МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра строительной механики

Крекнин А.И.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Ч. 1 СТАТИКА

методические указания
по организации самостоятельной работы

для студентов специальностей:
270205 «Автомобильные дороги и аэродромы»,
270102 «Промышленное и гражданское строительство»,
270109 «Теплогазоснабжение и вентиляция»,
270112 «Водоснабжение и водоотведение»,
270115 «Экспертиза и управление недвижимостью»
очной формы обучения

Тюмень, 2010

УДК 531/534
К -79

Крекнин А. И. Теоретическая механика. Ч. 1. Статика: Методические указания по организации самостоятельной работы для студентов специальностей: 270205 «Автомобильные дороги и аэродромы», 270102 «Промышленное и гражданское строительство», 270109 «Теплогазоснабжение и вентиляция», 270112 «Водоснабжение и водоотведение», 270115 «Экспертиза и управление недвижимостью» очной формы обучения. – Тюмень: РИО ГОУ ВПО ТюмГАСУ, 2010. – 91 с.

Сборник разработан на основании рабочих программ ГОУ ВПО ТюмГаСУ дисциплины «Теоретическая механика» для студентов специальностей: 270205 «Автомобильные дороги и аэродромы», 270102 «Промышленное и гражданское строительство», 270109 «Теплогазоснабжение и вентиляция», 270112 «Водоснабжение и водоотведение», 270115 «Экспертиза и управление недвижимостью» очной формы обучения. Сборник предлагает методические указания и задания по организации самостоятельной работы студентов по двум основным направлениям: подготовка к практическим занятиям, выполнение и защита расчетно – графических работ. В целях оптимизации времени, затрачиваемого студентом на самостоятельную работу, в сборник включен справочник по основным теоретическим положениям дисциплины. Задания позволяют обеспечить дифференцированный подход к студентам в зависимости от уровня их базовой подготовки.

Рецензент: Нарута Т.А.

Тираж: 200 экз.
Заказ №

Редакционно-издательский центр ГОУ ВПО «Тюменский государственный архитектурно – строительный университет»

Содержание

1 ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1 Роль и направления самостоятельной работы студентов при изучении курса «Теоретическая механика»

При изучении дисциплины «Теоретическая механика» студенты в соответствии с ГОС и Рабочими программами помимо работы на лекциях и практических занятиях обязаны заниматься самостоятельной работой, общие направления и порядок осуществления которых определены Положением об организации внеаудиторной самостоятельной работы студентов ГОУ ВПО ТюмГАСУ, утвержденным ректором университета 28 января 2009 года.

Объемы самостоятельной работы определяются Укрупненными планами дисциплины, находящимися в составе рабочих Программ и учебными планами дисциплины (таблицы 1,2).

Таблица 1 − Укрупненный план дисциплины «Теоретическая механика» (специальность АДиА)

№ п/п	Наименование части курса	Всего часов	Количество часов		
			лекций	практических занятий	самостоятельной работы
1	Статика	67	17	17	33
2	Кинематика	68	17	17	34
3	Динамика	135	34	34	67
	Итого	270	68	68	134

Таблица 2 − Укрупненный план дисциплины «Теоретическая механика» (специальности ПГС, ВиВ, ТГВ, ЭУН)

№ п/п	Наименование части курса	Всего часов	Количество часов		
			лекций	практических занятий	самостоятельной работы
1	Статика	60	17	17	26
2	Кинематика	60	17	17	26
3	Динамика	90	17	34	39
	Итого	210	51	68	91

Как это следует из таблиц 1,2 объем часов, отводимых на самостоятельную работу студентов, составляет 43 – 50 % от общего объема часов отводимых ГОС на изучение дисциплины, в том числе по статике.

Основными направлениями самостоятельной работы студентов по дисциплине являются:

1. Подготовка к практическим занятиям;
2. Выполнение и защита расчетно – графических работ.

Подготовка к практическим занятиям в основном заключается в повторении теоретического материала по теме предстоящего занятия.

Основная часть самостоятельной работы приходится на выполнение, оформление и защиту индивидуальных расчетно – графических работ (далее по тексту – РГР). РГР выполняются по ключевым темам дисциплины. Во втором семестре изучаются две первые части дисциплины «Теоретическая механика» – «Статика» и «Кинематика». В соответствии с Рабочими программами по специальностям АДиА, ПГС, ВиВ, ТГВ, ЭУН по каждой части дисциплины выполняется одна РГР, то есть в семестре всего две РГР.

1.2 Подготовка к практическим занятиям по статике

Подготовка к практическим занятиям является обязательным элементом учебного процесса по дисциплине. Студент готовится к предстоящему занятию по вопросам, определенным преподавателем на предшествующем занятии (таблица 3). Для подготовки к практическому занятию достаточно материала содержащегося в справочниках настоящего сборника. Основные определения, теоремы, выводы и формулы должны быть выучены наизусть. Некоторые пробелы (при наличии) в знаниях элементарной математики можно восполнить с помощью сведение из таблицы 4.1 (приложение Г). Полезно составлять список возникших при подготовке теории вопросов, которые можно прояснить на практическом занятии. Преподаватель на практическом занятии ведет устный или письменный опрос студентов. Результаты опросов учитываются при аттестациях студентов и их допуске к экзамену.

Таблица 3 − Примерный перечень вопросов для подготовки к практическим занятиям по статике

№ занятия	Тема занятия	Перечень вопросов	Номер в Справочнике
1	**2**	**3**	**4**
1	Вводное занятие	–	Прил-е 4
2	Выбор объекта равновесия и определение направлений реакций связей	− Дать определение абсолютно твердого тела.	2.1.1
		− Дать определения свободного и несвободного тела.	
		− Сформулировать определение силы.	2.1.2
		− Дать представление о размерности силы.	
		− Дать определения внешних и внутренних сил.	
		− Перечислить параметры, определяющие действие силы на твердое тело.	
		− Сформулировать определения сосредоточенной силы и распределенной нагрузки.	
		− Дать характеристику основным системам сил.	2.1.3

Продолжение таблицы 3

1	2	3	4
2	Выбор объекта равновесия и определение направлений реакций связей	– Сформулировать аксиому о двух силах.	2.1.5
		– Сформулировать аксиому присоединения.	
		– Сформулировать аксиому параллелограмма.	
		– Сформулировать аксиому замораживания.	
		– Сформулировать аксиому действия и противодействия.	
		– Дать формулировку аксиомы связей.	
		– Дать определение связи.	2.2.1
		– Изложить понятие о реакции связи и правило определения направления реакции связи.	
		– Дать определение нерастяжимой нити и представление о направлении ее реакции.	2.2.2
		– Дать определение свободного опирания и представление о направлении реакции.	
		– Дать определение подвижного шарнира и представление о направлении его реакции.	
		– Дать определение неподвижного цилиндрического шарнира и представление о направлении его реакции.	
		– Дать определение сферического шарнира и представление о направлении его реакции.	
		– Дать определение невесомого стержня и представление о направлении его реакции.	
3	Равновесие сходящейся системы сил	– Дать определения равнодействующей и уравновешивающей силам.	2.1.3
		– Дать определение сходящейся системы сил и назвать ее виды.	
		– Дать понятие главного вектора системы сил.	2.4.1
		– Изложить понятие проекция силы на ось.	2.3.3
		– Изложить понятие проекция силы на плоскость.	
		– Дать понятие аналитического способа задания силы.	2.3.4
		– Дать понятие аналитического способа сложения сил.	2.3.5
		– Геометрические условия равновесия сходящейся системы сил	2.4.1
		– Аналитические условия равновесия сходящейся системы сил	2.4.2
4	Равновесие сходящейся системы сил	– Изложить понятие проекция силы на ось.	2.3.3
		– Изложить понятие проекция силы на плоскость.	
		– Геометрические условия равновесия сходящейся системы сил.	2.4.1
		– Аналитические условия равновесия сходящейся системы сил.	2.4.2

