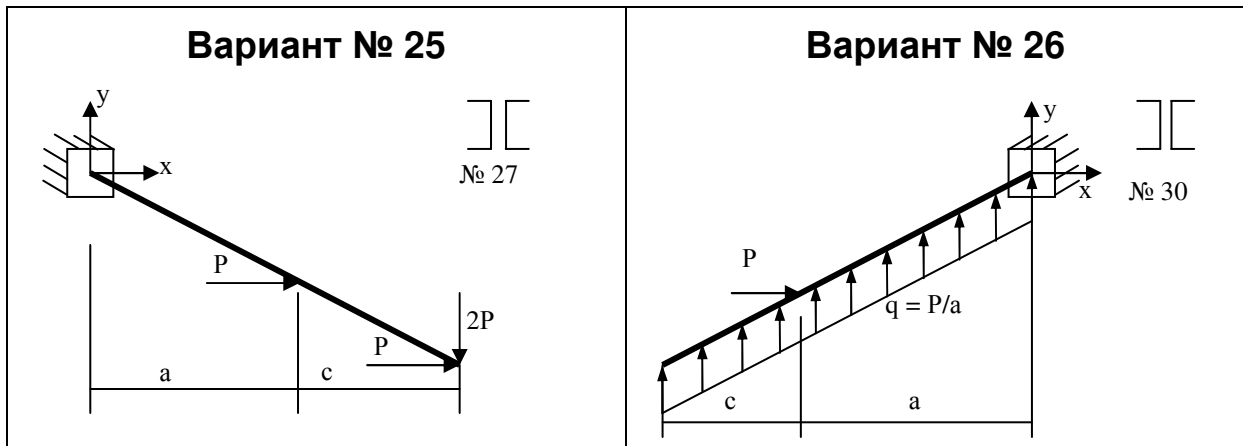
7.7. Варианты задания № 11

Для стальной балки определить положение нейтральной линии. Построить эпюру нормальных напряжений в долях силы P вдоль оси, перпендикулярной нейтральной линии. Вычислить грузоподъемность балки, если $R = 240 \text{ МПа}$, считая $a = 2 \text{ м}$, $c = 1 \text{ м}$.

<p style="text-align: center;">Вариант № 1</p> <p style="text-align: right;">№ 27</p>	<p style="text-align: center;">Вариант № 2</p> <p style="text-align: right;">№ 24</p>
<p style="text-align: center;">Вариант № 3</p> <p style="text-align: right;">№ 20</p>	<p style="text-align: center;">Вариант № 4</p> <p style="text-align: right;">№ 45</p>
<p style="text-align: center;">Вариант № 5</p> <p style="text-align: right;">№ 36</p>	<p style="text-align: center;">Вариант № 6</p> <p style="text-align: right;">№ 18</p>
<p style="text-align: center;">Вариант № 7</p> <p style="text-align: right;">№ 30</p>	<p style="text-align: center;">Вариант № 8</p> <p style="text-align: right;">№ 18a</p>

<p style="text-align: center;">Вариант № 9</p>  <p style="text-align: right;">№ 33</p>	<p style="text-align: center;">Вариант № 10</p>  <p style="text-align: right;">№ 22</p>
<p style="text-align: center;">Вариант № 11</p>  <p style="text-align: right;">№ 16</p>	<p style="text-align: center;">Вариант № 12</p>  <p style="text-align: right;">№ 16</p>
<p style="text-align: center;">Вариант № 13</p>  <p style="text-align: right;">№ 40</p>	<p style="text-align: center;">Вариант № 14</p>  <p style="text-align: right;">№ 22</p>
<p style="text-align: center;">Вариант № 15</p>  <p style="text-align: right;">№ 24</p>	<p style="text-align: center;">Вариант № 16</p>  <p style="text-align: right;">№ 50</p>

<p style="text-align: center;">Вариант № 17</p>	<p style="text-align: center;">Вариант № 18</p>
<p style="text-align: center;">Вариант № 19</p>	<p style="text-align: center;">Вариант № 20</p>
<p style="text-align: center;">Вариант № 21</p>	<p style="text-align: center;">Вариант № 22</p>
<p style="text-align: center;">Вариант № 23</p>	<p style="text-align: center;">Вариант № 24</p>



7.8. Расчет на прочность при внецентренном действии продольных сил

Внецентренным растяжением (сжатием) называется такой вид нагружения, при котором равнодействующая внешних сил F не совпадает с осью Z стержня, но параллельна ей и смещена относительно этой оси (рис. 7.12).

Силу F можно привести к оси бруса и представить внецентренное растяжение (сжатие) как совместное действие центрального растяжения (сжатия) и чистого косоугольного изгиба. На рис. 7.12 приведен пример внецентренного сжатия, а приведение силы F к оси – на рис. 7.13.

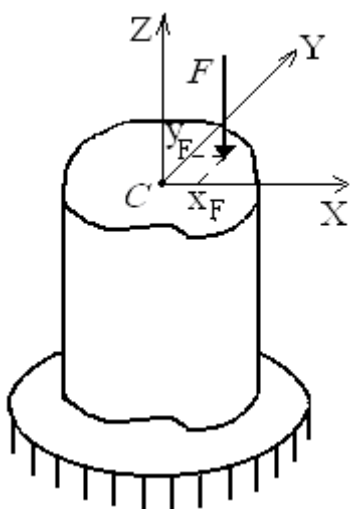


Рис. 7.12. Внецентренное сжатие

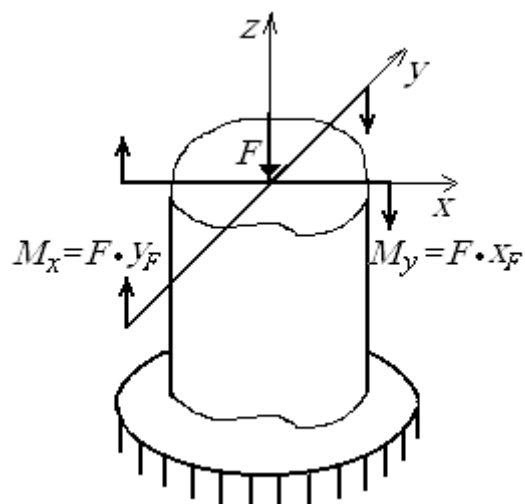


Рис. 7.13

Такой вид деформации испытывают короткие стержни. В этом случае все сечения являются равноопасными, и нет необходимости в построении эпюр внутренних силовых факторов. Расчет на прочность при этом производят, используя формулы:

$$\sigma = \pm \frac{F}{A} \pm \frac{M_x \cdot y}{J_x} \pm \frac{M_y \cdot x}{J_y}, \quad (7.6)$$

$$\sigma = \pm \frac{F}{A} \left[1 + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} \right], \quad (7.7)$$

где x_F, y_F – координаты точки приложения силы в главной центральной системе координат; x, y – координаты точки, в которой требуется посчитать напряжение; i_x, i_y – главные радиусы инерции поперечного сечения. Квадраты главных радиусов инерции определяются как $i_x^2 = \frac{J_x}{A}$, $i_y^2 = \frac{J_y}{A}$, здесь J_x, J_y – главные центральные моменты инерции поперечного сечения. F – равнодействующая внешних сил, A – площадь поперечного сечения. В случае действия на стержень сжимающей силы F в формуле (7.7) принимают знак «–», при действии на стержень растягивающей силы F – знак «+».

7.9. Нейтральная линия при внецентренном действии продольных сил

Правильное определение положения нейтральной линии позволяет отвечать на различные вопросы, например, нахождение опасных точек сечений, максимальных напряжений в областях растяжения–сжатия, восстановление координат точки приложения силы. Чтобы найти положение нейтральной линии, записываем уравнение (7.7) при условии $\sigma = 0$:

$$1 + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} = 0. \quad (7.8)$$

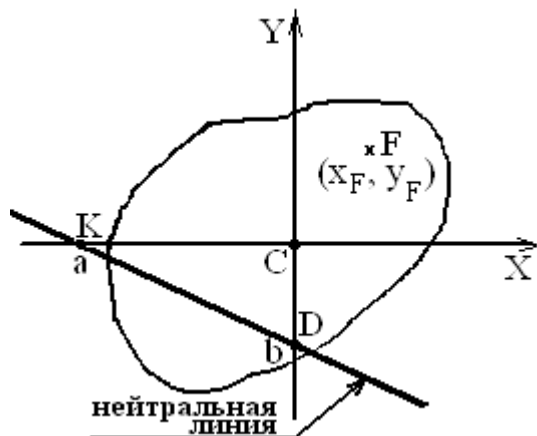


Рис. 7.14

Получили уравнение прямой. Для построения нейтральной линии вычислим координаты точек пересечения этой прямой с осями X и Y . Полагая в (7.8)

$$y = 0, \text{ находим } x = -\frac{i_y^2}{x_F} \equiv a, \text{ и}$$

$$\text{при } x = 0 - y = -\frac{i_x^2}{y_F} \equiv b. \text{ Линия,}$$

проходящая через точки $K(a; 0)$ и $D(0; b)$, будет нейтральной линией (рис. 7.14).

Анализ уравнения (7.8) позволяет сформулировать следующие свойства нейтральной линии:

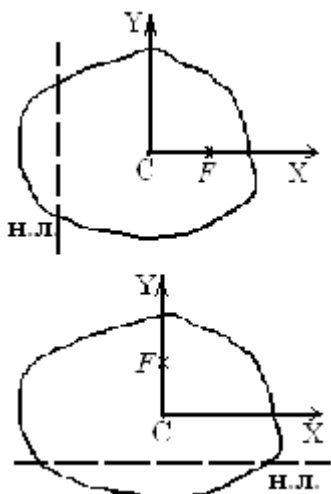


Рис. 7.15

1. нейтральная линия не проходит через центр тяжести сечения;
2. точка приложения силы F и нейтральная линия находятся в разных полуплоскостях относительно центра тяжести сечения;
3. если точка приложения силы F лежит на оси, то нейтральная линия обязательно проходит в противоположной полуплоскости параллельно второй оси (рис. 7.15).

7.10. Ядро сечения

Строительные конструкции обычно изготавливаются из хрупких материалов, таких как кирпич, бетон, железобетон. Они хорошо работают на сжатие и практически мгновенно разрушаются при воздействии растягивающих усилий. Поэтому при использовании хрупких материалов всегда необходимо заботиться о сжатии стержня и не допускать его растяжения, т.е. определять положение ядра сечения.

Ядро сечения – это область, очерченная вокруг центра тяжести сечения, при попадании в неё силы F , во всех точках сечения возникают напряжения одного знака.

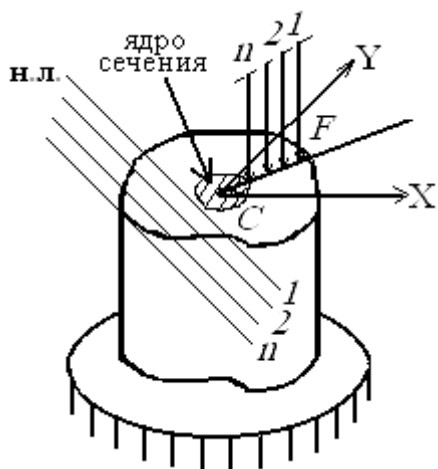


Рис. 7.16

Чем ближе точка приложения силы F к центру тяжести поперечного сечения C стержня, тем дальше нейтральная линия от точки C (рис. 7.16). При приближении точки приложения силы к центру тяжести сечения, в какой-нибудь момент « n »-я нейтральная линия займет положение касательной к контуру сечения, то есть всё сечение окажется в зоне сжатия.

Перемещая точку приложения силы по всем направлениям от центра тяжести сечения, можно построить границу области предельных точек приложения силы, т.е. границу ядра сечения. Если внешний контур сечения, к которому можно провести касательные, состоит из прямолинейных отрезков, то ядро сечения – многоугольник. Этот многоугольник имеет столько вершин, сколько касательных можно провести к контуру. Если сечение обладает осью симметрии, то ядро сечения тоже будет симметрично относительно этой же оси.

7.11. Примеры решения задания № 12. Расчеты на прочность и жесткость при внецентренном действии продольных сил

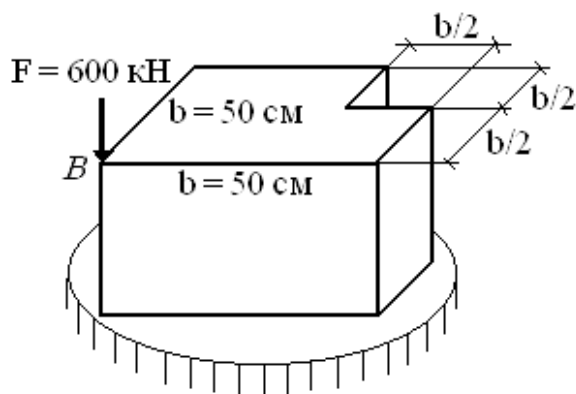


Рис. 7.17

Пример 1. Чугунный короткий стержень сжимается продольной силой $F = 600$ кН, приложенной в точке B (рис. 7.17). Определить положение нейтральной линии, наибольшие растягивающие и наибольшие сжимающие напряжения.

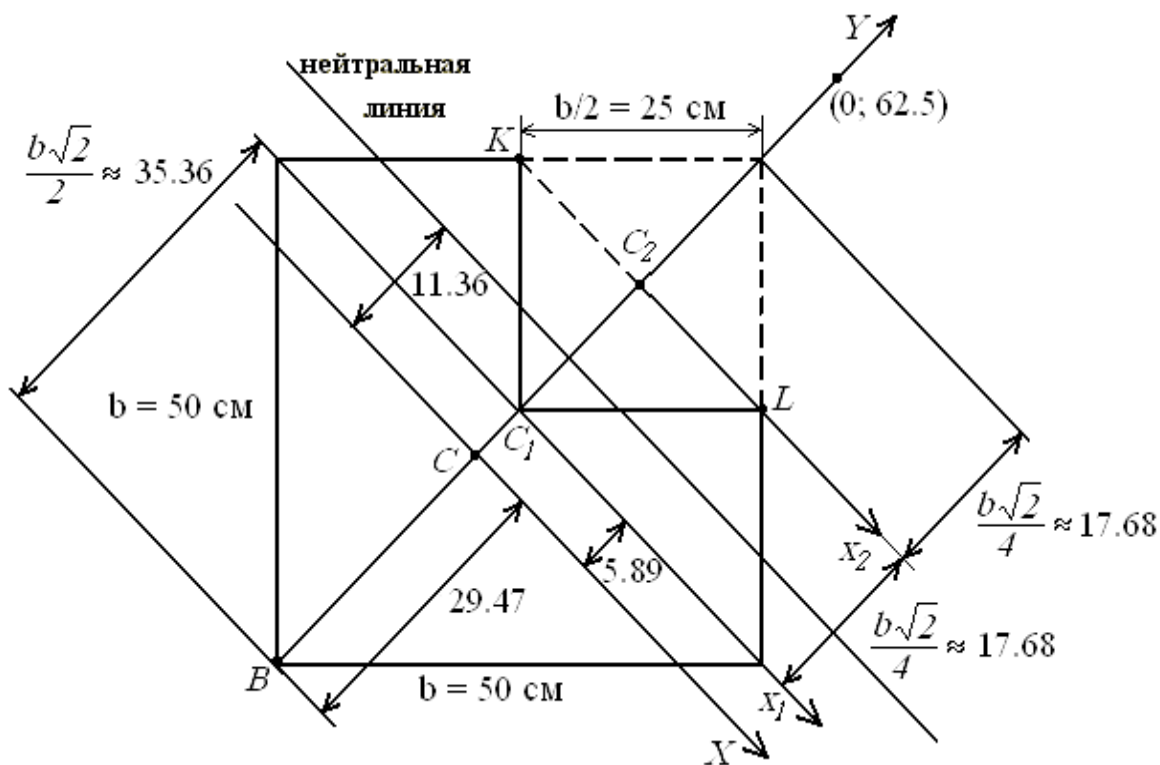


Рис. 7.18

Дано: чугу́нный стержень размерами $b \times b$, $b = 50 \text{ см}$, сила $F = 600 \text{ кН}$.

Определить: положение нейтральной линии, вычислить наибольшие растягивающие и наибольшие сжимающие напряжения.

Решение: 1. Изображаем сечение в масштабе и показываем основные размеры (рис. 7.18).

2. Определяем положение главных центральных осей. Сечение обладает осью симметрии, поэтому ось Y можем показать сразу (рис. 7.18). Разобьем сечение на два квадрата: большой $b \times b$ и малый $\frac{b}{2} \times \frac{b}{2}$. Выберем произвольную вспомогательную систему координат, например, $C_1 X_1 Y_1$. Тогда в этой системе координаты точек $C_1 (0; 0)$ и $C_2 (0; b\sqrt{2}/4)$. Общую площадь сечения A получим вычитанием площади малого квадрата $A_2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 625 \text{ см}^2$ из площа-

ди большого $A_1 = b^2 = 2500 \text{ см}^2$:

$$A = b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 2500 - 625 = 1875 \text{ см}^2, \text{ и по формулам (1.11) имеем}$$

$$x_c = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A} = 0;$$

$$y_c = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A} = \frac{17.68 \cdot (-625)}{1875} = -5.89 \text{ см}.$$

На чертеже показываем положение центра тяжести сечения $C(0; -5.89)$ во вспомогательной системе координат $C_1 X_1 Y$.

Вводим центральную систему координат: ось X проводим через центр тяжести $C(0; -5.89)$ перпендикулярно оси Y (см. п. 3.3). Система координат CXY – главная центральная, т.к. сечение симметричное.