Продолжение таблицы 3

1	2	3	4
5	Контрольная работа по теме «Сходящаяся система сил»	Вопросы из Приложения А	4.1
6	Произвольная плоская система сил	– Дать перечень основных видов связей и изобразить их реакции.	2.2.2
		– Дать понятие алгебраического момента силы относительно центра.	2.5.1
		– Сформулировать теорему Вариньона о моменте равнодействующей для плоской системы сил.	2.5.2
		– Дать понятие о паре сил и плоской системе пар.	2.5.3
		– Дать понятие о приведении плоской системы сил к неподвижному центру.	2.5.4
		– Изложить условия равновесия произвольной плоской системы сил.	2.5.5
7	Произвольная плоская система сил. Сочленения.	– Понятие алгебраического момента силы относительно центра.	2.5.1
		– Теорема Вариньона о моменте равнодействующей (плоская система сил).	2.5.2
		– Дать понятие о паре сил и плоской системе пар.	2.5.3
		– Сформулировать условия равновесия произвольной плоской системы сил, приложенной к двум абсолютно твердым телам.	2.5.6
8	Контрольная работа по теме «Равновесие произвольной плоской системы сил»	Вопросы из Приложения Б	4.2
9	Произвольная пространственная система сил.	– Дать понятие момента силы относительно оси.	2.8.2
		– Раскрыть случаи равенства нулю момента силы относительно оси.	
		– Изложить аналитический способ нахождения главного момента системы сил относительно неподвижного центра.	2.8.5
		– Изложить геометрические условия равновесия произвольной пространственной системы сил.	2.8.6
		– Изложить аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил.	
		– Теорема Вариньона о моменте равнодействующей для пространственной системы сил.	2.8.7

1.3 Общие требования, предъявляемые к выполнению, оформлению и защите РГР

К каждой задаче, входящей в состав РГР дается 10 рисунков и таблица, содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рисунок С1а.4 – это рисунок 4 к задаче С1а и т. д. Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце таблицы.

Номера вариантов для выполнения РГР определяет преподаватель.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по последней цифре варианта, а номер условия в таблице – по предпоследней; например, для варианта 46 берутся рисунок 6 и условие 4 из таблицы.

Каждое задание выполняется на листах формата А4, страницы нумеруются. На обложке указывается: название дисциплины, номер РГР, фамилия и инициалы студента, вариант, факультет, специальность, номер группы, номер семестра и учебный год (образец титульного листа – Приложение Д).

Решение каждой задачи обязательно начинать на новом листе. Решения оформляются на одной стороне листа.

Сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано, и что требуется определить (текст задачи не переписывается). *Чертеж выполняется с учетом условия решаемого варианта задачи*; на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение должны соответствовать этим условиям.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др. Показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы получаемых величин *нужно обязательно*. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы и теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) и *подробно излагать весь ход расчетов*.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращены для переделки.

Работа, которая выполнена и оформлена правильно, должна быть защищена. Защита проводится на консультациях, назначенных преподавателем. Во время защиты студент обязан ответить на вопросы по задачам, а также на другие вопросы по теме, к которой относится задача. Примерный перечень вопросов по темам дан в приложениях А – В. Также по усмотрению преподавателя во время защиты студенту может быть предложена для решения задача по данной теме.

Правильно выполненные и защищенные задачи в виде сшитой папки с соответствующим титульным листом (Приложение Д) предъявляются преподавателю по мере их выполнения или на экзамене (зачете).

Альтернативная форма защиты задач. По усмотрению преподавателя по каждой из основных тем курса могут проводиться аудиторные контрольные работы. Положительная оценка по контрольной работе может быть основанием для освобождения студента от защиты соответствующей задачи (задач). Кроме того, оценки «хорошо» и «отлично» по контрольным работам, с учетом активной работы в семестре и верно выполненных РГР могут быть основанием для освобождения студента от экзамена (получение автоматических оценок за экзамен).

По статике выполняются РГР, состоящая из перечня задач, указанных в таблице 4.

Таблица 4 − Примерный перечень задач[1], входящих в РГР по статике

№ п/п	Тема	Название задачи
1	Равновесие сходящейся системы сил	Задача С1а. Исследование условий равновесия плоской сходящейся системы сил.
2	Равновесие произвольной плоской системы сил.	Задача С2а. Исследование условий равновесия произвольной плоской системы сил, приложенной к балке.
3	Равновесие произвольной плоской системы сил (сочленения).	Задача С1б. Исследование условий равновесия произвольной плоской системы сил, приложенной к составной балке.

<u>При невыполнении или отказе от защиты РГЗ студент не допускается к экзамену, как не выполнивший учебный план по дисциплине.</u>

2 КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК ПО СТАТИКЕ

Тема 2.1 Основные понятия и исходные положения статики

2.1.1 Общие определения

Статика

Статикой называется раздел механики, в котором излагается общее учение о силах, и изучаются условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.

Абсолютно твердое тело

Абсолютно твердым телом называется такое тело, расстояние между двумя точками которого всегда остается постоянным.

Свободное и несвободное тело

Тело, которому из данного положения можно сообщить любое перемещение в пространстве, называется *свободным*, а тело, перемещение которого ограничено другими телами – *несвободное*.

[1] По усмотрению преподавателя более сильным студентам могут быть даны более сложные задачи по статике (С1б, С2в и т.д.)

2.1.2 Сила

Определение силы

Сила – величина, являющаяся основной мерой механического взаимодействия тел. Сила - векторная величина. Она обозначается: $\vec{F}, \vec{P}, \vec{Q}, \vec{S}, \vec{T}$ и т. д.

Параметры, определяющие действие силы на твердое тело

Действие силы на тело определяется следующими параметрами (рисунок 1):

а) числовое значение (модуль силы) $|\vec{F}| = F$;

б) направление силы;

в) точка приложения силы (на рисунке – точка А).

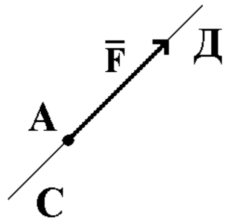


Рисунок 1

Линия действия силы

Линия (СД), вдоль которой действует сила, называется *линией действия силы* (рисунок 1).

Размерность сил

Основной единицей измерения силы в Международной системе единиц (СИ) является 1 ньютон (Н) и более крупной единицей – 1 килоньютон (1 кН = 1000 Н).

Внешние и внутренние силы

Внешними называются силы, которые действуют на тело (на тела системы) со стороны других тел (не входящих в систему тел).

Внутренними называются силы, с которыми части данного тела (тела данной системы) действуют друг на друга.

Сосредоточенные и распределенные силы

Сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной его точке, называется *сосредоточенной*.

Силы (нагрузки), действующие на все точки данного объема, данной части поверхности тела или линии, называются *распределенными*.

Распределенные нагрузки характеризуются интенсивностью q. Размерность $[q]$ = Н/м (Н/м^2).

Виды распределенной по линии нагрузки (силы)

а) *равномерно распределенная нагрузка* (q = const); заменяется сосредоточенной силой $Q = q \cdot l$, приложенной к середине участка распределения (рисунок 2).

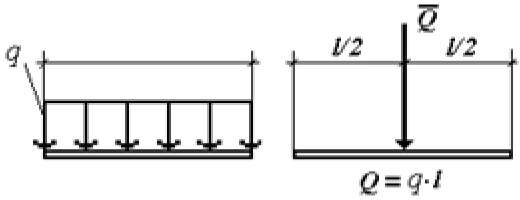


Рисунок 2

б) *распределенная по линейному закону* ($q = a \cdot x$); заменяется сосредоточенной силой $Q = q \cdot l /2$, приложенной на расстоянии 1/3 от конца участка распределения, где $q = q_{max}$ (рисунок 3).

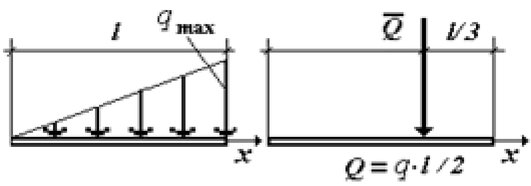
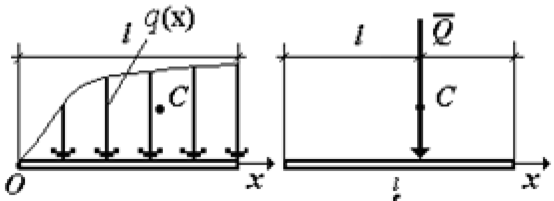


Рисунок 3

с) *распределенная по произвольному закону* $q(x)$; заменяется сосредоточенной силой $Q = \int_0^l q(x)dx$. Сила $\vec{Q}$ приложена в центре тяжести C фигуры, заключенной между осью Ox и $q(x)$ (рисунок 4).



$$Q = \int_0^l q(x)dx$$

Рисунок 4

2.1.3 Системы сил

Виды систем сил

а) совокупность сил, действующих на тело (или тела), называется *системой сил*;

б) если линии действия всех сил лежат в одной плоскости, то система сил называется *плоской*, а если не лежат в одной плоскости, - *пространственной*;

в) силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, называются *сходящимися*;

г) силы, линии действия которых параллельны друг другу, называются *параллельными*;

д) если одну систему сил, действующих на свободное твердое тело, можно заменить другой системой, не изменяя при этом состояния покоя или движения, в котором находится тело, то такие две системы сил называются *эквивалентными*;

е) система сил, под действием которой свободное твердое тело может находиться в покое, называется *уравновешенной* или *эквивалентной* нулю.

Равнодействующая и уравновешивающая силы

а) если данная система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется *равнодействующей* данной системы сил;

б) сила, равная равнодействующей по модулю, противоположна ей по направлению и действующая вдоль той же прямой, называется *уравновешивающей* силой.

2.1.4 Задачи статики

Первая задача статики

Преобразование систем сил, действующих на твердое тело, в системы им эквивалентные, в частности приведение данной системы сил относительно некоторого центра *O* к простейшему виду.

Вторая задача статики

Определение условий равновесия системы сил, действующих на свободное твердое тело.

2.1.5 Исходные положения (аксиомы или принципы) статики

Аксиома двух сил

Если на свободное абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю ($F_1 = F_2$) и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны (рисунок 5).

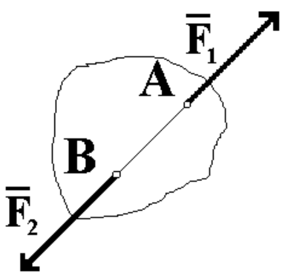


Рисунок 5

Аксиома присоединения

Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.

Следствие из первой и второй аксиом

Действие силы на абсолютно твердое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль ее линии действия в любую другую точку, т.е. сила – скользящий вектор (рисунок 6).

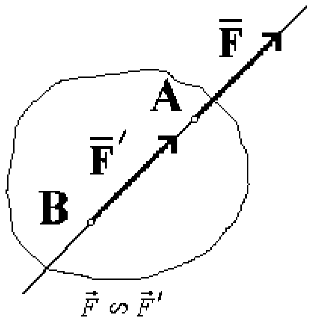


Рисунок 6

Аксиома параллелограмма

Две непараллельные силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах (рисунок 7).

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

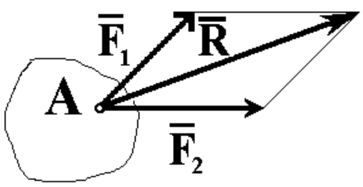


Рисунок 7

<u>Другая формулировка</u>

Две непараллельные силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, равную геометрической (векторной) сумме этих сил и приложенную в той же точке (рисунок 7).

Аксиома равенства действия и противодействия

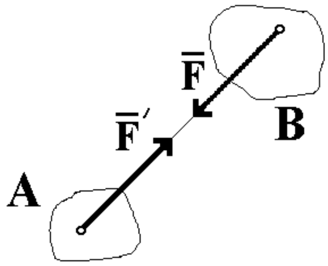


Рисунок 8

При всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же численно, но противоположное по направлению противодействие (рисунок 8), то есть

$$\vec{F}^{/} = -\vec{F}.$$

Силы $\vec{F}^{/}$ и $\vec{F}$ не образуют уравновешенную систему сил, так как они приложены к разным телам.

Свойство внутренних сил. Из аксиомы следует, что сумма внутренних сил, действующих на абсолютно твердое тело, образует уравновешенную систему сил, которую можно отбросить. То есть, при изучении условий равновесия тела необходимо учитывать только *внешние* силы.

Аксиома отвердевания (замораживания)

Равновесие изменяемого (деформируемого) тела, находящегося под действием данной системы сил, не нарушится, если тело считать отвердевшим (абсолютно твердым).

Другая формулировка

При равновесии силы, действующие на любое изменяемое (деформируемое) тело или изменяемую конструкцию, удовлетворяют тем же условиям, что и для тела абсолютно твердого.

Аксиома освобождаемости твердых тел от связей (аксиома связей)

Несвободное твердое тело можно считать свободным, если действие связей заменить их реакциями.

Тема 2.2 Связи и их реакции

2.2.1 Общие определения

Определение связи

Все то, что ограничивает перемещение тела в пространстве, называется связью.

Реакция связи

Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя тем или иным его перемещениям, называется силой реакции связи или просто *реакцией связи*.

Направление реакции связи (общее правило)

Реакция связи направлена в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу.

2.2.2 Некоторые основные виды связей

Гладкая плоскость (поверхность) или опора

Гладкой называется поверхность, трением о которую можно пренебречь.

Реакция $\vec{N}$ ($\vec{R}$) гладкой поверхности или опоры (свободное опирание о гладкую поверхность или просто свободное опирание) направлена по общей нормали к поверхности соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой точке (рисунки 9, 10).

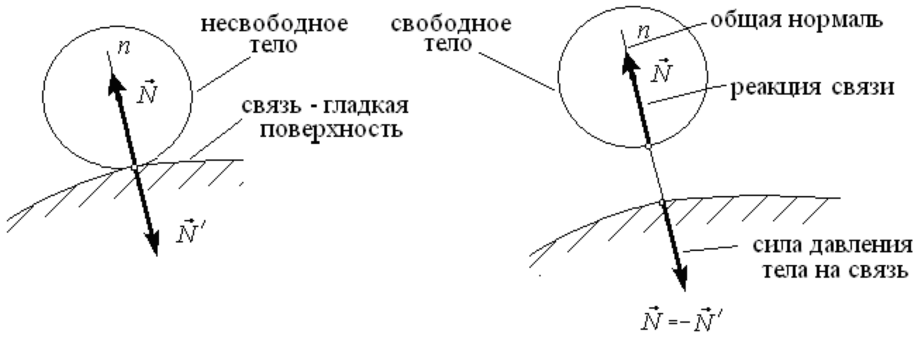


Рисунок 9

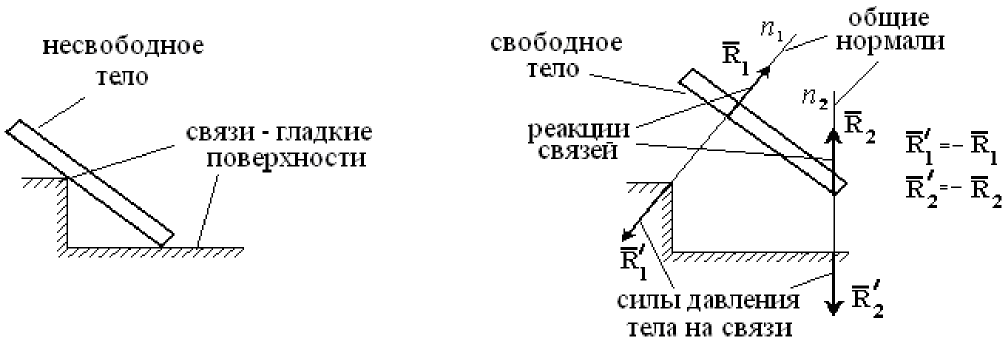


Рисунок 10

Нерастяжимая нить

Нерастяжимой нитью называется связь, которая не дает телу удалиться от точки подвеса нити (рисунок 11).