3. Находим значения главных центральных моментов инерции и квадратов главных радиусов сечения (см. формулы (3.1)):

$$J_{Xc} = J_{Xc}^{(1)} - J_{Xc}^{(2)} = \frac{b^4}{12} - a_1^2 \cdot A_1 - \left(\frac{(b/2)^4}{12} - (5.89 + a_2^2)^2 \cdot A_2 \right) =$$

$$= 520833.33 - 86725 - 32552.08 + 347212.5 \approx 748768.75 \text{ см}^4,$$

здесь $a_1 = 5.89 \text{ см}$ – расстояние между осями X и X_1 ; и

$a_2 = 5.89 + 17.68 = 23.57$ – расстояние между осями X и X_2 ;

$$J_{Yc} = J_{Yc}^{(1)} - J_{Yc}^{(2)} = \frac{b^4}{12} - \frac{(b/2)^4}{12}$$

$$= 520833.33 - 32552.08 \approx 488281.25 \text{ см}^4;$$

$$i_x^2 = \frac{J_x}{A} = \frac{748768.75 \text{ см}^4}{1875 \text{ см}^2} \approx 399.34 \text{ см}^2;$$

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{488281.25 \text{ см}^4}{1875 \text{ см}^2} \approx 260.42 \text{ см}^2.$$

4. Определяем координаты B – точки приложения силы F в главной центральной системе координат CXY :

$$B \left(x_F = 0; y_F = - \left(\frac{b\sqrt{2}}{2} - 5.89 \right) = -35.36 \right).$$

5. Уравнение нейтральной линии по формуле (7.8):

$$1 + \frac{x_F \cdot x_N}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_N}{i_x^2} = 0,$$

где x_N и y_N – координаты точек нейтральной линии. Находим точку пересечения нейтральной линии с осью Y для нашей задачи:

$$x_N = 0, \quad \text{тогда} \quad 1 + \frac{-35.36 \cdot y_N}{399.34} = 0 \quad \text{или} \quad 1 - 0.088 \cdot y_N = 0, \quad \text{т.е.}$$

$y_N = \frac{1}{0.088} \approx 11.36$. Используя свойство 3 нейтральной линии, проводим её параллельно оси X через точку $(0; 11.36)$.

6. В формуле (7.7) выбираем знак «-», т.к. на стержень действует сжимающая сила:

$$\sigma = - \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} \right),$$

здесь x и y – координаты точки, в которой считаем напряжения.

7. Из чертежа определяем опасные точки. Максимально удалена от нейтральной линии в области сжатия точка B , вычисляем напряжение в этой точке:

$$\begin{aligned} \sigma_{max}^{сж} &= - \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F \cdot x_B}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_B}{i_x^2} \right) = \\ &= - \frac{600 \text{ кН}}{1875 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \left(1 + \frac{(-29.47)(-29.47)}{399.34} \right) \approx -10.2 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Наибольшие растягивающие напряжения достигаются в точках K и L , абсциссы которых $y_K = y_L = 23.57$:

$$\sigma_{max}^{раст} = - \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F \cdot x_L}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_L}{i_x^2} \right) =$$

$$= -\frac{600 \text{ кН}}{1875 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \left(1 + \frac{(-29.47)(-23.57)}{399.34} \right) = -0.32 \cdot 10^4 \cdot (1 - 1,739) \approx 0.237 \cdot 10^4 \text{ кПа} \approx 2.37 \text{ МПа}.$$

Ответ: $\sigma_{\max}^{\text{раст}} \approx 2.37 \text{ МПа}$, $\sigma_{\max}^{\text{сж}} = -10.2 \text{ МПа}$.

Пример 2. Построить ядро сечения фигуры, заданной на рис. 7.19.

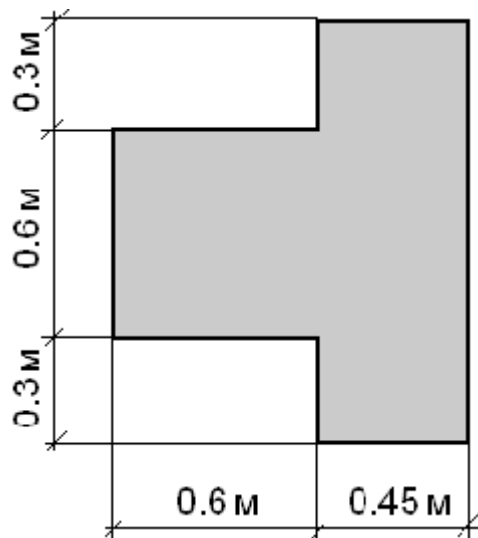


Рис. 7.19

Дано: вид и размеры поперечного сечения колонны.

Определить: координаты ядра сечения, изобразить его на чертеже.

Решение: 1. Определяем тип контура ядра сечения. Контур поперечного сечения состоит из прямолинейных отрезков, значит, и контур ядра сечения тоже должен состоять из отрезков.

2. Для построения ядра сечения проводим последовательно касательные

к контуру сечения. Число предельных касательных к сечению стержня – это и есть количество вершин многоугольника ядра сечения. Шесть предельных касательных, следовательно, 6 вершин.

3. Находим положение главных центральных осей. Поперечное сечение стержня обладает горизонтальной осью симметрии, поэтому ось X можем провести сразу вдоль этой оси (рис. 7.20). Вспомогательную ось Y_0 проводим произвольно, но перпендикулярно к оси X , например, через точку O , и получаем систему координат OXY_0 . Поперечное сечение стержня удобно разделить на прямоугольник и квадрат. Записываем координаты центров тяжести этих фигур C_1 и C_2 во вспомогательной системе координат OXY_0 :

$C_1(x_1 = 0.225; y_1 = 0)$ – центр тяжести прямоугольника,

$C_2(x_2 = -0.3; y_2 = 0)$ – центр тяжести квадрата.

Вычисляем площади этих фигур:

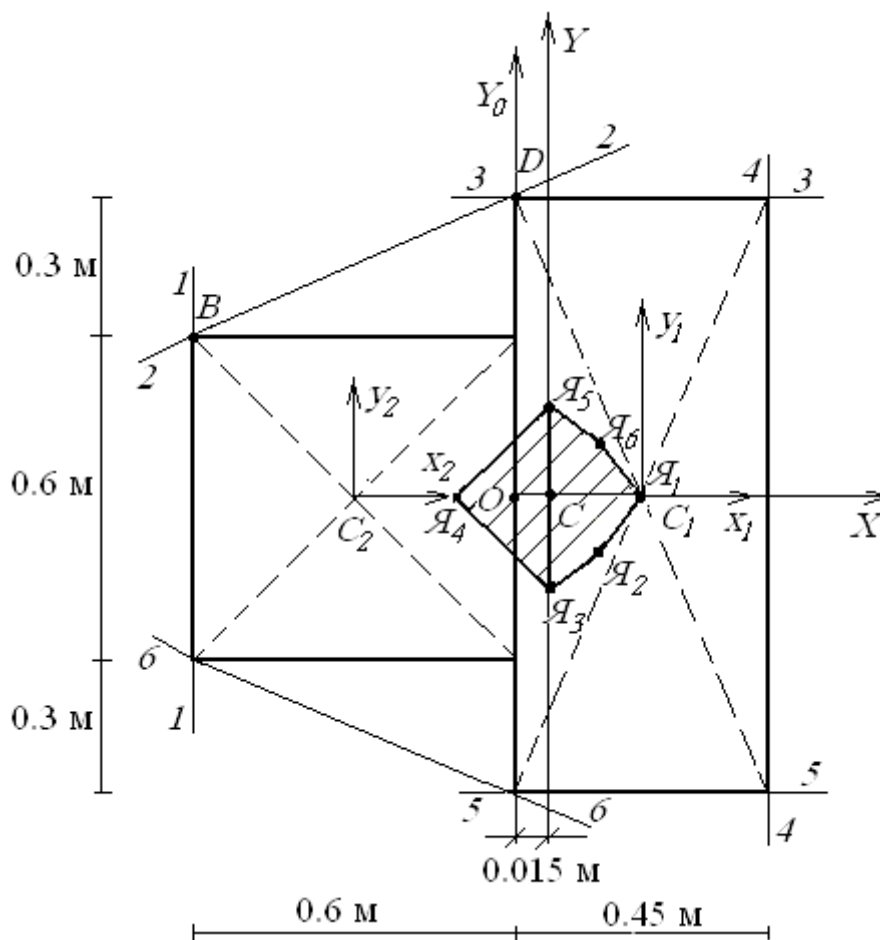


Рис. 7.20

$A_1 = 0.45 \cdot 1.2 = 0.54 \text{ м}^2$ – площадь прямоугольника,

$A_2 = 0.6 \cdot 0.6 = 0.36 \text{ м}^2$ – площадь квадрата

и находим координаты центра тяжести всего сечения по (1.11):

$$x_c = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0.225 \cdot 0.54 + (-0.3) \cdot 0.36}{0.54 + 0.36} = \frac{0.1215 - 0.108}{0.9} = 0.015 \text{ м},$$

$y_c = 0$, так как C_1 и C_2 лежат на оси X .

Таким образом, центр тяжести всего сечения во вспомогательной системе координат OXY_0 имеет координаты $C(0.015; 0)$. Изобразим его на чертеже (рис. 7.20). Проводим ось Y перпендикулярно к оси X через центр тяжести C . В силу симметрии поперечного сечения система координат CXY является главной центральной.

4. Определяем значения геометрических характеристик сечения относительно главных центральных осей.

а) Главные центральные моменты инерции J_x и J_y сечения (см. (3.1)):

$$J_x = J_x^{(1)} + J_x^{(2)} = \frac{0.45 \cdot 1.2^3}{12} + \frac{0.6 \cdot 0.6^3}{12} = 0.0648 + 0.0108 \approx 0.0756 \text{ м}^4,$$

$$J_y = J_y^{(1)} + J_y^{(2)} = \left[\frac{1.2 \cdot 0.45^3}{12} + (0.225 - 0.015)^2 \cdot 0.54 \right] + \left[\frac{0.6 \cdot 0.6^3}{12} + (0.3 + 0.015)^2 \cdot 0.36 \right] \approx 0.0794 \text{ м}^4,$$

здесь $J_x^{(1)}$, $J_y^{(1)}$ и $J_x^{(2)}$, $J_y^{(2)}$ – главные центральные моменты инерции прямоугольника и квадрата соответственно.

б) Квадраты главных радиусов инерции (см. табл. 3.1):

$$i_x^2 = \frac{J_x}{A} = \frac{0.0756}{0.54 + 0.36} = \frac{0.0756}{0.9} \approx 0.084 \text{ м}^2,$$

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{0.0794}{0.54 + 0.36} = \frac{0.0794}{0.9} \approx 0.088 \text{ м}^2.$$

5. Находим координаты вершин ядра сечения. Предполагаем, что положение нейтральной линии нам известно, а требуется определить координаты точки приложения силы. Для этого

а) изображаем положение нейтральной линии 1–1 (рис. 7.20) и вычисляем координаты точки приложения силы: $Я_1 (x_F - ?; y_F - ?)$.

Используя свойство 3 нейтральной линии, получим

$$x_F = -\frac{i_y^2}{x_N} = -\frac{0.088}{-0.615} \approx 0.14 \text{ м}, \quad y_F = 0, \text{ т.к. нейтральная линия}$$

1–1 параллельна оси Y . Покажем эту точку на чертеже $Я_1 (0.14; 0)$;

б) рассмотрим положение нейтральной линии 2–2 (рис. 7.20) для нахождения координат точки $Я_2 (x_F - ?; y_F - ?)$. Для чего выбираем две произвольные точки нейтральной линии 2–2, лучше те, координаты которых легко можно посчитать: $B (-0.615; 0.3)$ и

$D(-0.015; 0.6)$. Подставляя их координаты в уравнение нейтральной линии (7.7), получаем систему линейных уравнений для определения координат точки $Я_2$:

$$\begin{cases} 1 + \frac{x_F \cdot x_B}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_B}{i_x^2} = 0; \\ 1 + \frac{x_F \cdot x_D}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_D}{i_x^2} = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{x_F \cdot (-0.615)}{0.084} + \frac{y_F \cdot 0.3}{0.088} = 0; \\ 1 + \frac{x_F \cdot (-0.015)}{0.084} + \frac{y_F \cdot 0.6}{0.088} = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1 - x_F \cdot 7.32 + y_F \cdot 3.41 = 0; \end{cases} \quad (a)$$

$$\begin{cases} 1 - x_F \cdot 0.19 + y_F \cdot 6.82 = 0. \end{cases} \quad (b)$$

Из уравнения (a) $\Rightarrow -x_F \cdot 7.32 = -1 - y_F \cdot 3.41$ или $x_F = \frac{1 + y_F \cdot 3.41}{7.32}$,

т.е. $x_F \approx 0.14 + y_F \cdot 0.47.$ (c)

Подставив (c) в уравнение (б), получим:

$$1 - (0.14 + y_F \cdot 0.47) \cdot 0.19 + y_F \cdot 6.82 = 0;$$

$$1 - 0.0266 - y_F \cdot 0.0893 + y_F \cdot 6.82 = 0;$$

$$0.9734 + 6.7307 \cdot y_F = 0;$$

$$y_F = -\frac{0.9734}{6.7307} \approx -0.145.$$

Тогда из выражения (c) $- x_F = \frac{1 + (-0.145) \cdot 3.41}{7.32} \approx 0.07$, и точка

$Я_2$ будет иметь координаты $(0.07; -0.145)$;

в) рассмотрим положение следующей нейтральной линии 3–3 и определим для нее точку $Я_3 (x_F - ?; y_F - ?)$. Используя свойство 3

нейтральной линии, получим $x_F = 0$, $y_F = -\frac{i_x^2}{y_N} = -\frac{0.084}{0.6} = -0.14$,

т.е. координаты точки $Я_3 (0; -0.14)$.

г) дальнейшее рассмотрение проводим для нейтральной линии 4–4, также воспользуемся свойством нейтральной линии: $y_F = 0$,

$$x_F = -\frac{i_y^2}{x_N} = -\frac{0.088}{0.435} \approx -0.2 \text{ и записываем координаты точки ядра}$$

сечения $Я_4 (-0.2; 0)$.

д) воспользуемся симметрией сечения и достроим точки $Я_5$ и $Я_6$ симметрично точкам $Я_3$ и $Я_2$. Все точки $Я_i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) соединяем прямыми линиями.

Ответ: ядро построено (заштрихованная область на рис. 7.20).

7.12. Методические указания к заданию № 12

Задачу необходимо разбить на две независимые задачи:

1. Определить положение нейтральной линии и вычислить наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения;
2. Построить ядро сечения.

Для решения первой части задачи

1. Изображаем в масштабе сечение (удобно М 1:1) и указываем все размеры на чертеже;
2. Определяем положение главной центральной системы координат и вычисляем необходимые геометрические характеристики сечения: площади и квадраты радиусов инерции (см. **п. 3.3**);
3. Находим положение нейтральной линии и изображаем её;
4. Указываем на чертеже опасные точки сечения и записываем формулы для подсчета нормальных напряжений в этих точках;
5. Составляем условия прочности на растяжение и сжатие, затем выполняем их проверку. Записываем вывод о выполнении или невыполнении условий прочности.

Для построения ядра сечения решаем обратную задачу, т.е. известно положение нейтральной линии, необходимо определить координаты точки приложения силы:

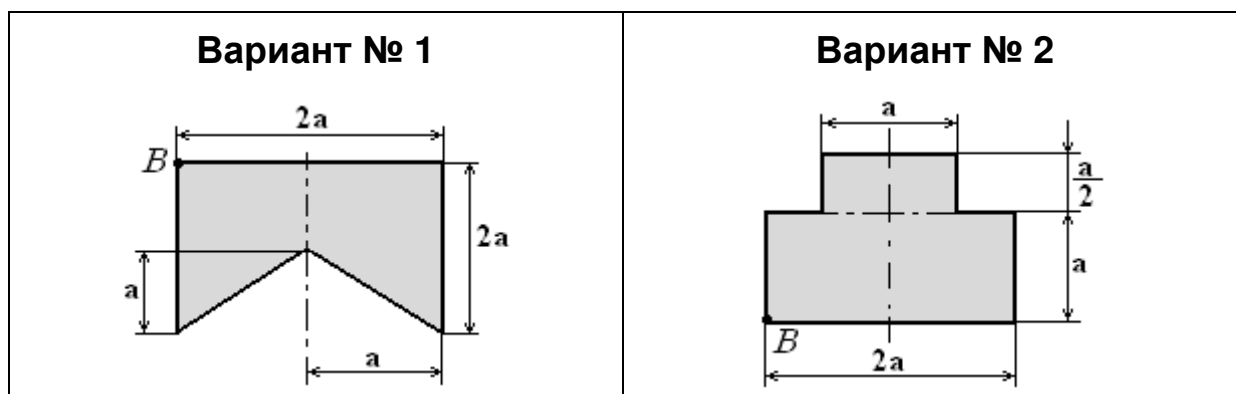
1. Определяем тип контура ядра сечения;
2. Проводим последовательно касательные к контуру сечения. Число предельных касательных к сечению стержня – это и есть количество вершин многоугольника ядра сечения;

3. Находим положение главных центральных осей;
4. Определяем значения геометрических характеристик сечения относительно главных центральных осей:
 - а) главные центральные моменты инерции J_x и J_y сечения (3.1),
 - б) квадраты главных радиусов инерции (см. табл. 3.1);
5. Вычисляем координаты вершин ядра сечения, предполагая, что положение нейтральной линии известно, а требуется определить координаты точки приложения силы.

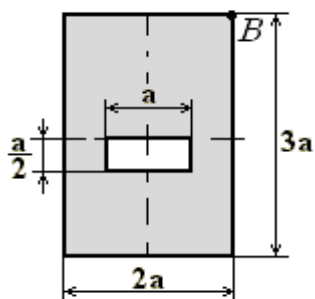
В случае попадания силы на одну из главных центральных осей можно воспользоваться свойством нейтральной линии. Если точка приложения силы не попадает на ось, то выбираем две произвольные точки нейтральной линии, координаты которых легко посчитать, и подставляем эти координаты в уравнение нейтральной линии (7.7). Получаем систему линейных уравнений для определения координат точки приложения силы. Если сечение симметрично, можно достраивать недостающие вершины ядра сечения, используя свойство симметрии. Следует помнить, что ядро сечения – это всегда **выпуклая фигура**, не может быть «звездчатых» областей.

7.13. Варианты задания № 12

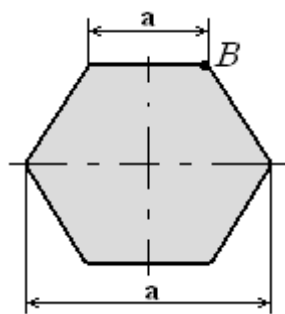
Чугунный короткий стержень сжимается продольной силой F , приложенной в точке B , поперечное сечение которого изображено на схемах. Определить положение нейтральной линии, вычислить наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения и построить ядро сечения.



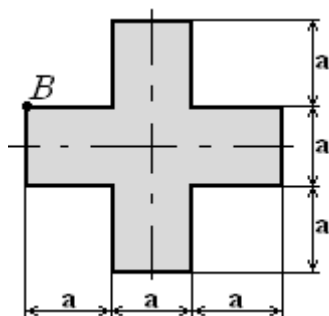
Вариант № 3



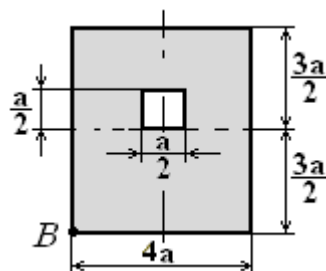
Вариант № 4



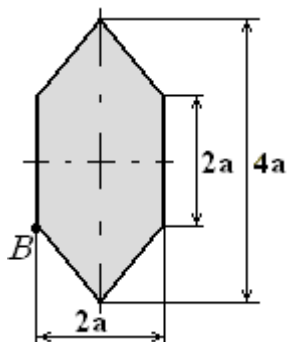
Вариант № 5



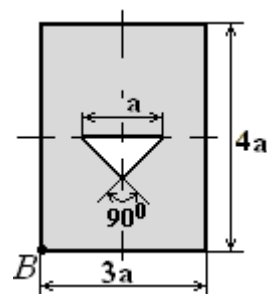
Вариант № 6



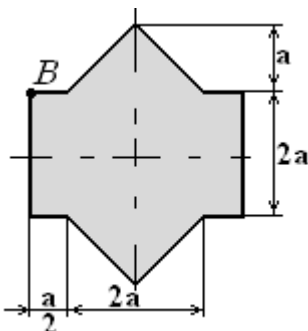
Вариант № 7



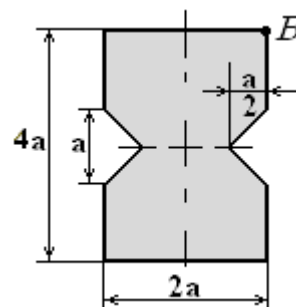
Вариант № 8



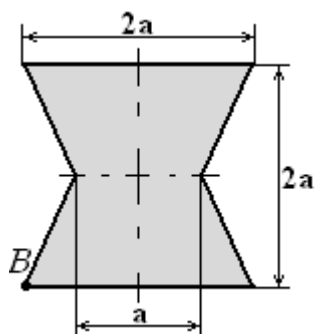
Вариант № 9



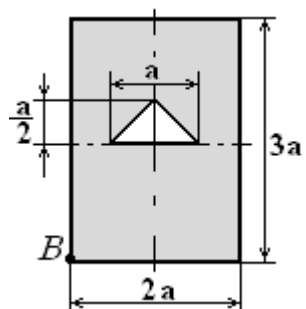
Вариант № 10



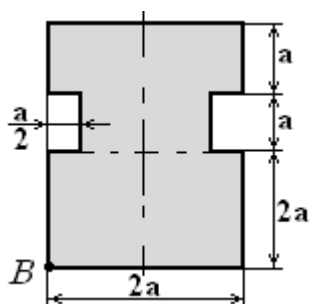
Вариант № 11



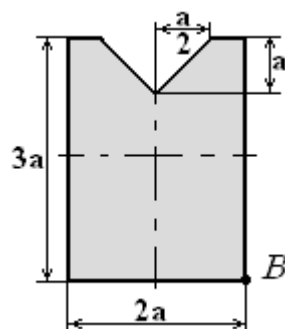
Вариант № 12



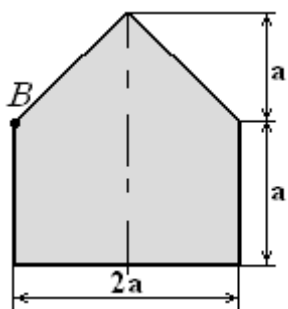
Вариант № 13



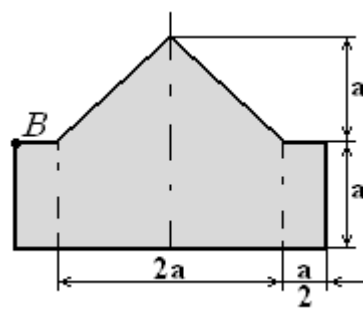
Вариант № 14



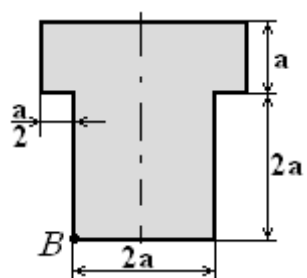
Вариант № 15



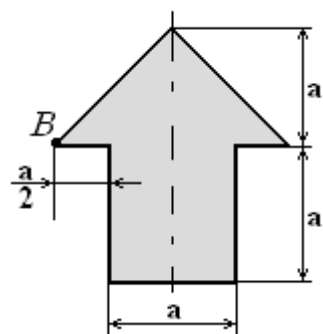
Вариант № 16



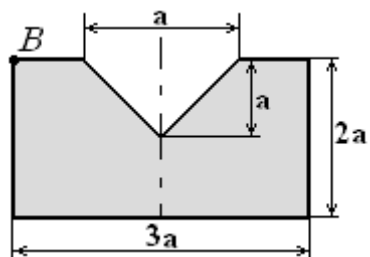
Вариант № 17



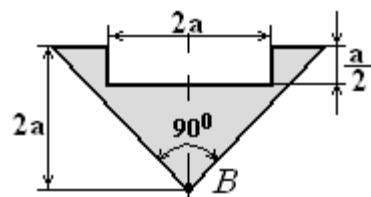
Вариант № 18



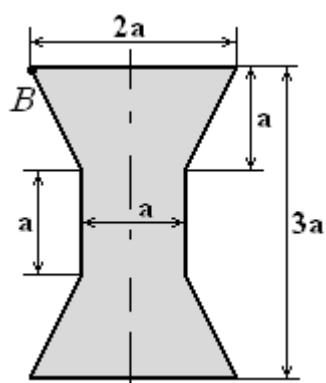
Вариант № 19



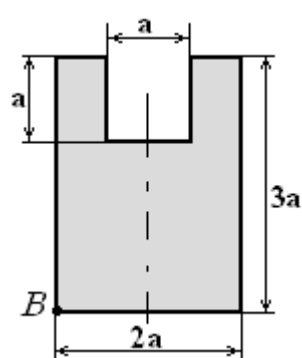
Вариант № 20



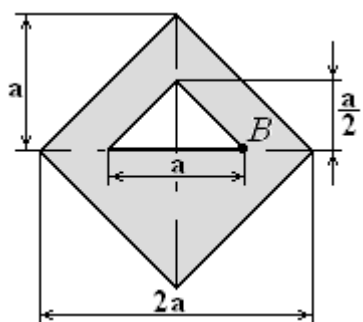
Вариант № 21



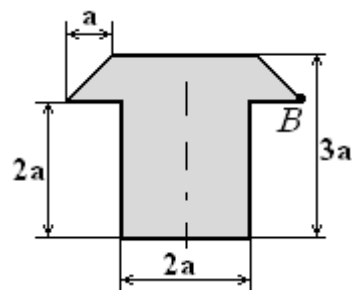
Вариант № 22



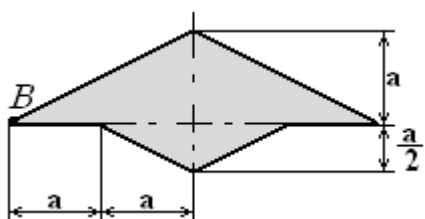
Вариант № 23



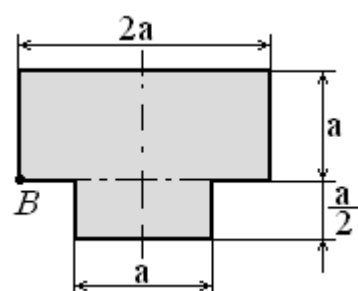
Вариант № 24



Вариант № 25



Вариант № 26



8. Устойчивость сжатых стержней

8.1. Понятие об устойчивости

Чтобы конструкция выполняла предназначенные ей функции, недостаточно соблюдения норм по условиям прочности и перемещениям отдельных её частей между собой. Наряду с выполнением прочности и жесткости конструкции, необходим анализ её устойчивости.

Различают **устойчивость положения** и **устойчивость формы** равновесия. Рассмотрим понятие устойчивости положения на следующих примерах (рис. 8.1), где изображены формы возможного равновесия механической системы.

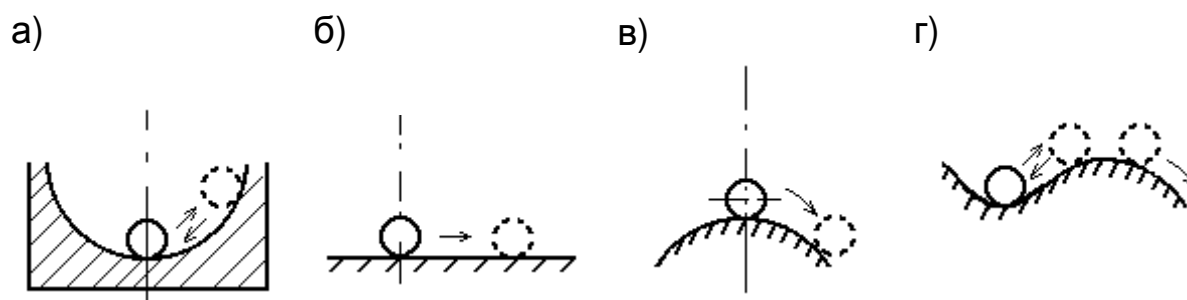


Рис. 8.1. Формы равновесия механической системы (устойчивость положения): а – устойчивое положение; б – безразличное (критическое) положение; в – неустойчивое положение; г – устойчивое положение при малых отклонениях и неустойчивое при больших

Если шарик, находящийся на дне лунки (рис. 8.1, а), сместим ненамного вправо или влево и отпустим, то он скатится назад к положению равновесия и начнет совершать затухающие колебательные движения около этого положения. По истечении некоторого времени шарик остановится в исходном положении.

Если аналогичное смещение задать шарiku, находящемуся на вершине выпуклости (рис. 8.1, в), то он покатится вниз и не вернется в исходное положение. Эти два положения равновесия принципиально различаются между собой. Первое из них принято называть **устойчивым**, а второе – **неустойчивым**. Таким образом, понятие

устойчивости можно считать свойством состояния равновесия тела или системы тел.

Положение равновесия шарика (рис. 8.1, б) также является устойчивым, но существенно отличается от описанных ранее. В случае незначительного смещения из положения равновесия шарик не возвращается в исходное положение, а остается в некотором новом положении равновесия. Такое состояние равновесия называют **безразличным**.

Незначительность отклонений шарика от положения равновесия является важным условием определения понятия устойчивости. Например, положение шарика (рис. 8.1, в) можно считать устойчивым при малых отклонениях и неустойчивым – при больших.

Устойчивость формы продемонстрируем на примерах (рис. 8.2). Равновесное состояние деформируемого стержня (рис. 8.2, а) принято определять как **устойчивое**, (рис. 8.2, б) как **безразличное**, или **критическое**, и (рис. 8.2, в) – **неустойчивое**.

Если наряду с переменным вертикальным положением возможно другое, сколь угодно близкое к первому криволинейное равновесное положение, то силу, вызывающую переход от одной формы к другой, принято называть **критической силой** ($F_{кр}$).

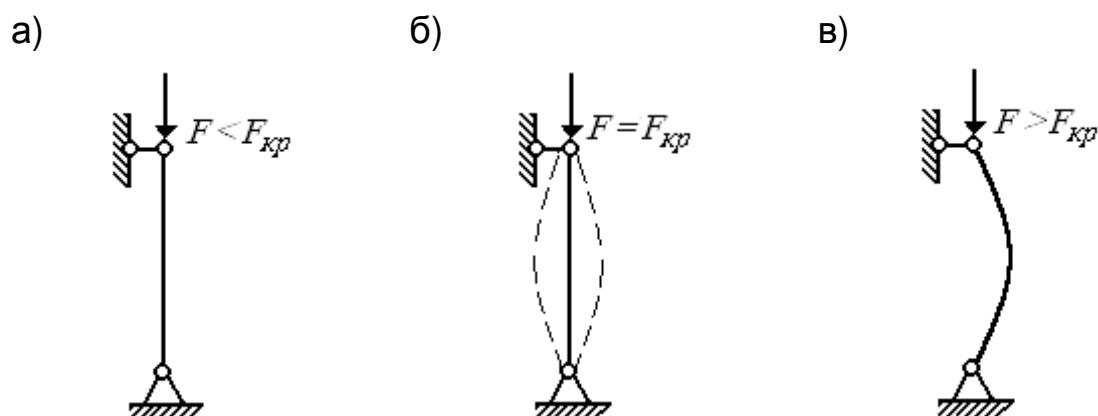


Рис. 8.2. Равновесные состояния деформируемого стержня: а – устойчивое положение; б – безразличное (критическое) положение; в – неустойчивое положение

При увеличении нагрузки ($F > F_{кр}$) в стержне происходит потеря устойчивости, т.е. осуществляется переход от неустойчивого вертикального к устойчивому искривленному положению. Причем потеря устойчивости может происходить и при напряжениях, значительно меньших, чем те, что допустимы с точки зрения прочности конструкции. Потеря устойчивости также может сопровождаться появлением пластических деформаций в материале, т.е. после уменьшения или удаления нагрузки в конструкции продолжают сохраняться остаточные деформации.

В обычном курсе сопротивления материалов рассматривают только задачи об устойчивости сжатого стержня. Более сложные случаи изучают в специальном курсе «Устойчивость и динамика сооружений».

8.2. Задача Эйлера

Впервые задачу о потере устойчивости прямолинейной формы сжатого стержня поставил и решил Леонард Эйлер в 1744 году. Критическая сила для шарнирно-закрепленного центрально-сжатого стержня постоянного сечения длиной ℓ (рис. 8.2, а) имеет вид:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{\ell^2}, \quad (8.1)$$

здесь E – модуль упругости материала стержня, J_{min} – минимальный момент инерции поперечного сечения стержня. Выражение (8.1) принято называть формулой Эйлера для определения критической силы.

Для стержней с другими видами закрепления их концов (рис. 8.3) Эйлер предложил определять критическую силу по формуле:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu \ell)^2}, \quad (8.2)$$

здесь $\mu \ell$ – приведенная длина стержня, μ – коэффициент приведения длины. Выражение «приведенная длина» означает, что в

формуле Эйлера стержни с различным закреплением можно привести к основному стержню, шарнирно-закрепленному по концам, с помощью коэффициента μ . Коэффициент приведения длины μ иногда оценивают по числу полуволн n , по которым искривляется стержень, теряя устойчивость: $\mu = \frac{l}{n}$.

Нормальные напряжения, соответствующие критической силе, называются **критическими**: $\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A}$. После подстановки значения критической силы из формулы (8.2) получим:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu l)^2 A}. \quad (8.3)$$

Если ввести понятие **минимального радиуса инерции сечения** –

$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}$, то после его подстановки формула (8.3) примет вид:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E A i_{min}^2}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E i_{min}^2}{(\mu l)^2}. \quad (8.4)$$

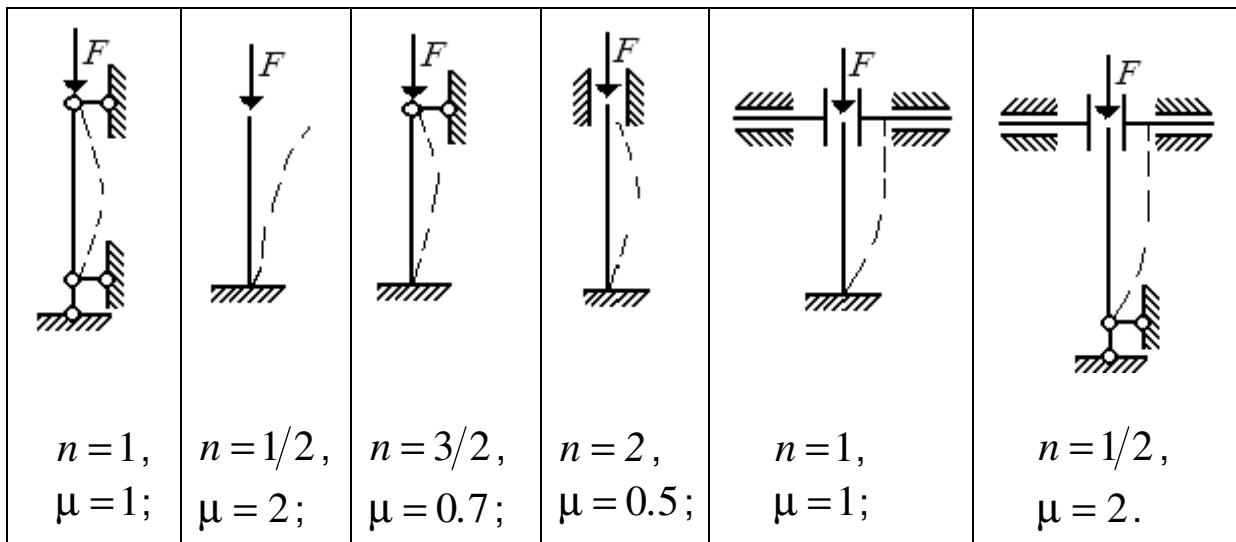


Рис. 8.3. Наиболее часто встречающиеся случаи закрепления концов стержня и соответствующие им количество полуволн n и значения коэффициента приведения длины μ

Безразмерная величина, которая характеризует сопротивляемость стержня потере устойчивости, называется **гибкостью стержня**:

$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{min}}$, показывает отношение приведенной длины к

минимальному радиусу инерции. При увеличении гибкости λ уменьшается сопротивляемость стержня потере устойчивости. Гибкость стержня не зависит от материала стержня, а определяется его длиной, формой, размерами сечения и условиями закрепления. И формулу (8.4) можно преобразовать так:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu \ell}{i_{min}}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (8.5)$$

Это формула Эйлера для определения критического напряжения при продольном изгибе. Использовать её можно только в пределах применения закона Гука, когда критическое напряжение не превышает предела пропорциональности материала стержня $\sigma_{ну}$, т.е. при

условии $\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{ну}$. Тогда $\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{ну}}}$. Стоящая в правой

части неравенства безразмерная величина, постоянная для данного материала, называется **предельной гибкостью**

$$\lambda_{пред} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{ну}}}.$$

Пределы применимости формулы Эйлера можно оценить, вычислив гибкость стержня λ и сравнив её с предельным значением $\lambda_{пред}$.