Реакция $\vec{T}$ натянутой нерастяжимой нити направлена вдоль нити к точке подвеса.

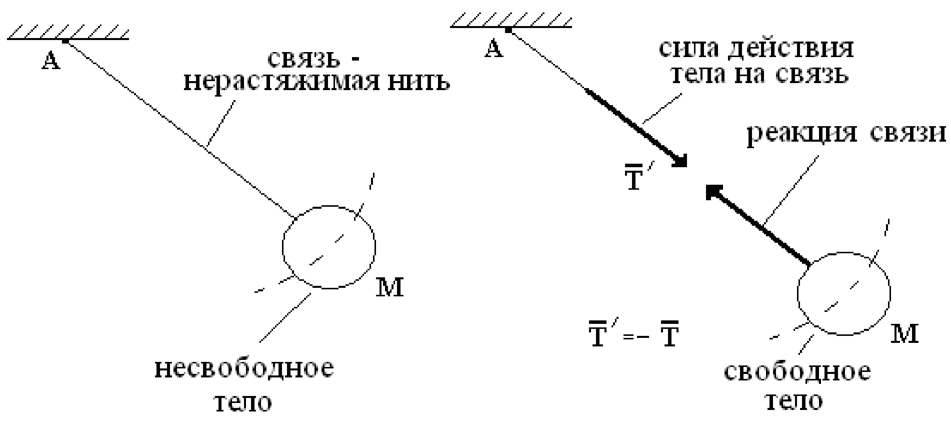


Рисунок 11

Неподвижный цилиндрический шарнир (подшипник)

Неподвижным цилиндрическим шарниром (или просто неподвижным шарниром) называется связь, которая осуществляет такое соединение тел, при котором одно тело может вращаться относительно другому вокруг общей оси, называемой осью шарнира (рисунок 12).

Реакциями неподвижного цилиндрического шарнир являются две взаимно перпендикулярные силы, направленные по осям координат. Обычно их обозначают $\vec{X}_A$ и $\vec{У}_A$.

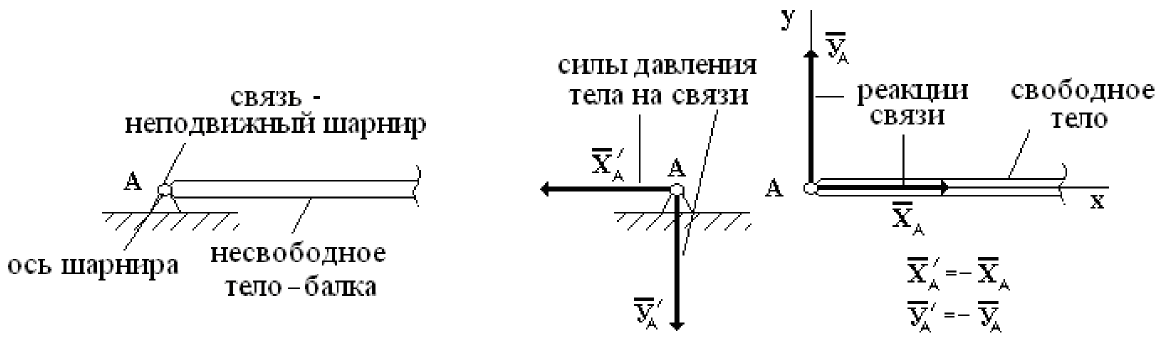


Рисунок 12

Реакция неподвижного шарнира (рисунок 13) может быть представлена в виде одной силы - равнодействующей $\vec{R}_A$ реакций $\vec{X}_A$ и $\vec{У}_A$.

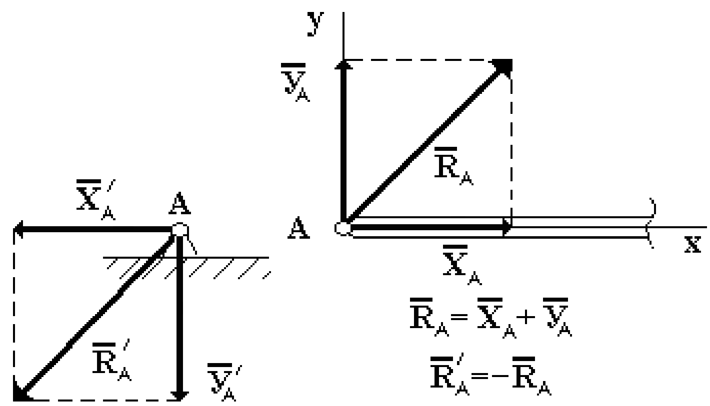


Рисунок 13

Представление реакции подвижного шарнира в виде равнодействующей $\vec{R}_A$ затруднено, так как она неизвестна по направлению.

Сферический шарнир (подпятник)

Сферическим шарниром называется связь, которая позволяет соединенным телам, как угодно поворачиваться одно относительно другого вокруг центра шарнира (рисунок 14).

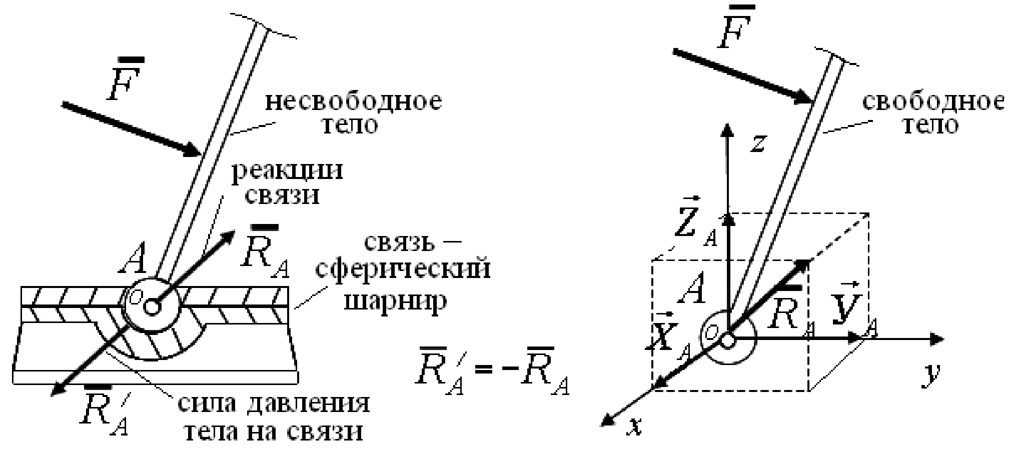


Рисунок 14

Реакция $\vec{R}_A$ сферического шарнира может иметь любое направление в пространстве. Реакцию сферического шарнира раскладывают на три составляющие силы $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, направленные по осям координат.

Сферический шарнир заменяется тремя реакциями $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, направленными по осям координат.