Для малоуглеродистой стали, например, получается $\lambda_{пред} \approx 100$, если принять $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и $\sigma_{ну} = 200$ МПа. Таким образом, условие $\lambda \geq \lambda_{пред}$ определяет применимость формулы Эйлера только в тех случаях, когда гибкость стержня больше или

равна предельной гибкости того материала, из которого он изготовлен.

На рис. 8.4 приведен график зависимости $\sigma_{кр}$ от λ для стержней из пластичного материала, например, низкоуглеродистой стали. Исследования подобных графиков позволяют условно поделить стержни на три группы: стержни большой гибкости $\lambda \geq \lambda_{пред}$, средней гибкости $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_{пред}$, и малой гибкости $\lambda < \lambda_0$. По формуле Эйлера (8.5) критические напряжения определяются для стержней первой группы, по эмпирическим формулам, приводимым в справочниках, – для второй категории. А для стержней малой гибкости, т.е. для коротких стержней из пластичных материалов, гибкость которых $\lambda < \lambda_0$, и $\sigma_{кр}$ соответствует пределу текучести σ_T , расчет на устойчивость не производят. Такие стержни рассчитывают не на устойчивость, а на прочность, как при простом сжатии.

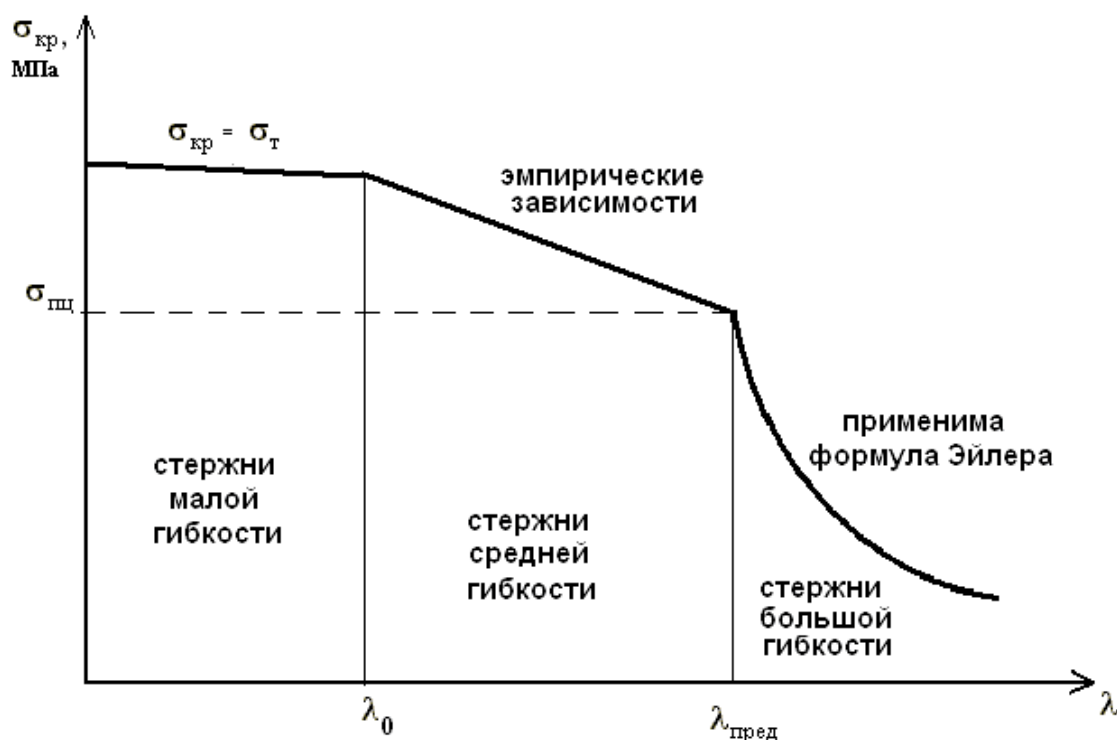


Рис. 8.4. Зависимость критических напряжений $\sigma_{кр}$ от гибкости λ стержня из малоуглеродистой стали

8.3. Определение критической силы с помощью формулы Ясинского

Критическое напряжение для стержней средней гибкости определяют из эмпирических формул, получаемых на основании опытов. Одна из этих формул – формула Ясинского:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2, \quad (8.6)$$

здесь a, b, c – коэффициенты, зависящие от свойств материала.

Например, для малоуглеродистой стали

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda \quad \text{и} \quad F_{кр} = (a - b\lambda) \cdot A,$$

где A – площадь поперечного сечения стержня, т.к. значения констант для неё следующие: $a = 310 \text{ МПа}$, $b = 1.14 \text{ МПа}$, $c = 0$.

8.4. Практический расчет сжатых стержней на устойчивость

При любом методе расчета на устойчивость должно быть обеспечено условие $\sigma < \sigma_{кр}$. На практике этим условием пользоваться неудобно. Введение коэффициента запаса по устойчивости n_y , позволяет получить более удобную для практических расчетов формулу. Этот коэффициент зависит как от возможности случайного увеличения силы F , так и от её внецентренного приложения, а также от наличия начальных несовершенств в геометрии стержня, способах его опирания и т.д. При этом условие устойчивости принимает вид

$$\sigma \leq \frac{\sigma_{кр}}{n_y}. \quad (8.7)$$

Получить оценку максимального напряжения в стержне можно, сопоставив между собой условия прочности (5.11) $\sigma = \frac{F}{A} \leq R$ и устойчивости (8.7)

$$\frac{\sigma_{кр}}{n_y} = \varphi \cdot R. \quad (8.8)$$

Величину φ называют коэффициентом продольного изгиба

$\varphi = \frac{\sigma_{кр}}{n_y R}$, который определяет степень снижения расчетного сопро-

тивления материала при продольном изгибе. Поскольку коэффициент φ зависит от критического напряжения (8.5), то он зависит от гибкости стержня и от механических свойств материала. Значения коэффициента φ для различных материалов устанавливаются СНиПом и приводятся в различных справочниках в виде таблиц (см. Приложение III).

Вводя обозначение расчетного напряжения $\sigma_{расч} = \frac{\sigma}{\varphi}$, условие прочности можно записать в виде

$$\sigma_{расч} = \frac{F}{A} \leq R \cdot \varphi. \quad (8.9)$$

Оно удобно тем, что позволяет пользоваться одним расчетным сопротивлением материала при растяжении и сжатии.

Расчет сжатых стержней производят поэтапно, несмотря на простоту выражения (8.9). Это связано с тем, что необходимо решить обратную задачу: величина φ зависит от формы и размеров сечения, поэтому не может быть определена заранее. Подбор сечения осуществляют итеративно – **методом последовательных приближений**, постепенно приближаясь к тому, чтобы разница между напряжением $\sigma_{расч}$ сжатия и $R \cdot \varphi$ расчетным сопротивлением не превышала 5%.

Порядок решения задачи о нахождении размеров поперечного сечения стержня методом последовательных приближений:

1. Задаем некоторое значение φ , например, $\varphi_1 = 0.5$.
2. Определяем площадь поперечного сечения стержня из (8.9):

$$A \geq \frac{F}{R \cdot \varphi}.$$

3. Подбираем размеры поперечного сечения по вычисленному значению площади A .
4. Вычисляем минимальный радиус инерции сечения $i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}$ и гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{min}}$, используя размеры сечения из п. 3.
5. По полученному значению гибкости λ уточняем значение коэффициента φ'_1 (см. Приложение III табл. 1).
6. Находим напряжение $\sigma_{расч} = \frac{F}{A}$ и расчетное сопротивление $\varphi'_1 R$.
7. Считаем погрешность $\Delta\% = \left| \frac{\sigma_{расч} - \varphi'_1 R}{\varphi'_1 R} \right| \cdot 100\%$.
8. Если погрешность $\Delta\% > 5\%$, то выбираем следующее приближение $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2}$ и для него выполняем пункты 2–8 схемы.
9. Расчет заканчиваем в случае $\Delta\% < 5\%$. В ответ записываем значение полученных на этой итерации размеров поперечного сечения.

8.5. Пример решения задания № 13. Расчет на устойчивость сжатых стержней

Стальной стержень длиной $h = 4$ м сжимается силой $F = 500$ кН (рис. 8.5). Найти размеры поперечного сечения методом последовательных приближений при условии $R = 210$ МПа. Определить значение критической силы и коэффициент запаса устойчивости.

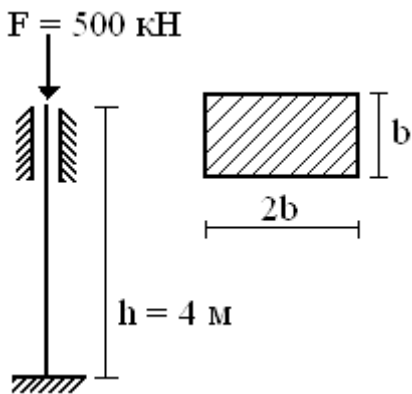


Рис. 8.5

Дано: $h = 4 \text{ м}$, $F = 500 \text{ кН}$,
 $R = 210 \text{ МПа}$.

Найти: размеры поперечного сечения стержня, значение критической силы и коэффициент запаса устойчивости.

Решение. Из условия устойчивости

$$(8.9) \quad \sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot R, \text{ определим неиз-}$$

вестные величины φ и A по схеме метода последовательных приближений.

I-я итерация

1. Полагаем $\varphi_1 = 0.5$.

$$2. \quad A \geq \frac{F}{\varphi_1 R} = \frac{500 \text{ кН}}{210 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}} \cdot \frac{1}{0.5} = 2.38 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{0.5} = 4.76 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

3. Величину A также можно определить как $A = 2b^2$, сравнивая эти значения $2b^2 \geq 4.76 \cdot 10^{-3}$, находим $b \geq \sqrt{\frac{4.76 \cdot 10^{-3}}{2}} \approx 0.049 \text{ м}$.

4. Вычисляем минимальный радиус инерции, затем гибкость стержня, используя найденное значение b , (рис. 8.6):

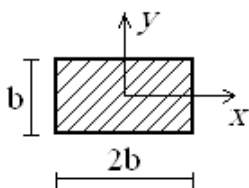


Рис. 8.6

$$J_x = \frac{2b \cdot b^3}{12} = \frac{b^4}{6}, \quad J_y = \frac{b \cdot (2b)^3}{12} = \frac{8}{12} b^4 = \frac{2}{3} b^4,$$

из этих двух значений выбираем меньшую вели-

$$\text{чину } J_{min} = J_x = \frac{b^4}{6}. \text{ Тогда } i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}} =$$

$$= \sqrt{\frac{b^4}{6 \cdot 2b^2}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{b}{3.46} \approx 0.29 b. \text{ Коэффициент приведения длины}$$

μ равен 0.5 (см. рис. 8.3), следовательно, гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{min}} = \frac{0.5 \cdot 4}{0.29 \cdot b} = \frac{6.897}{0.049} \approx 141.$$

5. Пользуясь табл. 1 приложения III, выписываем значения гибкости λ , между которыми располагается найденное значение 141 и соответствующие им коэффициенты φ : при $\lambda = 140$ $\varphi = 0.315$,
при $\lambda = 150$ $\varphi = 0.276$.

Вычисляем величину шага на данном интервале, для этого находим разности между значениями гибкости $\Delta\lambda = 150 - 140 = 10$ и соответствующими им значениями коэффициентов φ :

$$10 \cdot \Delta\varphi = 0.315 - 0.276 = 0.039.$$

Значит, шаг равен $\Delta\varphi = 0.0039$. Определяем уточненное значение коэффициента φ . По мере увеличения гибкости λ φ убывают, поэтому $\varphi'_1(141) = \varphi(140) - 1 \cdot \Delta\varphi = 0.315 - 0.0039 \approx 0.31$.

6. Для оценки погрешности найдем $\sigma_{расч} = \frac{F}{A} = \frac{500 \text{ кН}}{4.76 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} = 105.04 \cdot 10^3 \text{ кПа} \approx 105.04 \text{ МПа}$ и сравним с расчетным сопротивлением $\varphi'_1 R = 0.31 \cdot 210 \text{ МПа} \approx 65.1 \text{ МПа}$.

7. Погрешность

$$\Delta\% = \left| \frac{\sigma_{расч} - \varphi'_1 R}{\varphi'_1 R} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{105.04 - 65.1}{65.1} \right| \cdot 100\% \approx 61\%.$$

8. Процесс вычисления продолжаем дальше, т.к. $61\% > 5\%$.

II-я итерация

1. В качестве коэффициента продольного изгиба φ теперь берем

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi'_1) = \frac{1}{2}(0.5 + 0.31) = 0.405.$$

2–3. Определяем новое значение $A \geq 2.38 \cdot \frac{10^{-3}}{0.405} \approx 5.88 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ и

соответствующие ему размеры поперечного сечения

$$b \geq \sqrt{\frac{5.88 \cdot 10^{-3}}{2}} \approx 0.54 \cdot 10^{-1} = 0.054 \text{ м}.$$

4. Откуда $i_{min} \approx 0.0157$ м и гибкость $\lambda = \frac{6.897}{0.054} \approx 128$.

5. Из таблиц выписываем: при $\lambda = 120$ $\varphi = 0.419$,
при $\lambda = 130$ $\varphi = 0.364$.

Вычисляем шаг: $10\Delta\varphi = 0.419 - 0.364 = 0.055$, $\Rightarrow \Delta\varphi = 0.0055$. Находим новый коэффициент продольного изгиба

$$\varphi'_2(128) = \varphi(120) - 8 \cdot \Delta\varphi = 0.419 - 8 \cdot 0.0055 = 0.375.$$

6. Находим $\sigma_{расч} = \frac{F}{A} = \frac{500 \text{ кН}}{5.88 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} \approx 85.03 \text{ МПа}$ и сравниваем с расчетным сопротивлением $\varphi'_2 R = 0.375 \cdot 210 \text{ МПа} \approx 78.75 \text{ МПа}$.

7–8. Погрешность $\Delta\% = \left| \frac{85.03 - 78.75}{78.75} \right| \cdot 100\% \approx 8\%$ превышает 5%, продолжаем вычисления.

III-я итерация

1. В качестве нового коэффициента продольного изгиба φ берем

$$\varphi_3 = \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi'_2) = \frac{1}{2}(0.405 + 0.375) = 0.39.$$

2–3. Считаем $A \geq 2.38 \cdot \frac{10^{-3}}{0.39} \approx 6.1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ и

$$b \geq \sqrt{\frac{6.1 \cdot 10^{-3}}{2}} \approx 0.055 \text{ м}.$$

4. Определяем гибкость $\lambda = \frac{6.897}{b} = \frac{6.897}{0.055} \approx 125$.

5. Используя таблицу, находим шаг $\Delta\varphi$: при $\lambda = 120$ $\varphi = 0.419$,
при $\lambda = 130$ $\varphi = 0.364$,
 $10\Delta\varphi = 0.055$, $\Delta\varphi = 0.0055$

и вычисляем

$$\varphi'_3(125) = \varphi(120) - 5 \cdot \Delta\varphi = 0.419 - 5 \cdot 0.0055 \approx 0.3915.$$

6. Сравниваем $\sigma_{расч} = \frac{500 \text{ кН}}{6.1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} \approx 81.97 \text{ МПа}$ и расчетное сопротивление $\varphi'_3 R = 0.3915 \cdot 210 \text{ МПа} \approx 82.22 \text{ МПа}$.

7 – 8. Можем закончить расчет, так как погрешность меньше 5%:

$$\Delta\% = \left| \frac{81.97 - 82.22}{82.22} \right| \cdot 100\% \approx 0.3\%.$$

Размеры поперечного сечения стержня: $2b \times b$, где $b \geq 5.5 \text{ см}$ при гибкости $\lambda = 125$.

Теперь будем решать вторую часть задачи по определению значения критической силы и коэффициента запаса устойчивости. Можно использовать формулу Эйлера, т.к. для малоуглеродистой стали предельная гибкость $\lambda_{пред} = 100$, а мы получили гибкость $\lambda = 125$, т.е.

$$\lambda > \lambda_{пред} \quad (125 > 100).$$

Вычисляем

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu \ell)^2} = \frac{3.14^2 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot (1/6) \cdot 5.5^4 \cdot 10^{-8}}{(0.5 \cdot 4)^2} \approx 751.8 \text{ кН}$$

и коэффициент запаса устойчивости $n_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{751.8 \text{ кН}}{500 \text{ кН}} \approx 1.5$.

Ответ: $b \geq 5.5 \text{ см}$, $F_{кр} \approx 751.8 \text{ кН}$, $n_y \approx 1.5$.

8.6. Методические указания к заданию № 13

1. Перед решением задания желательно повторить формулы для вычисления главных центральных моментов инерции и главных радиусов инерции сечения (см. **п. 3.3** и табл. 1 Приложения II).
2. Необходимо обратить внимание на табл. 1 Приложения II: по мере увеличения гибкости, коэффициент продольного изгиба убывает.

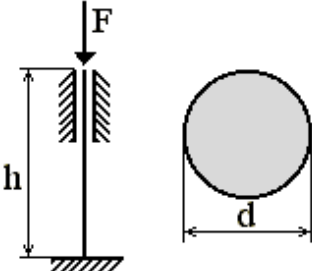
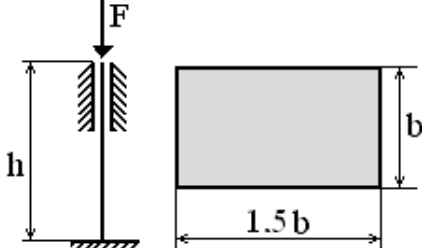
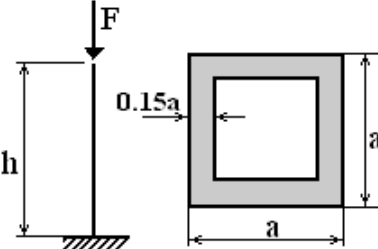
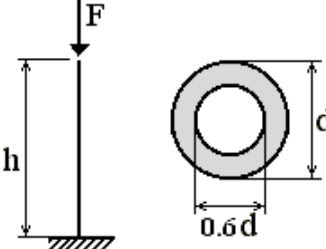
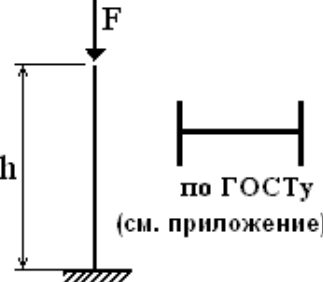
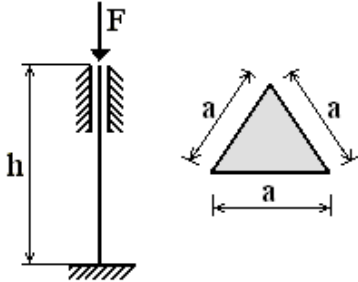
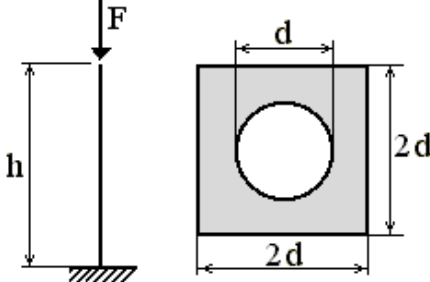
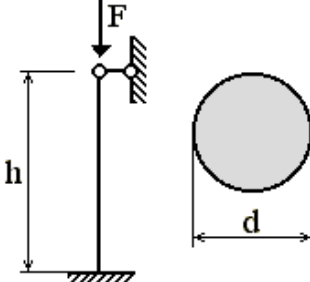
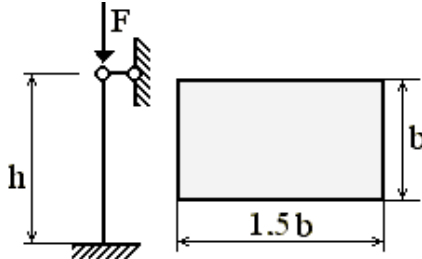
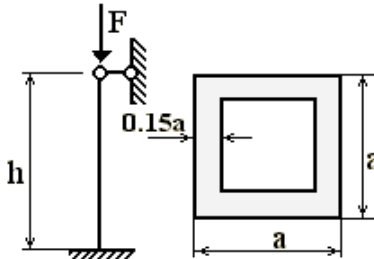
3. До решения задания № 13 необходимо ознакомиться с методом последовательных приближений и разобрать его схему для расчета центрально сжатой стойки (см. п. 8.4).
4. Трудно получить погрешность меньше 5%, когда сечения – прокатные профили, т.к. варьирование размеров сечений ограничено данными ГОСТа. В этом случае выбирают площадь поперечного сечения с запасом, и при последующей итерации повторяется номер профиля.

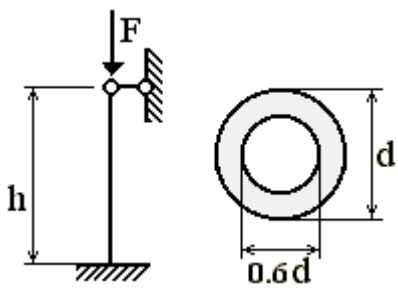
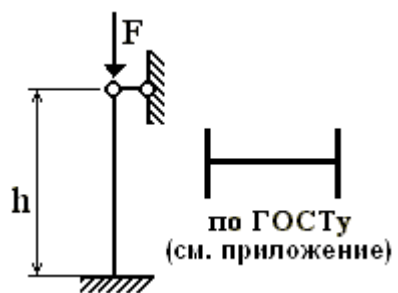
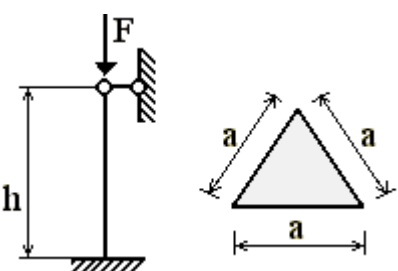
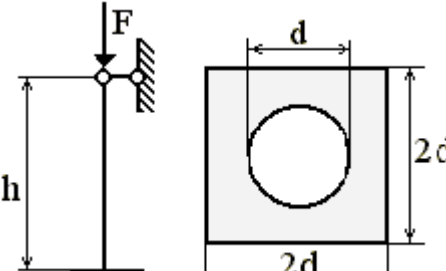
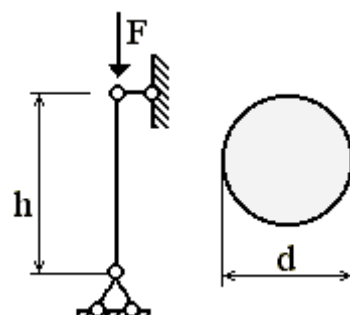
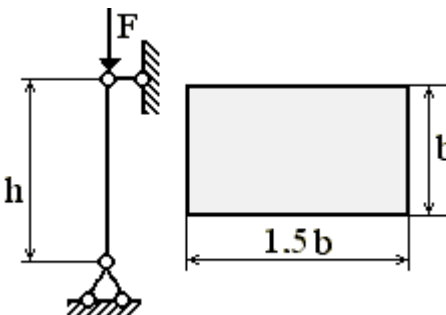
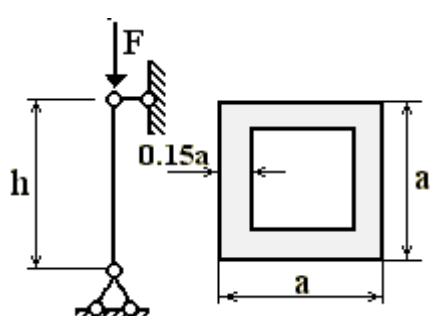
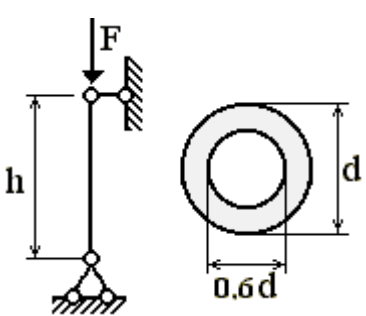
8.7. Варианты задания № 13

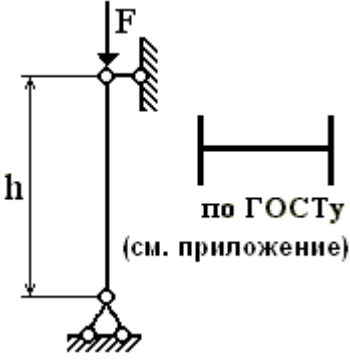
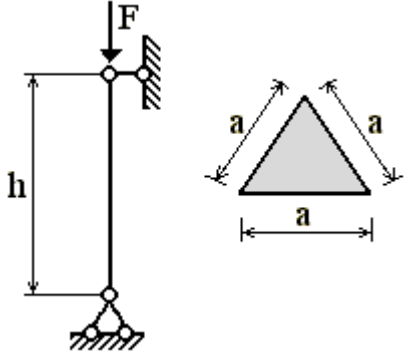
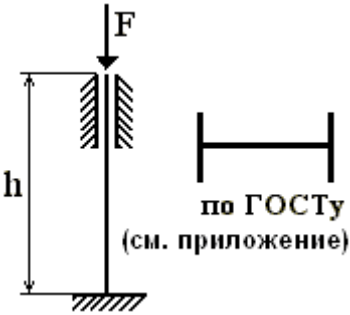
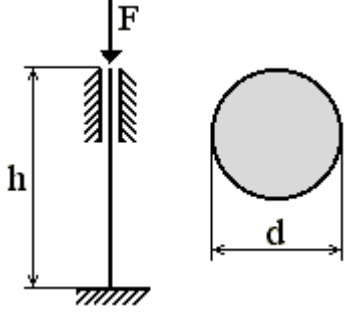
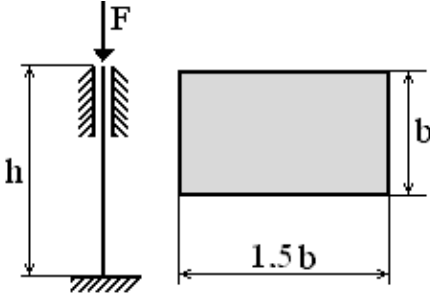
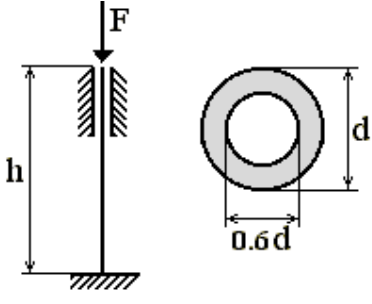
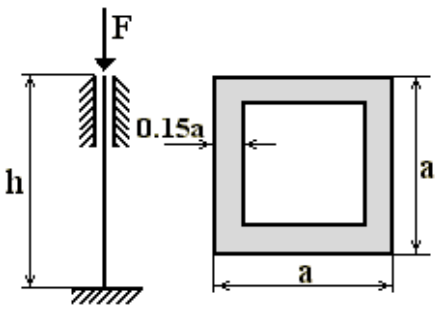
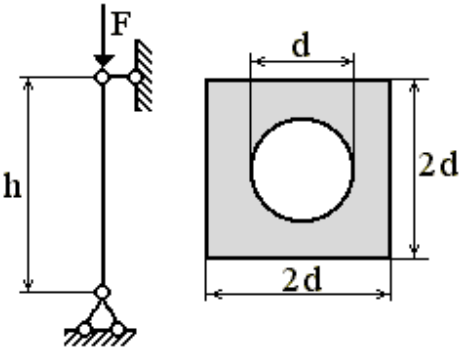
Стальной стержень длиной h сжимается силой F . Определить размеры поперечного сечения стержня методом последовательных приближений при условии $R = 210 \text{ МПа}$. Найти значение критической силы $F_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости n_y . Данные взять из таблицы 8.1.

Таблица 8.1

цифра шифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$F, \text{кН}$	380	700	800	1000	2800	650	1200	2500	600	700
$h, \text{м}$	3.2	3.6	3.0	2.4	3.6	4.5	2.2	5.0	3.8	4.2

<p>Вариант № 1</p> 	<p>Вариант № 2</p> 
<p>Вариант № 3</p> 	<p>Вариант № 4</p> 
<p>Вариант № 5</p>  <p>по ГОСТу (см. приложение)</p>	<p>Вариант № 6</p> 
<p>Вариант № 7</p> 	<p>Вариант № 8</p> 
<p>Вариант № 9</p> 	<p>Вариант № 10</p> 

<p style="text-align: center;">Вариант № 11</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант № 12</p>  <p style="text-align: center;">по ГОСТу (см. приложение)</p>
<p style="text-align: center;">Вариант № 13</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант № 14</p> 
<p style="text-align: center;">Вариант № 15</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант № 16</p> 
<p style="text-align: center;">Вариант № 17</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант № 18</p> 

<p style="text-align: center;">Вариант № 19</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант № 20</p> 
<p style="text-align: center;">Вариант № 21</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант № 22</p> 
<p style="text-align: center;">Вариант № 23</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант № 24</p> 
<p style="text-align: center;">Вариант № 25</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант № 26</p> 

9. Динамическое действие нагрузки

9.1. Ударное действие нагрузок.

Динамический расчёт

При статическом действии нагрузок ускорения в элементах конструкций или совсем отсутствуют, или весьма малы, и поэтому их влиянием пренебрегают. Если же нагрузки вызывают в элементах конструкций значительные ускорения, причём изменение скорости их происходит за очень малый промежуток времени, то такие нагрузки называются **динамическими**.

Когда скорость элемента конструкции или соприкасающихся с ним частей изменяется за весьма короткий промежуток времени, то происходит явление удара.

Например, при забивке свай молот, упав с определённой высоты на сваю и погрузив её в грунт, останавливается почти мгновенно, то есть изменение скорости падения молота от некоторой величины до нуля происходит за весьма короткое время, значит, происходит удар. Ударяющемуся молоту от сваи передаются очень большие ускорения, направленные в сторону, противоположную его движению. А это значит, что на молот передаётся реакция F_D , равная по величине произведению его массы на полученное им ускорение, то есть

$$F_D = \frac{G}{g} a,$$

где G – вес ударяющего тела; g – ускорение свободного падения, равное 9.81 м/с^2 .

Согласно закону равенства действия и противодействия, на ударяемую часть конструкции будет передаваться такая же сила, но направленная в противоположную сторону. В результате этого в обоих телах возникают напряжения.

По закону Даламбера можно считать, что ударяемая часть конструкции испытывает такие же напряжения, как если бы к ней были приложены силы инерции ударяющего тела. Эти напряжения можно вычислить, приняв силу инерции F_D за статическую нагрузку для рассматриваемой конструкции. При определении величины F_D используют закон сохранения энергии, выражающий переход кинетической энергии ударяющего тела в потенциальную энергию деформации. Таким образом, при ударной нагрузке расчёт можно свести к статическому.

Удар может быть продольным (растягивающим или сжимающим), когда груз падает на стержень вдоль его оси, и поперечным (изгибающим), если падение груза на стержень происходит перпендикулярно к его оси.

Рассмотрим явление удара при следующих допущениях:

- при ударе в элементе конструкции возникают только **упругие деформации**;
- удар считается **неупругим**, то есть ударяющее тело не отскакивает после удара, а продолжает перемещаться вместе с ударяемым телом как одно целое;
- масса ударяемого тела считается весьма **малой** по сравнению с массой ударяющего тела и в расчёт не принимается. Это допущение, как увидим далее, повышает величину динамического напряжения, то есть увеличивает запас прочности при ударе.

Пусть груз весом G свободно падает с высоты h на произвольную конструкцию, причём скорость падения его при ударе

$$V = \sqrt{2gh},$$

откуда

$$h = \frac{V^2}{2g}.$$

Конструкция под действием удара деформируется, и точка соударения переместится в направлении падения груза на величину u_D .

Работа силы тяжести, действующей на груз, равная

$$A_D = G(h + v_D),$$

переходит в потенциальную энергию деформации ударяемой конструкции. Если перемещение от единичной силы обозначить буквой δ , то отношение $\frac{v_D}{\delta} = G_{yD}$ определит собой эквивалентную силу, которая при своём статическом действии совершит такое же перемещение $v_D = G_{yD} \cdot \delta$, как и при ударе.

Определим величину потенциальной энергии:

$$\Pi = \frac{1}{2} G_{yD} \cdot v_D = \frac{1}{2} \frac{v_D \cdot v_D}{\delta} = \frac{v_D^2}{2 \cdot \delta}.$$

По закону сохранения энергии:

$$G(h + v_D) = \frac{v_D^2}{2\delta} \quad \text{или} \quad v_D^2 - 2 G \delta v_D - 2 G \delta h = 0.$$

Решив это квадратное уравнение относительно v_D , получим

$$v_D = G \delta + \sqrt{(G \delta)^2 + 2 G \delta h} = G \delta \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 h}{G \delta}} \right).$$

Знак «+», взятый перед дискриминантом, означает, что мы определяем наибольшее значение перемещения. Произведение же $G \delta = v_{CT}$ является перемещением от статического действия груза G , следовательно, можно написать

$$v_D = v_{CT} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 h}{v_{CT}}} \right). \quad (9.1)$$

Выражение в скобках показывает, во сколько раз результат ударного (динамического) действия груза больше статического действия, и называется **динамическим коэффициентом**

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 h}{v_{CT}}}, \quad (9.2)$$

откуда видно, что величина k_D возрастает с увеличением высоты h падения груза.

Формула (9.1) может быть представлена в следующем виде:

$$v_D = k_D v_{CT}. \quad (9.3)$$

На основе принятого допущения об упругих деформациях можно написать

$$\sigma_D = k_D \sigma_{CT} \quad (9.4)$$

или

$$\sigma_D = \sigma_{CT} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{v_{CT}}} \right). \quad (9.5)$$

Если в (9.5) принять $h = 0$, то есть нагрузку приложить сразу (внезапное действие нагрузки), то величина динамического коэффициента

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + 0} = 2.$$

Таким образом, внезапно приложенная нагрузка вызывает вдвое большие напряжения и деформации, чем при статическом действии той же нагрузки.

9.2. Пример решения задания № 14. Ударное действие нагрузок. Динамический расчет

На середину стальной двутавровой балки № 33 пролётом $l = 5 \text{ м}$ с высоты $h = 0.5 \text{ м}$ падает груз $G = 2.5 \text{ кН}$ (рис. 9.1). Определить динамический прогиб и динамическое напряжение в опасном сечении балки при условии $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $R = 160 \text{ МПа}$.

Дано: $l = 5 \text{ м}$, $h = 0.5 \text{ м}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $R = 160 \text{ МПа}$, $G = 2.5 \text{ кН}$.

Определить: v_D , σ_D в опасном сечении.