Подпятник – разновидность сферического шарнира

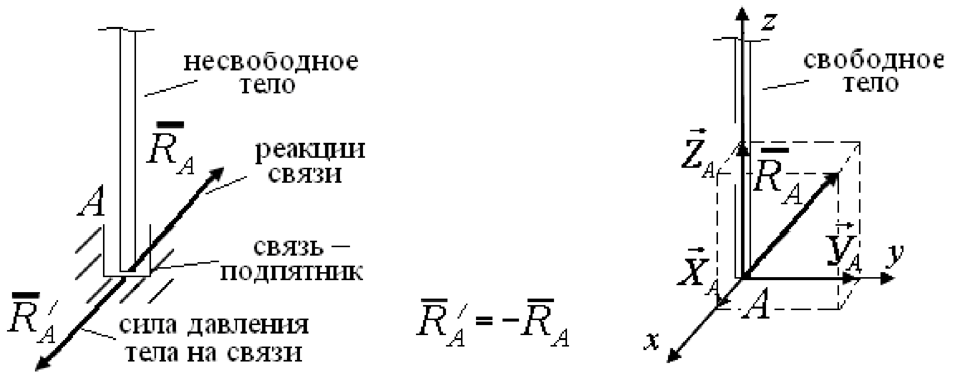


Рисунок 15

Реакция $\vec{R}_A$ подпятника (рисунок 15) может иметь любое направление в пространстве. Реакцию подпятника (как и сферического шарнира) раскладывают на три составляющие силы $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, направленные по осям координат.

Сферический шарнир заменяется тремя реакциями $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, направленными по осям координат.

Подвижный цилиндрический шарнир

Подвижным цилиндрическим шарниром (или просто подвижным шарниром) называется неподвижный цилиндрический шарнир, допускающий перемещение тела по опорной плоскости (рисунок 16).

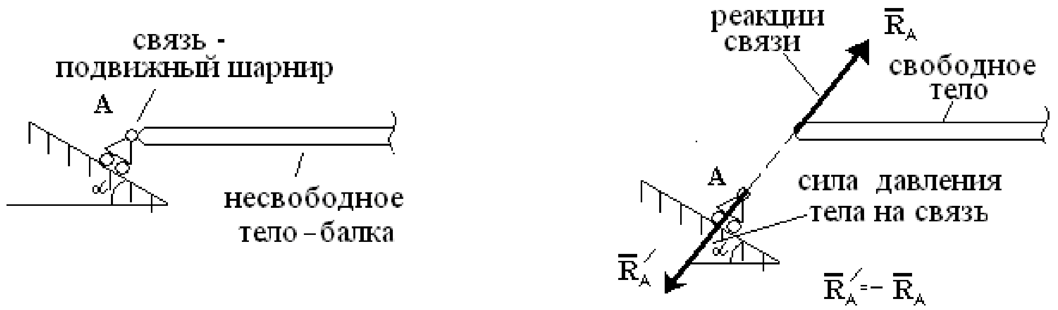


Рисунок 16

Линия действия $\vec{R}_A$ реакции шарнирно − подвижной опоры проходит через центр шарнира *перпендикулярно опорной плоскости*.

Разновидность подвижного цилиндрического шарнира – ползунок

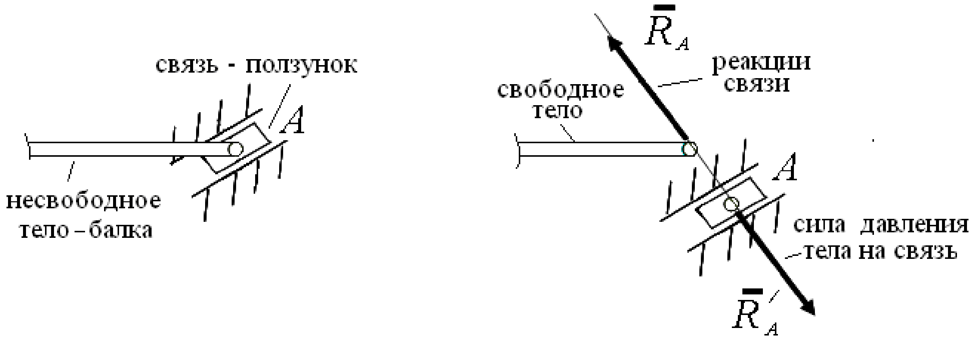


Рисунок 17

Линия действия $\vec{R}_A$ реакции ползунка (рисунок 17) проходит через центр его шарнира перпендикулярно направляющим ползунка.

Жесткая заделка (или неподвижная защемленная опора)

Жесткой заделкой называется связь, которая ограничивает любое перемещение тела (рисунок 18).

Различают два несколько видов жесткой заделки. Основные из них: плоская, пространственная и скользящая.

Плоская жесткая заделка

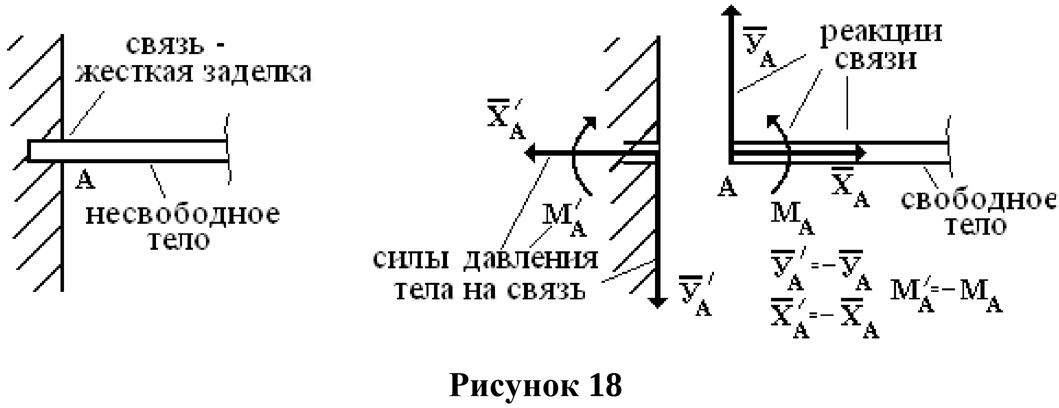


Рисунок 18

Действие плоской жесткой заделки (рисунок 18) заменяется наперед неизвестной реакцией $\vec{R}_A$, которая может иметь любое направление в плоскости действия сил, и парой сил, с наперед неизвестным моментом M_A (реактивным моментом).

Реакцию $\vec{R}_A$ обычно представляют в виде двух неизвестных сил $\vec{X}_A$ и $\vec{У}_A$, направленных вдоль осей координат.

Таким образом, плоская жесткая заделка заменяется двумя реакциями $\vec{X}_A$ и $\vec{У}_A$ и реактивным моментом M_A.

Пространственная жесткая заделка

Действие пространственной жесткой заделки (рисунок 19) заменяется наперед неизвестной реакцией $\vec{R}_A$, которая может иметь любое направление в пространстве, и парой сил, с наперед неизвестным векторным моментом $\vec{M}_A$ (реактивным моментом).

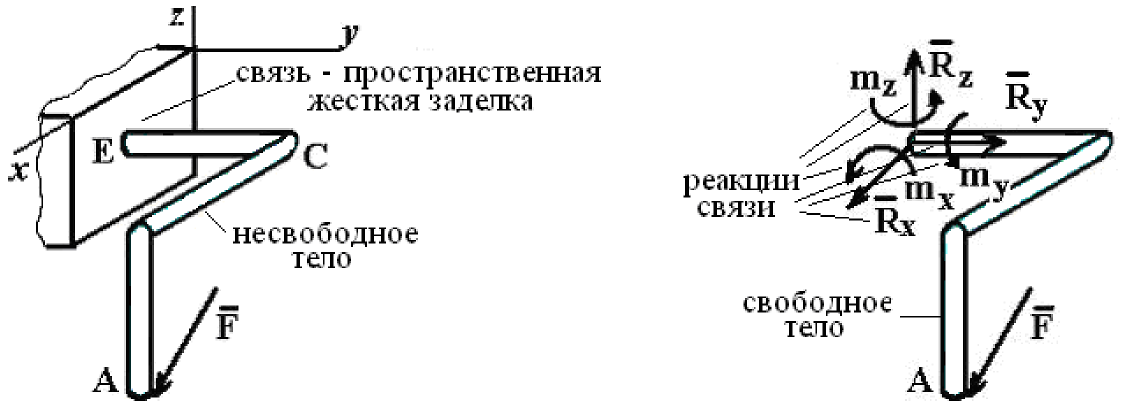


Рисунок 19

Примечание. На рисунке не показаны силы давления тела на связь.