Решение. 1. Выписываем из таблицы сортамента (Приложение 1) основные характеристики сечения балки:

$$J_x = 9840 \text{ см}^4 = 9.84 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4; W_x = 597 \text{ см}^3 = 5.97 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

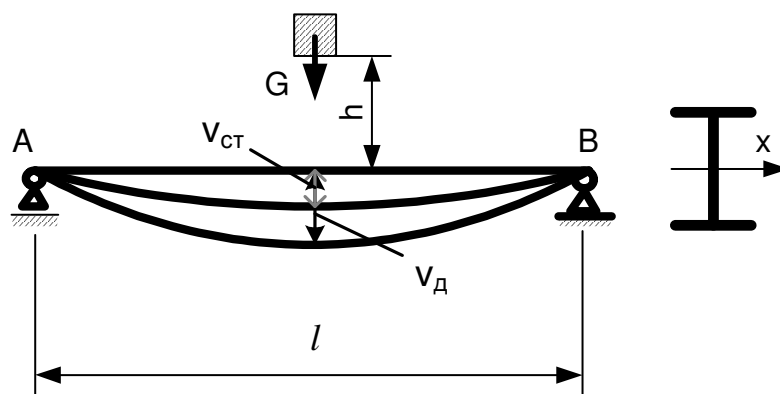


Рис. 9.1

2. Определяем величину наибольшего изгибающего момента от статического действия груза (рис. 9.2):

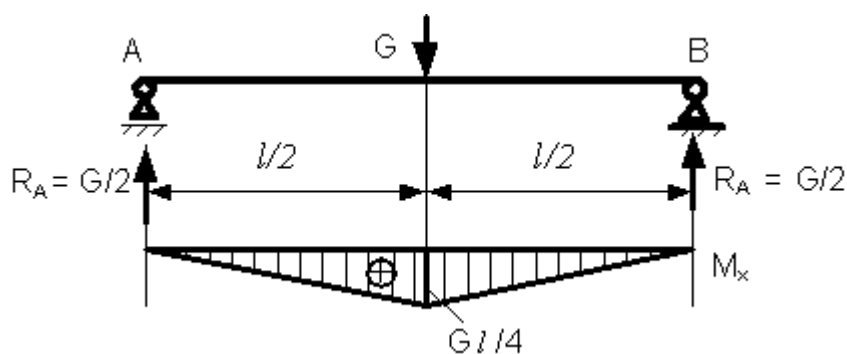


Рис. 9.2

$$M_{\max} = \frac{G l}{4} = \frac{0.025 \cdot 5}{4} = 0.03125 \text{ МН} \cdot \text{м}.$$

3. Определяем величину статического прогиба в точке удара, то есть по середине пролёта. Для этого в точке удара прикладываем безразмерную единичную силу $\bar{F} = 1$ и строим единичную эпюру (рис. 9.3).

Перемножаем эти эпюры по формуле Симпсона-Корноухова (6.7):

$$v = \frac{l^*}{6EJ_x} (\bar{M}_л \cdot M_л + 4 \cdot \bar{M}_{cp} \cdot M_{cp} + \bar{M}_{np} \cdot M_{np}),$$

где \bar{M}_l , \bar{M}_{cp} , \bar{M}_{np} и M_l , M_{cp} , M_{np} – крайние левые, средние, крайние

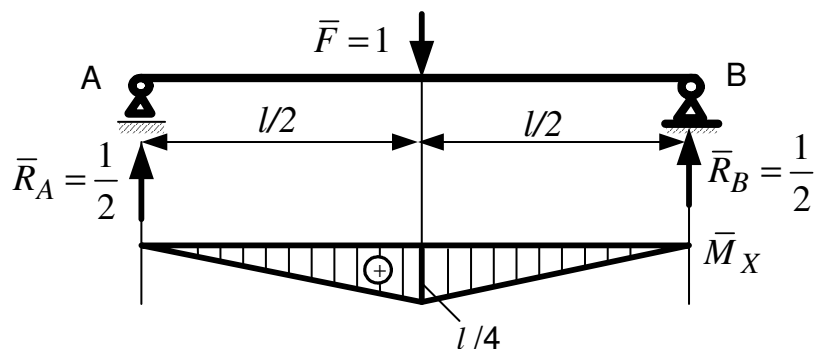


Рис. 9.3

правые ординаты на единичной и грузовой эпюрах соответственно;
 l^* – длина участка перемножаемых эпюр (см. п. 5.11).

$$v_{CT} = \frac{l/2}{6EJ_x} \left(0 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{Gl}{8} \cdot \frac{l}{8} + \frac{Gl}{4} \cdot \frac{l}{4} \right) + \frac{l/2}{6EJ_x} \left(\frac{Gl}{4} \cdot \frac{l}{4} + 4 \cdot \frac{Gl}{8} \cdot \frac{l}{8} + 0 \cdot 0 \right),$$

$$v_{CT} = \frac{Gl^3}{48EJ_x} = \frac{0.025 \cdot 5^5}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 9.84 \cdot 10^{-5}} = 0.00033 \text{ м} = 0.33 \text{ мм}.$$

4. Определяем величину статического напряжения

$$\sigma_{CT} = \frac{M_{x_{\max}}}{W_x} = \frac{0.03125}{5.97 \cdot 10^{-4}} = 5.23 \text{ МПа}.$$

5. По формуле (9.2) вычисляем динамический коэффициент

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{v_{CT}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{0.00033}} = 56.$$

6. Динамический прогиб определяем по формуле (9.3)

$$v_D = 56 \cdot 0.00033 = 0.0185 \text{ м} = 1.85 \text{ см}.$$

7. Динамическое напряжение – по формуле (9.4)

$$\sigma_D = k_D \sigma_{CT} = 56 \cdot 5.23 = 292 \text{ МПа}.$$

Вывод: величина динамического напряжения превосходит не только расчётное сопротивление, но и предел текучести, то есть в дан-

ном случае нормы не выдерживаются, поэтому сечение должно быть увеличено.

Рассмотренный нами способ определения динамического напряжения при ударе, не учитывающий массы ударяемой конструкции, является приближённым, поэтому выведенная формула (9.2) даёт завышенное значение динамического коэффициента.

Из приведённого примера видно, что ударное действие нагрузок вызывает весьма большие напряжения в сечениях элементов конструкций по сравнению с такими же по величине статическими нагрузками.

Падение груза в 2.5 кН с высоты всего лишь 0.5 м вызывает напряжения в 56 раз больше напряжения, вызываемого тем же грузом при его статическом действии.

Отсюда заключаем, насколько важно при монтаже строительных конструкций (фундаментов, стен, перекрытий и т.д.) соблюдать чрезвычайную осторожность при опускании стенового блока или другой детали на уже собранную часть здания или сооружения с тем, чтобы при этом не произошло удара.

9.3. Методические указания к заданию № 14

1. Выписываем из таблицы сортамента (Приложение I) основные характеристики сечения балки.
2. Построив эпюру изгибающих моментов от статического действия груза, определяем величину наибольшего изгибающего момента, т.е. положение опасного сечения.
3. Вычисляем величину статического прогиба в точке удара.
4. Находим значение статического напряжения в опасном сечении.
5. По формуле (9.2) рассчитываем динамический коэффициент.
6. Считаем динамический прогиб по формуле (9.3).
7. По формуле (9.5) получаем динамические напряжения в опасном сечении.

Стоит обратить внимание на следующую ситуацию: если точка удара не совпадает с точкой, в которой определяются напряжения,

то статический прогиб $\upsilon_{СТ}$ в формуле (9.3) вычисляют отдельно. Для этого строится ещё одна единичная эпюра изгибающих моментов от действия единичной силы, приложенной в требуемой по условию задачи точке.

9.4. Варианты задания № 14

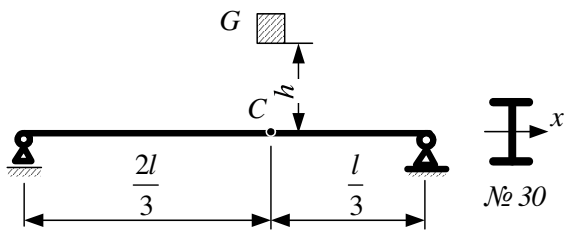
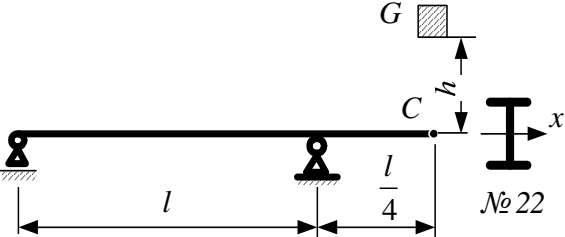
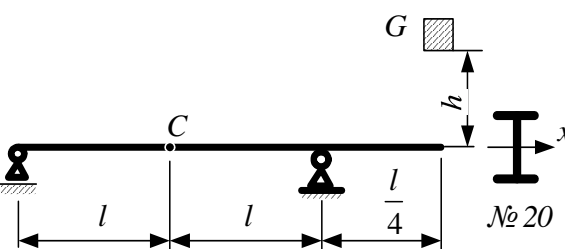
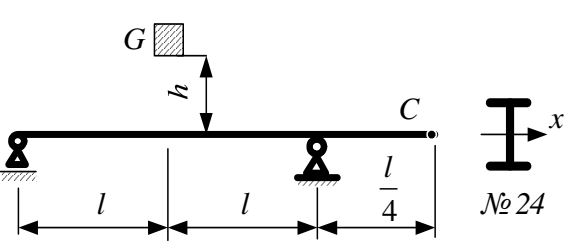
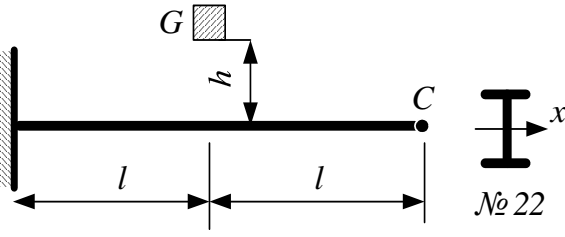
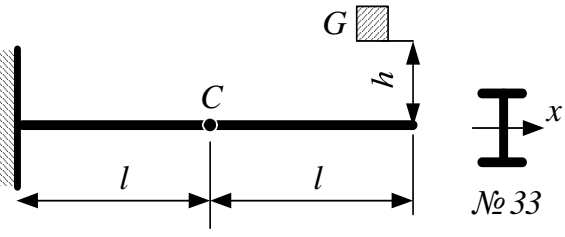
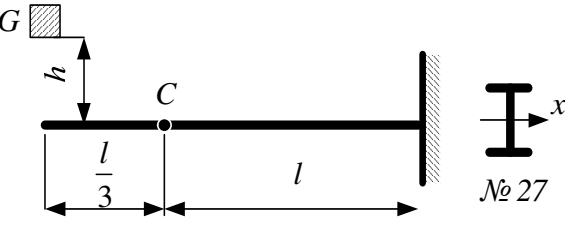
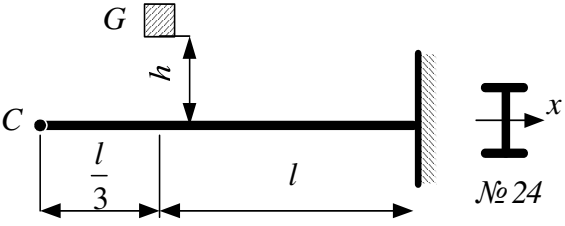
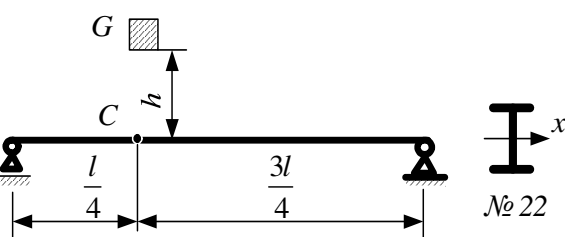
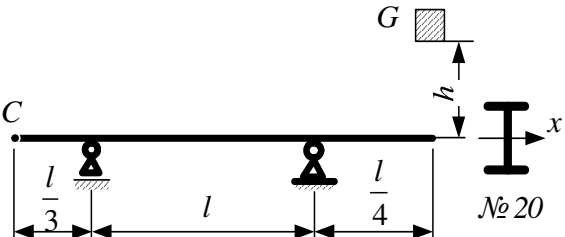
На стальную двутавровую балку падает груз G , как показано на схеме. Определить динамический прогиб в точке C и динамическое напряжение в опасном сечении балки, считая $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $R = 160 \text{ МПа}$.

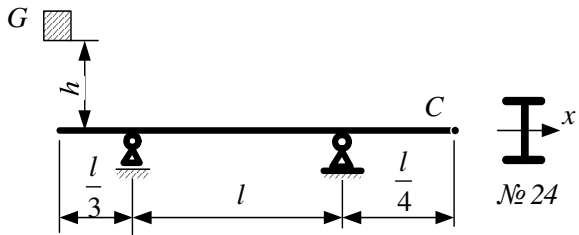
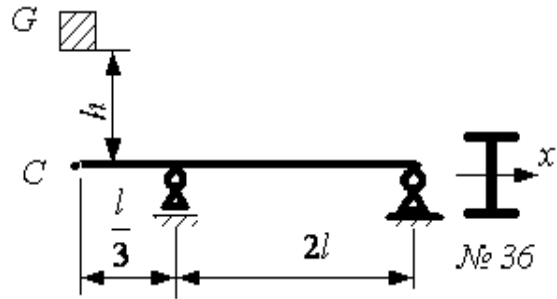
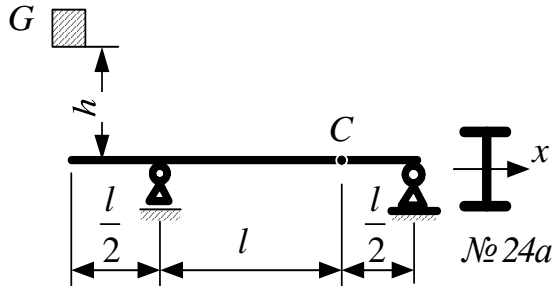
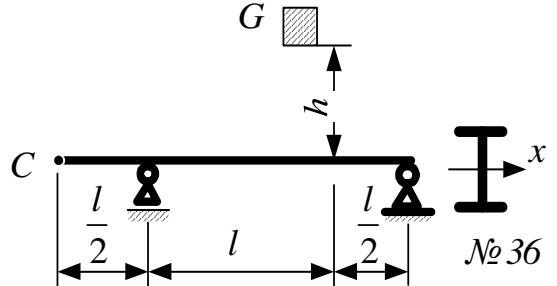
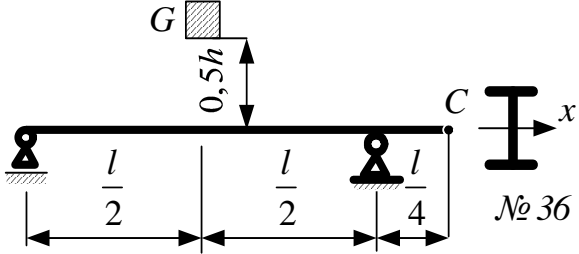
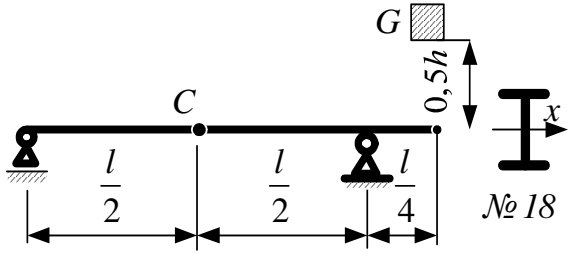
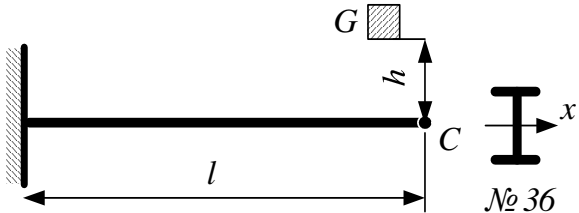
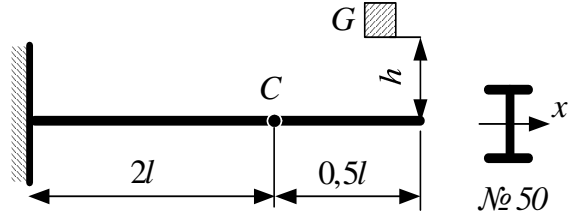
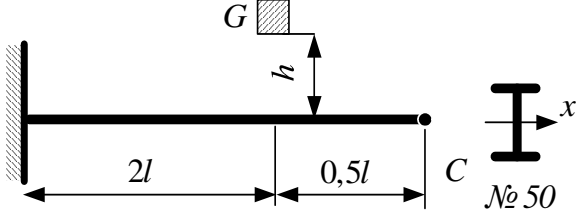
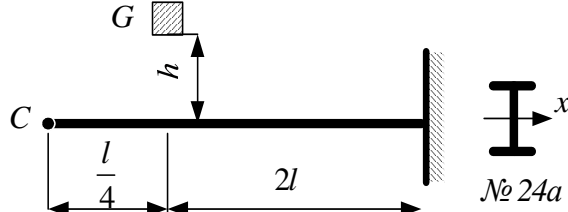
Выбор варианта

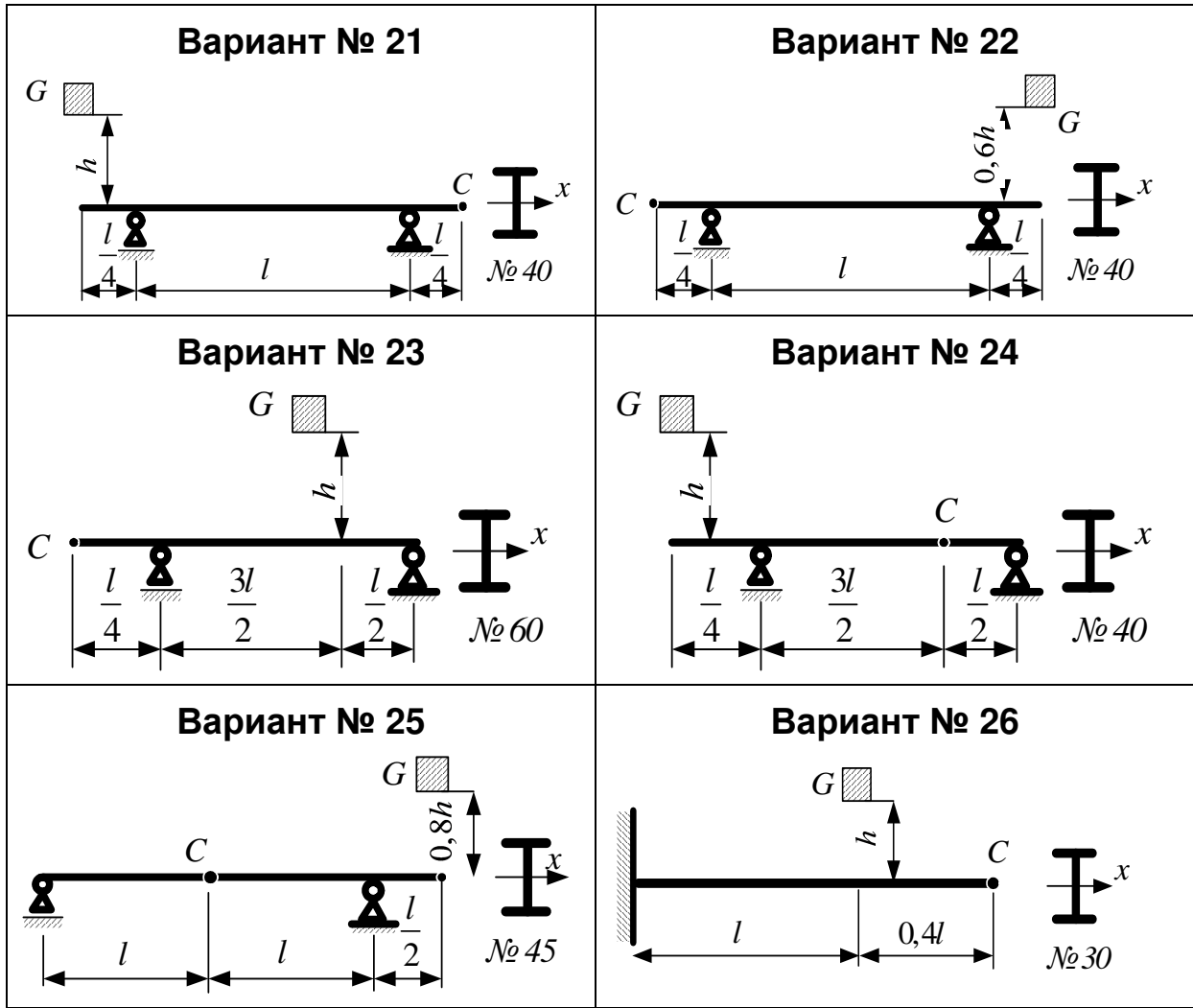
Выбор варианта производится аналогично предыдущим заданиям. Исходные данные студент выбирает из таблицы 9.1.