Реакцию $\vec{R}_A$ пространственной жесткой заделки представляют в виде трех составляющих $\vec{R}_X, \vec{R}_Y, \vec{R}_Z$, направленных по осям координат, а векторный момент $\vec{M}_A$ в виде трех проекций: m_x, m_y и m_z, являющимися моментами реактивных пар сил относительно соответствующих осей координат.

Таким образом, пространственная жесткая заделка заменяется тремя реакциями $\vec{R}_X, \vec{R}_Y, \vec{R}_Z$ и тремя реактивными моментами m_x, m_y, m_z.

Скользящая жесткая заделка (плоская)

Скользящая заделка − это заделка, которая «запрещает» поворот, но не ограничивает поступательное перемещение вдоль направляющих, по которым заделка может скользить (рисунок 20).

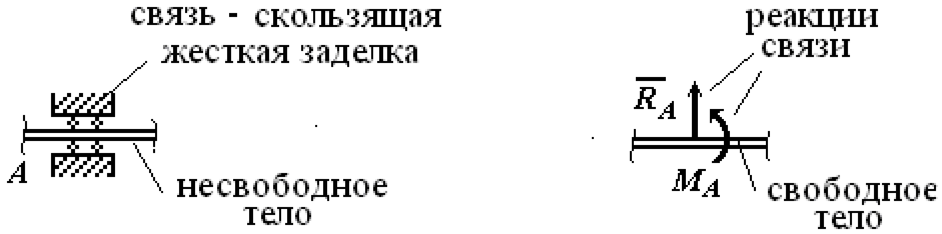


Рисунок 20

Реакции скользящей заделки: $\vec{R}_A$ - реакция, перпендикулярная направляющим, и реактивный момент – M_A.

Прямолинейный невесомый стержень

Прямолинейным невесомым называется стержень, весом которого по сравнению с воспринимаемой им нагрузкой можно пренебречь и осью которого является прямая линия (рисунок 21).

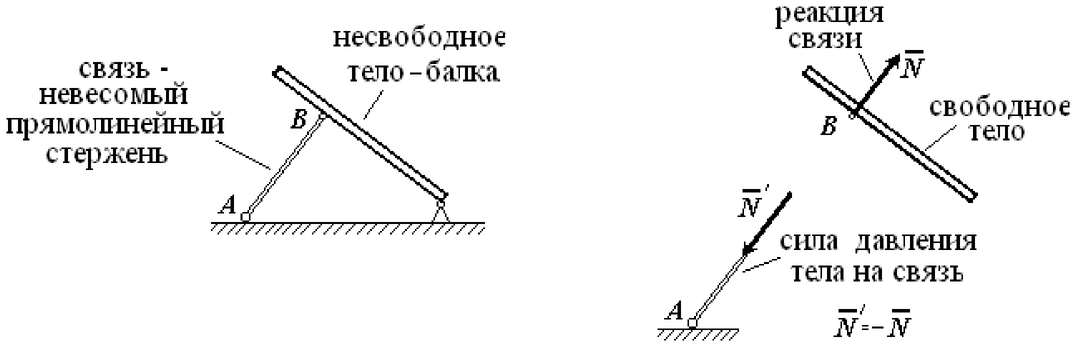


Рисунок 21

Реакция $\vec{N}$ шарнирно прикрепленного прямолинейного стержня направлена вдоль оси стержня.

Действие шарнирно прикрепленного прямолинейного стержня на связь может быть заменено усилием в стержне $\vec{S}$. При этом усилие направляется вдоль оси стержня (рисунок 22) в предположении, что он растянут, то есть усилие предполагается положительным (если стержень растянут, то $S > 0$, если сжат – $S < 0$).

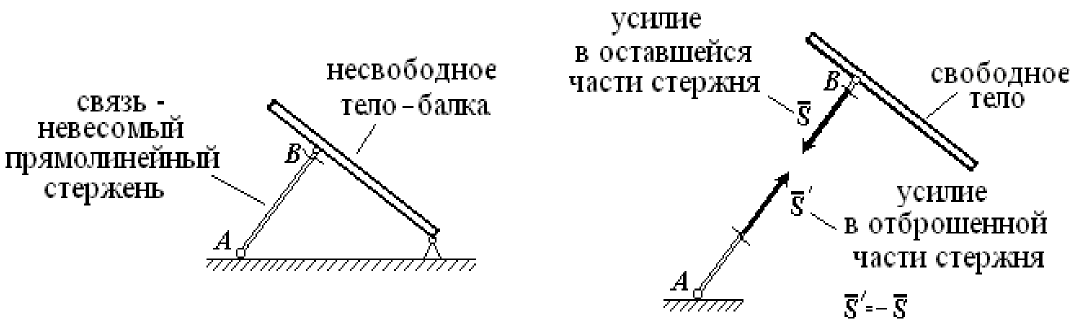


Рисунок 22

Тема 2.3 Сложение и разложение сил

2.3.1 Сложение сил

Сложение 2-х сил

Геометрическая сумма $\vec{R}$ двух сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ по аксиоме находится по правилу параллелограмма (рисунок 23).

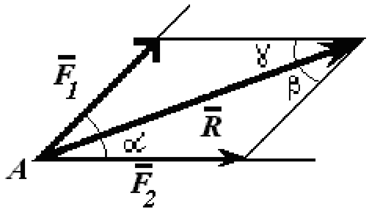


Рисунок 23

или построением силового треугольника (рисунок 24).

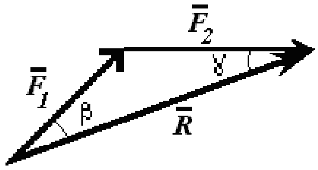


Рисунок 24

Модуль силы $\vec{R}$ определяется по формуле $|\vec{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cos\alpha}$,

Углы β, γ – по формулам

$$F_1 / \sin\gamma = F_2 / \sin\beta = R / \sin\alpha$$

Сложение 3-х сил, не лежащих в одной плоскости

Геометрическая сумма $\vec{R}$ трех сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$, не лежащих в одной плоскости, определяется посредством последовательного применения правила параллелограмма (рисунок 25) и изображается диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах (правило параллелепипеда).

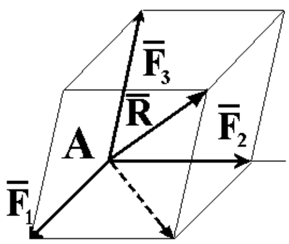


Рисунок 25

Сложение системы сил

Сложение системы сил сводится к нахождению ее главного вектора.

Главным вектором любой системы сил называется геометрическая сумма всех сил, входящих в систему:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_k .$$

Главный вектор находится двумя способами:

1. Последовательным сложением системы сил по правилу параллелограмма (рисунок 26);

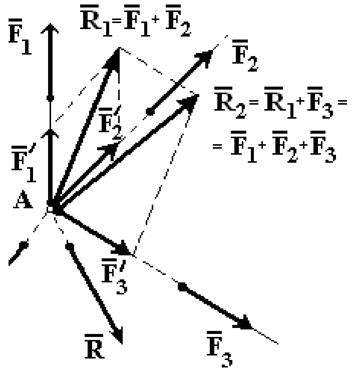


Рисунок 26

2. Построением многоугольника сил (рисунок 27), который строится посредством параллельного переноса сил. При этом каждая последующая сила откладывается в масштабе от конца предыдущей силы. Замыкающая сторона многоугольника – главный вектор $\vec{R}$.

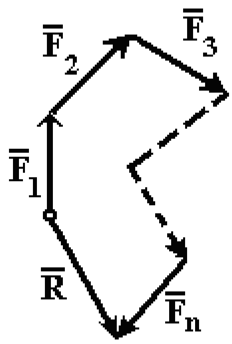


Рисунок 27

2.3.2 Разложение сил

Разложение силы по двум заданным направлениям

Для разложения силы $\vec{R}$ по двум заданным направлениям *AB* и *AD* необходимо построить параллелограмм (рисунок 28), у которого разлагаемая сила является диагональю, а стороны параллельны заданным направлениям.