Таблица 9.1

номер шифра	$l, \text{ м}$	$h, \text{ м}$	$G, \text{ кН}$
1	2	0.2	3
2	1	0.25	4
3	3	0.3	3.5
4	4	0.35	4.5
5	2	0.4	1
6	3	0.45	2
7	4	0.5	1.8
8	1	0.55	2.7

<p style="text-align: center;">Вариант № 1</p>  <p style="text-align: right;">№ 30</p>	<p style="text-align: center;">Вариант № 2</p>  <p style="text-align: right;">№ 22</p>
<p style="text-align: center;">Вариант № 3</p>  <p style="text-align: right;">№ 20</p>	<p style="text-align: center;">Вариант № 4</p>  <p style="text-align: right;">№ 24</p>
<p style="text-align: center;">Вариант № 5</p>  <p style="text-align: right;">№ 22</p>	<p style="text-align: center;">Вариант № 6</p>  <p style="text-align: right;">№ 33</p>
<p style="text-align: center;">Вариант № 7</p>  <p style="text-align: right;">№ 27</p>	<p style="text-align: center;">Вариант № 8</p>  <p style="text-align: right;">№ 24</p>
<p style="text-align: center;">Вариант № 9</p>  <p style="text-align: right;">№ 22</p>	<p style="text-align: center;">Вариант № 10</p>  <p style="text-align: right;">№ 20</p>

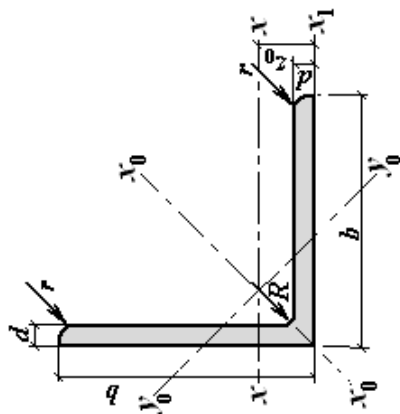
<p align="center">Вариант № 11</p>  <p align="right">№ 24</p>	<p align="center">Вариант № 12</p>  <p align="right">№ 36</p>
<p align="center">Вариант № 13</p>  <p align="right">№ 24a</p>	<p align="center">Вариант № 14</p>  <p align="right">№ 36</p>
<p align="center">Вариант № 15</p>  <p align="right">№ 36</p>	<p align="center">Вариант № 16</p>  <p align="right">№ 18</p>
<p align="center">Вариант № 17</p>  <p align="right">№ 36</p>	<p align="center">Вариант № 18</p>  <p align="right">№ 50</p>
<p align="center">Вариант № 19</p>  <p align="right">№ 50</p>	<p align="center">Вариант № 20</p>  <p align="right">№ 24a</p>



Приложения

Приложение I
Таблица 1.

Сталь прокатная угловая равнополочная (ГОСТ 8609-86)



Обозначения:

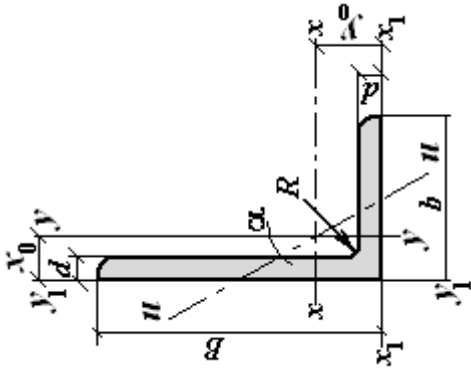
- b – ширина полки;
- d – толщина полки;
- R – радиус внутреннего закругления;
- r – радиус закругления полки;
- J – момент инерции;
- i – радиус инерции;
- z_0 – расстояние от центра тяжести до полки.

Но- мер про- филя	Размеры, мм			Пло- щадь сече- ния, см ²	Масса 1 м длины, кг	Справочные величины для осей							
	b	d	r			$x_0 - x_0$		$y_0 - y_0$		$x_1 - x_1$		z_0 , см	
						$J_{x_0 max}$, см ⁴	$i_{x_0 max}$, см	$J_{y_0 min}$, см ⁴	$i_{y_0 min}$, см	J_{x_1} , см ⁴			
4.5	45	3	1.7	5.13	1.39	8.13	1.75	2.12	0.89	9.04	1.21		
		4		6.63	1.38	10.5	1.74	2.74	0.89	12.10	1.26		
		5		8.03	1.37	12.7	1.72	3.33	0.88	15.30	1.30		
5	50	3	1.8	7.11	1.55	11.3	1.95	2.95	1.00	12.4	1.33		
		4		9.21	1.54	14.6	1.94	3.80	0.99	16.6	1.38		
		5		11.20	1.53	17.8	1.92	4.63	0.98	20.9	1.42		
5.6	56	4	2	13.10	1.73	20.8	2.18	5.41	1.11	23.3	1.52		
		5		16.00	1.72	25.4	2.16	6.59	1.10	29.2	1.57		

6.3	63	4	7	2.3	4.96	3.90	18.90	1.95	29.9	2.45	7.81	1.25	33.1	1.69
		5			6.13	4.81	23.10	1.94	36.6	2.44	9.52	1.25	41.5	1.74
		6			7.28	5.72	27.10	1.93	42.9	2.43	11.20	1.24	50.0	1.78
7	70	4.	8	2.7	6.20	4.87	29.00	2.16	46.0	2.72	12.0	1.39	51.	1.88
		5			6.86	5.38	31.90	2.16	50.7	2.72	13.2	1.39	56.7	1.90
		5			8.15	6.39	37.60	2.15	59.6	2.71	15.5	1.38	68.4	1.94
		6			9.42	7.39	43.00	2.14	68.2	2.69	17.8	1.37	80.1	1.99
		7			10.70	8.37	48.20	2.13	76.4	2.68	20.0	1.37	91.9	2.02
		8												
7.5	75	5	9	3	7.39	5.80	39.50	2.31	62.6	2.91	16.4	1.49	69.6	2.02
		6			8.78	6.89	46.60	2.30	73.9	2.90	19.3	1.48	83.9	2.06
		7			10.10	7.96	53.30	2.29	84.6	2.89	22.1	1.48	98.3	2.10
		8			11.50	9.02	59.80	2.28	94.9	2.87	24.8	1.47	113.	2.15
		9			12.8	10.10	66.10	2.27	105.0	2.86	27.5	1.46	127.	2.18
8	80	5.	9	3	8.63	6.78	52.70	2.47	83.6	3.11	21.8	1.59	93.2	2.17
		5			9.38	7.36	57.00	2.47	90.4	3.11	23.5	1.58	102.	2.19
		6			10.80	8.51	65.30	2.45	104.0	3.09	27.0	1.58	119.	2.23
		7			12.30	9.65	73.40	2.44	116.0	3.08	30.3	1.57	137.	2.27
		8												
9	90	6	10	3.3	10.60	8.33	82.10	2.78	130.0	3.50	34.0	1.79	145.	2.43
		7			12.30	9.64	94.30	2.77	150.0	3.49	38.9	1.78	169.	2.47
		8			13.90	10.90	106.00	2.76	168.0	3.48	43.8	1.77	194.	2.51
		9			15.60	12.20	118.00	2.75	186.0	3.46	48.6	1.77	219.	2.55
10	100	6.	12	4	12.8	10.1	122.0	3.09	193.0	3.88	50.7	1.99	214.	2.68
		5			13.8	10.8	131.0	3.08	207.0	3.88	54.2	1.98	231.	2.71
		7			15.6	12.2	147.0	3.07	233.0	3.87	60.9	1.98	265.	2.75
		8			19.2	15.1	179.0	3.05	284.0	3.84	74.1	1.96	333.	2.83
		10			22.8	17.9	209.0	3.03	331.0	3.81	86.9	1.95	402.	2.91
		12			26.3	20.6	237.0	3.00	375.0	3.78	99.3	1.94	472.	2.99
		14			29.7	23.3	264.0	2.98	416.0	3.74	112.0	1.94	542.	3.06
		16												

Таблица 2.

Сталь прокатная угловая неравнополочная (ГОСТ 8510-86)



Обозначения:

B – ширина большой полки;

b – ширина малой полки;

d – толщина полки;

R – радиус внутреннего закругления;

r – радиус закругления полки;

J – момент инерции;

i – радиус инерции;

x_0, y_0 – расстояние от центра тяжести до наружных
граней полкок.

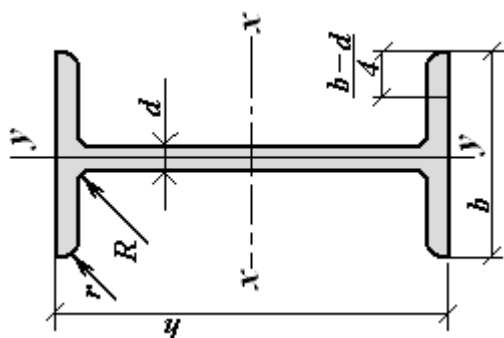
Но- мер про- филя	Размеры, мм				Мас са 1 м дли- ны, кг	Справочные величины для осей								Тан- генс угла α		
	B	b	d	r		$x-x$		$y-y$		x_1-x_1		y_1-y_1			$u-u$	
						J_{x^2} , см ⁴	i_{x^2} , см	J_{y^2} , см ⁴	i_{y^2} , см	$J_{x_1^2}$, см ⁴	y_0 , см	$J_{y_1^2}$, см ⁴	x_0 , см		J_{u^2} , см ⁴	i_{u^2} , см
5.5/3. 6	56	36	4	2	11.4	1.78	3.70	1.02	23.2	1.82	6.25	0.84	2.19	0.78	0.50	
			5		13.8	1.77	4.48	1.01	29.2	1.86	7.91	0.88	2.66	0.78		6
6.3/4	63	40	4	2.3	16.3	2.01	5.16	1.13	33.	2.03	8.51	0.91	3.07	0.87	0.40	
			5		19.9	2.00	6.26	1.12	41.4	2.08	10.8	0.95	3.73	0.86		7
			6		23.3	1.99	7.28	1.11	49.9	2.12	13.1	0.99	4.36	0.86		

			8			7.68	6.03	29.6	1.96	9.15	1.09	66.9	2.20	17.9	1.07	5.58	0.85	6 0.39 3 0.38 6
7.4/5	70	45	5	7.5	2.5	5.59	4.39	27.8	2.23	9.05	1.27	56.7	2.28	15.2	1.05	5.34	0.98	0.40 6
7.5/5	75	50	5	8	2.7	6.11	4.79	34.8	2.39	12.5	1.43	69.7	2.39	20.8	1.17	7.24	1.09	0.43
			6			7.25	5.69	40.9	2.38	14.6	1.42	83.9	2.44	25.2	1.21	8.48	1.08	6
			8			9.47	7.43	52.4	2.35	18.5	1.40	112.	2.52	34.2	1.29	10.9 0	1.07	0.43 5 0.43 0
8/5	80	50	5	8	2.7	6.36	4.99	41.6	2.56	12.7	1.41	84.6	2.60	20.8	1.13	7.58	1.09	0.38
			6			7.55	5.92	49.0	2.55	14.8	1.40	102.	2.65	25.2	1.17	8.88	1.08	7 0.38 6
9/5.6	90	56	5.5	9	3	7.86	6.17	65.3	2.88	19.7	1.58	132.	2.92	32.2	1.26	11.8	1.22	0.38
			6			8.54	6.70	70.6	2.88	21.2	1.58	145.	2.95	35.2	1.28	0	1.22	4
			8			11.18	8.77	90.9	2.85	27.1	1.56	194.	3.04	47.8	1.36	12.7 0	1.21	0.38 4
10/6.3	100	63														16.3 0		0.38 0
			6	10	3.3	9.59	7.53	98.3	3.20	30.6	1.79	198.	3.23	49.9	1.42	18.2	1.38	0.39
			7			11.10	8.70	113.	3.19	35.0	1.78	232.	3.28	58.7	1.46	0	1.37	3
			8			12.60	9.87	127.	3.18	39.2	1.77	266.	3.32	67.6	1.50	20.8 0	1.36	0.39
			10			15.50	12.1 0	154.	3.15	47.1	1.75	333.	3.40	85.8	1.58	23.4 0	1.35	0.39 1

11/7	11	70	6.5	10	3.3	11.40	8.98	142.	3.53	45.6	2.00	286.	3.55	74.3	1.58	26.9	1.53	0.38
	0		8			13.90	10.9	172.	3.51	54.6	1.98	353.	3.61	92.3	1.64	0	1.52	7
							0									32.3		0.4
																0		

Таблица 3.

Сталь прокатная – балки двутавровые (ГОСТ 8239-72)



Обозначения:

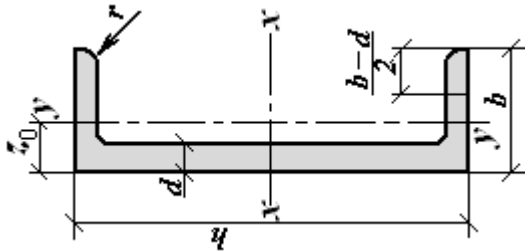
- h – высота балки;
- b – ширина полки;
- d – толщина стенки;
- t – средняя толщина полки;
- R – радиус внутреннего закругления;
- r – радиус закругления полки;
- J – момент инерции;
- W – момент сопротивления;
- S – статический момент полусечения;
- i – радиус инерции.

Но- мер про- фил я	Масса 1 м длины , кг	Размеры, мм					Пло- щадь сече- ния, см ²	Справочные величины для осей								
		$x - x$		$y - y$												
		J_{x^3} , см ⁴	W_{x^3} , см ³	i_{x^3} , см	S_{x^3} , см ³	J_{y^3} , см ⁴		W_{y^3} , см ³	i_{y^3} , см							
10	9.46	10	55	4.5	7.2	7.	2.5	12.	198	39.7	4.06	23.	17.9	6.49	1.22	
12	11.5	12	64	4.8	7.3	7.5	3.	14.7	350	58.4	4.88	33.7	27.9	8.72	1.38	

27a	33.9	27 0	5	6.0	10.2	11.	4.5	43.2	5500	407.	11.3	229.	337	50.0	2.8
30	36.5	30 0	5	6.5	10.2	12.	5.	46.5	7080	472.	12.3	268.	337	49.9	2.69
30a	39.2	30 0	5	6.5	10.7	12.	5.	49.9	7780	518.	12.5	292.	436	60.1	2.95
33	42.2	33 0	0	7.0	11.2	13.	5.	53.8	9840	597.	13.5	339.	419	59.9	3.79
36	48.6	36 0	5	7.5	12.3	14.	6.	61.9	1338 0	743.	14.7	423.	516	71.1	2.89
40	57.0	40 0	5	8.3	13.0	15.	6.	72.6	1906 2	953.	16.2	545.	667	86.1	3.03
45	66.5	45 0	0	9.0	14.2	16.	7.	84.7	2769 6	1231.	18.1	708.	808	101.	3.09
50	78.5	50 0	0	10.0	15.2	17.	7.	100.	3972 7	1589.	19.9	919.	1043	123.	3.23
55	92.6	55 0	0	11.0	16.5	18.	7.	118.	5596 2	2035.	21.8	1181	1356	151.	3.39
60	108.0	60 0	0	12.0	17.8	20.	8.	138.	7680 6	2560.	23.6	1491	1725	182.	3.54

Таблица 4.

Сталь прокатная – швеллеры (ГОСТ 8240-72)



Обозначения:

h – высота швеллера;

b – ширина полки;

d – толщина стенки;

t – средняя толщина полки;

R – радиус внутреннего закругления;

r – радиус закругления полки;

J – момент инерции;

W – момент сопротивления;

S – статический момент полусечения;

i – радиус инерции;

z_0 – расстояние от оси $y - y$ до наружной грани стенки.