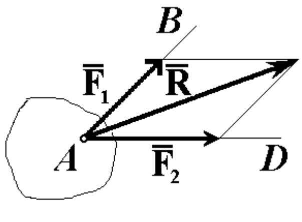


Рисунок 28

Силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, направленные по сторонам параллелограмма будут составляющими силами.

Разложение силы по трем заданным направлениям

Для разложения силы $\vec{R}$ по трем заданным направлениям, не лежащим в одной плоскости необходимо построить параллелепипед, у которого диагональ изображает заданную силу. Тогда составляющие силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ будут направлены вдоль ребер этого параллелепипеда (рисунок 29).

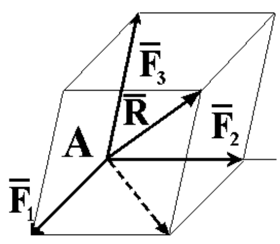


Рисунок 29

2.3.3 Проекция силы на ось и на плоскость

Проекция силы на ось

Проекцией силы (или любого другого вектора) на ось называется алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси (рисунок 30).

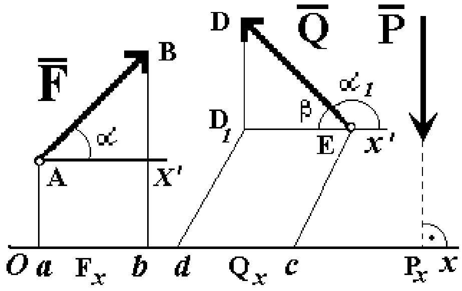


Рисунок 30

$$F_x = F \cdot \cos\alpha = ab,$$
$$Q_x = Q \cdot \cos\alpha_1 = -Q \cdot \cos\beta = -dc,$$
$$P_x = 0.$$

Проекция силы на плоскость

Проекция силы $\vec{F}$ на плоскость Oxy - вектор $\vec{F}_{xy} = \overrightarrow{OB_1}$, заключенный между проекциями начала и конца силы $\vec{F}$ на эту плоскость (рисунок 31).

Модуль $|\vec{F}_{xy}| = F \cdot \cos\theta.$

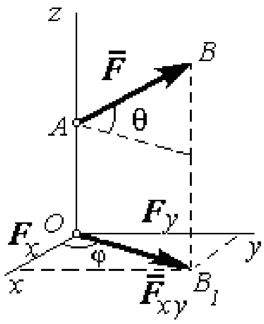


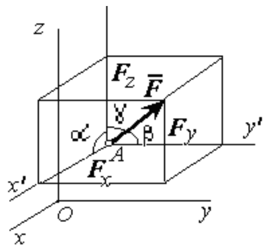
Рисунок 31

Проекция силы на плоскость (двойное проектирование)

В некоторых случаях для нахождения проекции силы на ось удобно найти сначала ее проекцию на плоскость, а затем найденную проекцию на плоскость спроектировать на данную ось (рисунок 31).

$$F_x = F_{xy} \cdot \cos\varphi = F \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi,$$
$$F_y = F_{xy} \cdot \sin\varphi = F \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi.$$

Иногда для нахождения проекции силы на ось удобно применять прямое проектирование (рисунок 32)



$$F_x = F \cdot \cos\alpha,$$
$$F_y = F \cdot \cos\beta,$$
$$F_z = F \cdot \cos\gamma.$$

Рисунок 32

2.3.4 Аналитический способ задания силы

Для того чтобы задать силу аналитически достаточно задать ее проекции на оси системы координат.

Пространственная система координат

Если заданы проекции F_x, F_y, F_z, то модуль силы определится по формуле (рисунок 33)

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

а направление силы находится через вычисление углов α, β, γ (углы, которые составляет сила с осями координат) с помощью направляющих косинусов

$\cos\alpha = F_x/F; \quad \cos\beta = F_y/F; \quad \cos\gamma = F_z/F$, и

$\alpha = \arccos(F_x/F), \quad \beta = \arccos(F_y/F), \quad \gamma = \arccos(F_z/F)$.

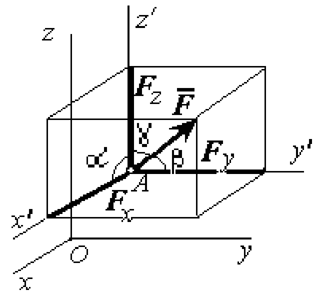


Рисунок 33

Плоская система координат

Если заданы проекции F_x и F_y, то модуль и направление силы определятся по формулам (рисунок 34)

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \qquad \alpha = \arccos(F_x / F).$$

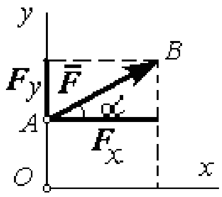


Рисунок 34

2.3.5 Аналитический способ сложения сил

Аналитический способ сложения сил базируется на теореме геометрии:
Теорема. Проекция вектора суммы на какую-нибудь ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось.

Сложение пространственной системы сил

Пусть силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ заданы аналитически, т.е. известны проекции сил на оси координат: $F_{1x}, F_{2x}, \ldots, F_{nx}; F_{1y}, F_{2y}, \ldots, F_{ny}; F_{1z}, F_{2z}, \ldots, F_{nz}$.

Согласно теореме из геометрии, если $\vec{R}$ есть сумма векторов $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, т.е. $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$, то $R_x = \sum F_{kx}$, $R_y = \sum F_{ky}$, $R_z = \sum F_{kz}$.
Вычислив R_x, R_y, R_z, найдем модуль равнодействующей (главного вектора) силы $\vec{R}$

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Направление равнодействующей силы $\vec{R}$ находится через вычисление углов α, β, γ (углы, которые составляет равнодействующая с осями координат) с помощью направляющих косинусов

$$\cos\alpha = R_x/|\vec{R}|; \quad \cos\beta = R_y/|\vec{R}|; \quad \cos\gamma = R_z/|\vec{R}|,$$

и

$$\alpha = \arccos(R_x / |\vec{R}|), \quad \beta = \arccos(R_y / |\vec{R}|), \quad \gamma = \arccos(R_y / |\vec{R}|).$$

Сложение плоской системы сил

Пусть силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ лежат в одной плоскости и заданы аналитически, т.е. заданы проекции сил на оси координат: $F_{1x}, F_{2x}, \ldots, F_{nx}$; $F_{1y}, F_{2y}, \ldots, F_{ny}$. Согласно теореме из геометрии

$$R_x = \sum F_{кx}, \quad R_y = \sum F_{кy}.$$

Модуль и направление $\vec{R}$

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \qquad \cos\alpha = R_x / |\vec{R}| \text{ и } \alpha = \arccos\,(R_x \,/\, |\vec{R}|).$$

Тема 2.4 Равновесие сходящейся системы сил

2.4.1 Геометрические условия равновесия сходящейся системы сил

Сходящаяся система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ эквивалентна одной силе $\vec{R}$, которая называется *равнодействующей силой* $\vec{R}$.

Равнодействующая $\vec{R}$ (также как и главный вектор) равна геометрической сумме всех сил, т.е. $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$. То есть для сходящейся системы сил (только для нее !) равнодействующая и главный вектор совпадают. Таким образом, при равновесии

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_k = 0.$$

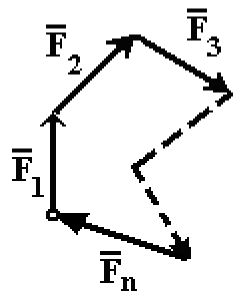


Рисунок 35

Так как $\vec{R} = 0$, то многоугольник сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ замкнут (рисунок 35), то есть конец последней силы $\vec{F}_n$ совпадает с началом первой $\vec{F}_1$.