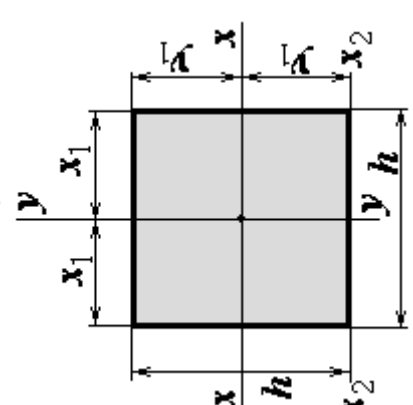
Но- мер про- фил я	Масса 1 м длины , кг	Размеры, мм					Пло- щадь сече- ния, $см^2$	Справочные величины для осей							
		h	b	d	t	R		$x - x$			$y - y$			z_0 , см	
								$J_{x'}$, $см^4$	$W_{x'}$, $см^3$	$i_{x'}$, см	$S_{x'}$, $см^3$	$J_{y'}$, $см^4$	$W_{y'}$, $см^3$		$i_{y'}$, см
5	4.84	50	32	4.4	7	6	2.5	22.8	9.1	1.92	5.59	5.61	2.75	0.95	1.1
6.5	5.9	65	36	4.4	7.2	6	2.5	48.6	15	2.54	9	8.7	3.68	1.08	1.2

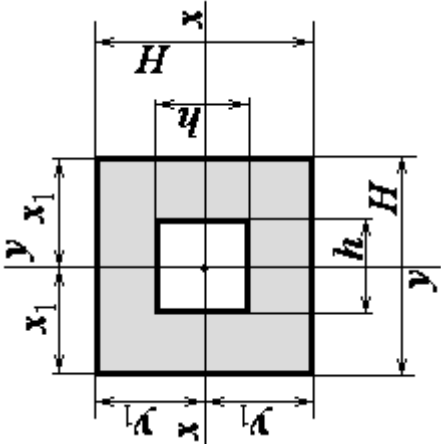
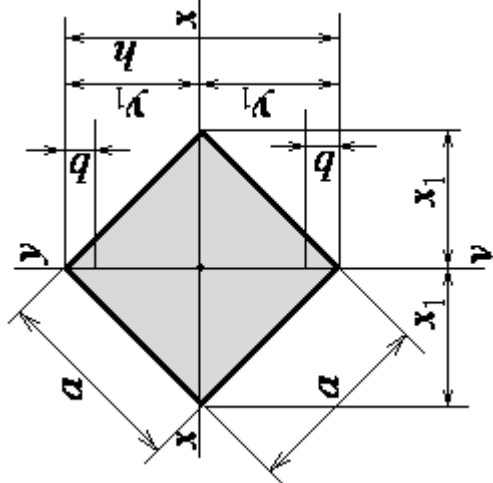
8	7.05	80	40	4.5	7.4	6.5	2.5	8.98	89.4	22.4	3.16	13.3	12.8	4.75	1.19	4
10	8.59	100	46	4.5	7.6	7	3	10.9	174	34.8	3.99	20.4	20.4	6.46	1.37	1.44
12	10.4	120	52	4.8	7.8	7.5	3	13.3	304	50.6	4.78	29.6	31.2	8.52	1.53	1.54
14	12.3	140	58	4.9	8.1	8	3	15.6	491	70.2	5.6	40.8	45.4	11	1.7	1.67
14a	13.3	140	62	4.9	8.7	8	3	17	545	77.8	5.66	45.1	57.5	13.3	1.84	1.87
16	14.2	160	64	5	8.4	8.5	3.5	18.1	747	93.4	6.42	54.1	63.3	13.8	1.87	1.8
16a	15.3	160	68	5	9	8.5	3.5	19.5	823	103	6.49	59.4	78.8	16.4	2.01	2.0
18	16.3	180	70	5.1	8.7	9	3.5	20.7	1090	121	7.24	69.8	86	17	2.04	1.94
18a	16.4	180	74	5.1	9.3	9	3.5	22.2	1190	132	7.32	76.1	105	20	2.18	2.13
20	18.4	200	76	5.2	9	9.5	4	23.4	1520	152	8.07	87.8	113	20.5	2.20	2.07
20a	19.8	200	80	5.2	9.7	9.5	4	25.2	1670	167	8.15	95.9	139	24.2	3.39	2.28
22	21	220	82	5.4	9.5	10	4	26.7	2110	192	8.89	110	151	25.1	2.37	2.21
22a	22.6	220	87	5.4	10.2	10	4	28.8	2330	212	8.99	121	187	30	2.55	2.46

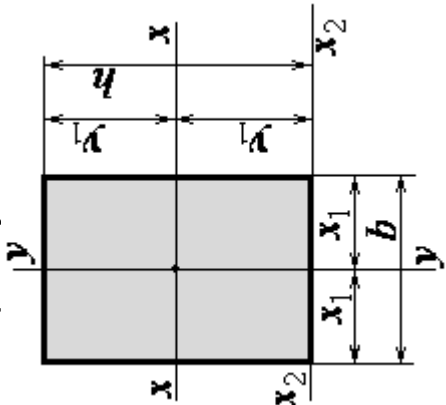
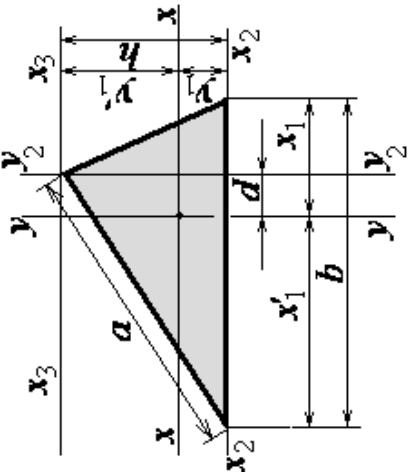
24	24	24	24	90	5.6	10	10.5	4	30.6	2900	242	9.73	139	208	31.6	2.60	2.4
		0															2
24a	25.8	24	24	95	5.6	10.	10.5	4	32.9	3180	265	9.84	151	254	37.2	2.78	2.6
		0				7											7
27	27.2	27	27	95	6	10.	11	4.5	35.2	4160	308	10.9	178	272	37.3	2.73	2.4
		0				5											7
30	31.8	30	30	10	6.5	11	12	5	40.5	5810	387	12.0	224	327	43.6	2.84	2.5
		0		0													2
33	36.5	33	33	10	7	11.	13	5	46.5	7980	484	13.1	281	410	51.8	2.97	2.5
		0		5		7											9
36	41.9	36	36	11	7.5	12.	14	6	53.4	10820	601	14.2	350	513	61.7	3.10	2.6
		0		0		6											8
40	48.3	40	40	11	8.0	13.	15	6	61.5	15220	761	15.7	444	642	73.4	3.23	2.7
		0		5		5											5

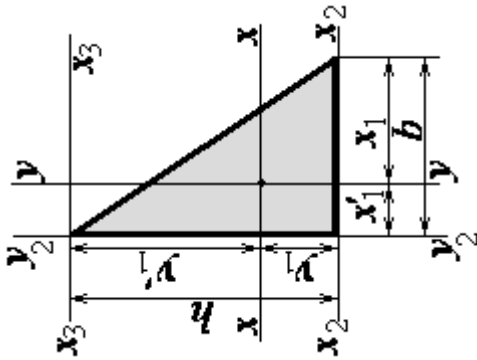
Приложение II
Таблица 1.

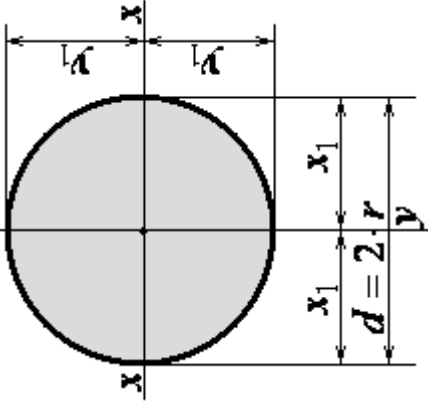
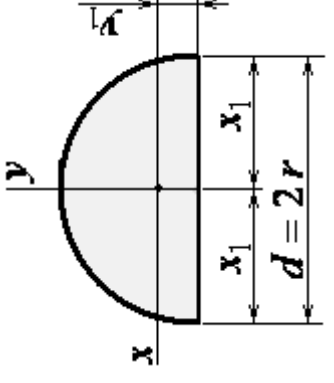
Геометрические характеристики плоских сечений

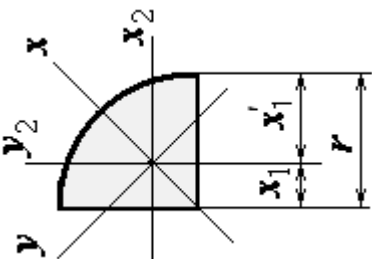
Форма сечения	Площадь сечения A	Координаты крайних точек сечения	Моменты инерции: осевые J_x, J_y ; центробежный J_{xy}	Моменты сопротивления W_x, W_y осевые	Радиусы инерции $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}$
<p>Квадрат</p>  <p>Любая центральная ось – главная</p>	$A = h^2$	$x_1 = y_1 = \frac{h}{2}$	$J_x = J_y = \frac{h^4}{12} = \frac{h^2 A}{12}$; $J_{x_2} = \frac{h^4}{3} = \frac{h^2 A}{3}$	$W_x = W_y = \frac{h^3}{6}$	$i_x = i_y = \frac{h}{\sqrt{12}} = 0.289 h$;

<p>Квадрат полый</p> 	$A = H^2 -$	$x_1 = y_1 = \frac{H}{2}$	$J_x = J_y = \frac{H^4 - h^4}{12} = \frac{H^2 + h^2}{12} A$	$W_x = W_y = \frac{H^4 - h^4}{6H}$	$i_x = i_y = \sqrt{\frac{H^2 + h^2}{12}} = 0.289 \times \sqrt{H^2 + h^2};$
<p>Квадрат поставлен на ребро</p> 	$A = a^2$	$x_1 = y_1 = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a = 0.71$	$J_x = J_y = \frac{a^4}{12} = \frac{a^2 A}{12} = \frac{h^4}{48}$	$W_x = W_y = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 = \frac{h^3}{24} = 0.118 a^3 = 0.042 h^3$	$i_x = i_y = 0.289 a;$

<p>Прямоугольник</p>  <p>Оси x – x и y – y – главные центральные</p>	$A = b \cdot h$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{2}$	$J_x = \frac{b h^3}{12} = \frac{A h^2}{12}$ $J_y = \frac{h b^3}{12} = \frac{A b^2}{12}$ $J_{x_2} = \frac{b h^3}{3} = \frac{A h^2}{3}$ $J_{y_2} = \frac{h b^3}{3} = \frac{A b^2}{3}$	$W_x = \frac{b h^2}{6} = \frac{A h}{6}$ $W_y = \frac{h b^2}{6} = \frac{A b}{6}$	$i_x = 0.289 \frac{h}{\sqrt{6}}$ $i_y = 0.289 \frac{b}{\sqrt{6}}$
<p>Треугольник</p> 	$A = \frac{1}{2} b \cdot h$	$y_1 = \frac{1}{3} h$ $y'_1 = \frac{2}{3} h$ $d = \frac{1}{3} (x'_1 - x_1)$	$J_x = \frac{b h^3}{36} = \frac{A h^2}{18}$ $J_{x_2} = \frac{h b^3}{12} = \frac{A b^2}{6}$ $J_{x_3} = \frac{b h^3}{4} = \frac{A h^2}{2}$ $J_y = \frac{b h (b^2 - x'_1 x_1)}{36}$	$W_{x_n} = \frac{b h^2}{12}$ для НИЖНИХ ВОЛОКОН; $W_{x_e} = \frac{b h^2}{24}$ для ВЕРХНИХ ВОЛОКОН; $W_{y_n} = \frac{b h (b^2 - x'_1 x_1)}{36 x_1}$ для правых волокон;	$i_x = \frac{h}{3\sqrt{2}} = 0.2357 h$ $i_y = \frac{1}{3\sqrt{2}} \times \sqrt{b^2 - x'_1 x_1} = 0.2357 \times \sqrt{b^2 - x'_1 x_1}$

			$= \frac{A(b^2 - x'_1 x_1)}{18}$ $J_{y_2} = \frac{h(x_1^3 + x_1^3)}{12}$	$W_{y_2} = \frac{bh(b^2 - x'_1 x_1)}{36x'_1}$ <p>для левых волокон</p>	
<p>Прямоугольный треугольник</p> 	$A = \frac{1}{2} b \cdot h$	$x'_1 = \frac{1}{3} b$ $x_1 = \frac{2}{3} b$ $y_1 = \frac{1}{3} h$ $y'_1 = \frac{2}{3} h$	$J_x = \frac{bh^3}{36} = \frac{Ah^2}{18}$ $J_{x_2} = \frac{hb^3}{12} = \frac{Ab^2}{6}$ $J_{x_3} = \frac{bh^3}{4} = \frac{Ah^2}{2}$ $J_y = \frac{bh^3}{36} = \frac{Ah^2}{18}$ $J_{y_2} = \frac{hb^3}{12} = \frac{Ab^2}{6}$ $J_{xy} = -\frac{b^2 h^2}{72}$ $J_{x_2 y_2} = \frac{b^2 h^2}{24}$ $J_{x_3 y_2} = -\frac{b^2 h^2}{8}$	$W_{x_n} = \frac{bh^2}{12}$ для нижних волокон; $W_{x_6} = \frac{bh^2}{24}$ для верхних волокон; $W_{y_n} = \frac{b^2 h}{24}$ для правых волокон; $W_{y_n} = \frac{b^2 h}{12}$ для левых волокон	$i_x = \frac{h}{3\sqrt{2}} = 0.2357 h$ $i_y = \frac{b}{3\sqrt{2}} = 0.2357 b$

<p>Круг</p> 	$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0.785d^2$	$x_1 = y_1 = \frac{d}{2} = r$	$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4 A d^2}{4 \cdot 16} = \frac{A r^2}{4} \approx 0.05d^4 \approx 0.785r^4$	$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0.1d^3 \approx 0.785r^3$	$i_x = i_y = \frac{d}{4} = \frac{r}{2}$
<p>Полукруг</p> 	$A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi d^2}{8} \approx 0.393d^2$	$x_1 = \frac{d}{2} = r$ $y_1 = \frac{2d}{3\pi} = \frac{4r}{3\pi} \approx 0.212d$	$J_x \approx \frac{d^4}{16} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) \approx 0.00686d^4 \approx 0.11r^4$ $J_y = \frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi r^4}{8} \approx 0.0246d^4 \approx 0.393r^4$	$W_x \approx 0.0324d^3 \approx 0.259r^3$ для НИЖНИХ ВОЛОКОН; $W_x \approx 0.0239d^3 \approx 0.191r^3$ для ВЕРХНИХ ВОЛОКОН; $W_y = \frac{\pi d^3}{64} = \frac{\pi r^3}{8} \approx 0.05d^3 \approx 0.393r^3$	$i_x \approx 0.132d$ $i_y = \frac{d}{4}$

<p>Четверть круга</p> 	$A = \frac{\pi r^2}{4} \approx 0.393d^2$	$x_1 = y_1 = \frac{4r}{3\pi} \approx 0.424r$ $x'_1 = y'_1 \approx 0.576r$	$J_{x_2}^{x_{\max}} \approx 0.0714r^4$ $J_{y_2}^{y_{\min}} \approx 0.0384r^4$ $J_{x_2} = J_{y_2} \approx 0.0549r^4$ $J_{x_2 y_2} = -0.0165r^4$	$W_{x_2} = W_{y_2} = \frac{\pi^2 r^3}{48} \frac{9\pi^2 - 64}{3\pi - 4} \approx 0.923r^3$ <p>для верхних и правых волокон;</p> $W_{x_2} = W_{y_2} = \frac{\pi^2 r^3}{192} (9\pi^2 - 64) \approx 1.245r^3$ <p>для нижних и левых волокон</p>	$i_{x_{\max}} \approx 0.302r$ $i_{y_{\min}} \approx 0.221r$
---	--	---	--	--	---

Литература

1. Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах. – М., 1984. – Ч.1. – 512 с.
2. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. – М., 1985. – Т.1. – 240 с.
3. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике /под ред. А. А. Яблонского. – М.: Высшая школа, 1985. – 367 с.
4. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. – М., 1995. – 416 с.
5. Яблонский А. А., Никифоров В. Н. Курс теоретической механики. – М., 1984. – Ч.1. – 368 с.
6. Варданян Г. С. и др. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. – М.: АСВ, 1995.
7. Александров А. В., Потапов В. Д., Державин Б. П. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 2000. – 560 с.
8. Сапрыкин В. Н. Техническая механика. – Ростов на Дону: Феникс, 2003.
9. Введение в сопротивление материалов: учеб. пособие/ под ред. Б. Е. Мельникова. – СПб.: Лань, 1999.
10. Пономарев А. Т., Зорин В. А. Сопротивление материалов. Курс лекций: учеб. пособие. – М.: Приор-издат, 2002.
11. Пирогов Е. Н., Гольцев В. Ю. Сопротивление материалов. Конспект лекций. – М.: Айрис-Пресс, 2003.
12. Техническая механика. Курс лекций с вариантами практических и тестовых заданий: учеб. пособие. – М.: ФОРУМ ИНФРА-М, 2005.
13. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986.
14. Дарков А. В., Шпиро Г. С. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1989.

15. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов: учеб. пособие / И. Н. Миролубов [и др.]. – М.: Высшая школа, 1985.
16. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наукова думка, 1988. – 704 с.
17. Сопротивление материалов: учеб. пособие / Н.А. Костенко [и др.]. – М.: Высшая школа, 2000.
18. Сборник задач по сопротивлению материалов с теорией и примерами / под ред. А. Г. Горшкова, Д. В. Тарлаковского. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
19. Сборник задач по сопротивлению материалов: учеб. пособие / Н. М. Беляев [и др.]. – СПб.: Иван Федоров, 2003.
20. Расчетные и курсовые работы по сопротивлению материалов: учеб. пособие / Ф. З. Алмаметов [и др.]. – М.: Высшая школа, 2003.
21. Ицкович Г. М., Минин Л. С., Винокуров А. И. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов. – М.: Высшая школа, 1999.
22. Копнов В. А. Сопротивление материалов для решения задач и выполнения лабораторных и расчетно-графических работ. – М.: Высшая школа, 2003.
23. Бородин Н. А. Сопротивление материалов. – М.: Дрофа, 2001.
24. Молотников В. Я. Курс сопротивления материалов. – СПб.: Лань, 2006.
25. Грач С. А. Расчетно-проектировочные работы по сопротивлению материалов.– Фрунзе: МЕКТЕП, 1972. – Ч.1.
26. Сетков В. И. Сборник задач по технической механике. – М.: Академия, 2004.