Эти условия (равенство нулю равнодействующей и замкнутость многоугольника сил) являются *геометрическими условиями равновесия сходящейся системы*.

2.4.2 Аналитические условия равновесия сходящейся системы сил

Пространственная система сходящихся сил

Для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций этих сил на каждую из трех координатных осей была равна нулю

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum F_{kz} = 0.$$

Эти условия называются *аналитические условия равновесия пространственной сходящейся системы сил*.

Плоская система сходящихся сил

Для равновесия плоской сходящейся системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций этих сил на каждую из двух координатных осей была равна нулю

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0.$$

Теорема о трех силах

<u>Теорема.</u> Если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке (рисунок 36).

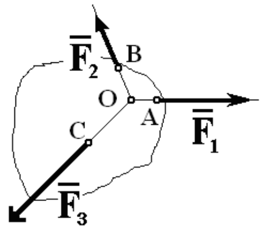


Рисунок 36

Тема 2.5 Произвольная плоская система сил

2.5.1 Понятие момента силы

Виды моментов силы

Различают следующие виды момента силы:

а) алгебраический момент силы относительно центра;

б) векторный момент силы относительно центра;

в) момент силы относительно оси.

будут рассмотрены ниже

Алгебраический момент силы

Алгебраическим моментом силы относительно центра ***O*** называется взятая с соответствующим знаком скалярная величина равная произведению модуля силы на ее плечо (рисунок 37)

$$m_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h.$$

Центр ***O***, относительно которого вычисляется алгебраический момент, называется *моментной точкой.*

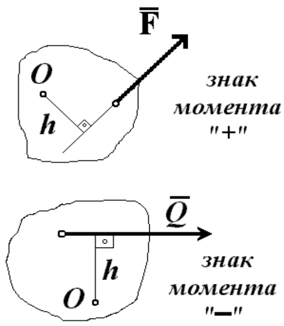


Рисунок 37

Кратчайшее расстояние от моментной точки до линии действия силы называется *плечом силы* h (рисунок 37).

Если сила поворачивает тело вокруг моментной точки против хода часовой стрелки, то *знак момента* «+», если по часовой стрелке – то «–» (рисунок 37).

Алгебраический момент силы характеризует ее вращательный эффект (*физический смысл алгебраического момента силы*).

Случаи равенства нулю алгебраического момента силы

Алгебраический момент силы относительно центра равен нулю в следующих случаях (рисунок 38):

а) модуль силы равен нулю;

б) линия действия силы проходит через моментную точку (плечо h = 0).

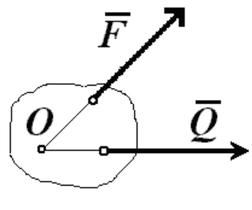


Рисунок 38

2.5.2 Теорема Вариньона о моменте равнодействующей (плоская система сил)

Различают следующие виды теорема Вариньона:
а) для плоской системы сил;
б) для пространственной системы сил.

Теорема Вариньона для плоской системы сил

Если данная система сил имеет равнодействующую, то ее момент относительно любого центра ***O*** равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно того же центра

$$m_O(\vec{R}) = \sum m_O(\vec{F}_k)\,.$$

Теорема Вариньона для плоской системы сил (случай двух сил)

Если равнодействующая двух сил $\vec{R} = \vec{F}^{/} + \vec{F}^{//}$, то

$$m_O(\vec{R}) = m_O(\vec{F}^{/}) + m_O(\vec{F}^{//}).$$

Обычно $\vec{F}^{/}$ и $\vec{F}^{//}$ направляют параллельно декартовым осям координат (рисунок 39).

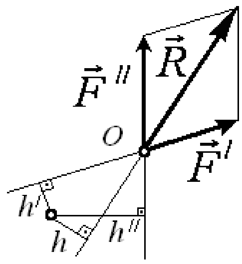


Рисунок 39

2.5.3 Пара сил. Плоская система пар

Парой сил называется система двух $(\vec{F}, \vec{F}')$ равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело (рисунок 40).

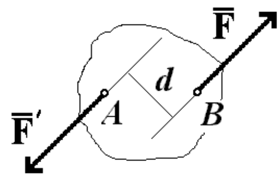


Рисунок 40

Пара сил не имеет равнодействующей.

Плоскость, в которой действует пара сил, называется *плоскостью действия пары*.

Виды моментов пары сил

Различают следующие два вида моментов пары сил:
а) векторный момент;
б) алгебраический момент.

Алгебраический момент пары сил

Алгебраическим моментом пары называется взятое с соответствующим знаком произведение модуля одной из сил пары на плечо пары $m = \pm F \cdot d$

Знак момента пары определяется также как и знак момента силы (« + » − вращение против хода часовой стрелки; «**−** » − по ходу часовой стрелки).

На рисунке 41 $m(\vec{F}, \vec{F}^{/}) > 0$, $m(\vec{P}, \vec{P}^{/}) < 0$.

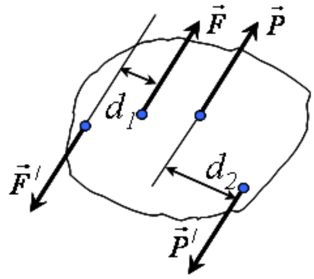


Рисунок 41

Свойства пары сил

а) пару, не изменяя оказываемого ею на твердое тело действия, можно переносить куда угодно в плоскости действия пары;

б) пару, не изменяя оказываемого ею на твердое тело действия, можно переносить из данной плоскости в любую другую плоскость;

в) действие пары сил на твердое тело полностью характеризуется ее моментом, модуль которого равен $m = F \cdot d,$ где d – плечо пары (кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары).

Изображение пары сил в виде дуговой стрелки

Действие пары сил полностью характеризуется ее моментом, поэтому ее изображают в виде дуговой стрелкой, показывающей направление поворота пары (рисунок 42).

При этом момент пары может быть приложен к любой части абсолютно твердого тела.

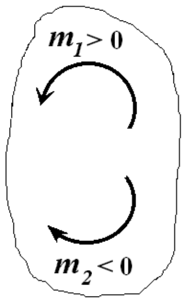


Рисунок 42

Теорема о сложении пар, лежащих в одной плоскости

Система пар, лежащих в одной плоскости и действующих на абсолютно твердое тело, эквивалентна одной паре с моментом, равным алгебраической сумме моментов складываемых пар, то есть

$$M = m_1 + m_2 + ... + m_n = \sum m_к .$$

Условие равновесия системы пар, лежащих в одной плоскости

Система пар, лежащих в одной плоскости и действующих на абсолютно твердое тело, эквивалентна нулю (находится в равновесии), если алгебраическая сумма моментов пар равна нулю (рисунок 43)

$$\sum m_к = 0.$$

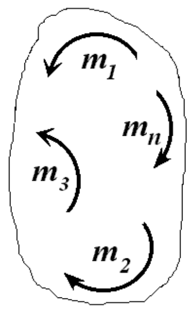


Рисунок 43

2.5.4 Приведение произвольной плоской системы сил к неподвижному центру (1-ая задача статики)

Случаи приведения системы сил.

Различают следующие основные случаи приведения системы сил:

а) приведение произвольной пространственной системы сил;

б) приведение произвольной плоской системы сил.

Понятие главного момента произвольной плоской системы сил

Величина M_O, равная алгебраической сумме моментов всех сил относительно неподвижного центра *O*, называется главным моментом произвольной плоской системы сил относительно данного центра

$$M_O = \sum m_O(\vec{F}_k).$$

Теорема о приведении плоской системы сил

Любая произвольная плоская система сил, действующих на твердое тело, при приведении к произвольно выбранному центру *O* заменяется одной силой $\vec{R}$, равной главному вектору системы сил и приложенной к центру *O*, и одной парой сил с моментом M_O, равным главному моменту системы сил относительно центра *O* (рисунок 44).

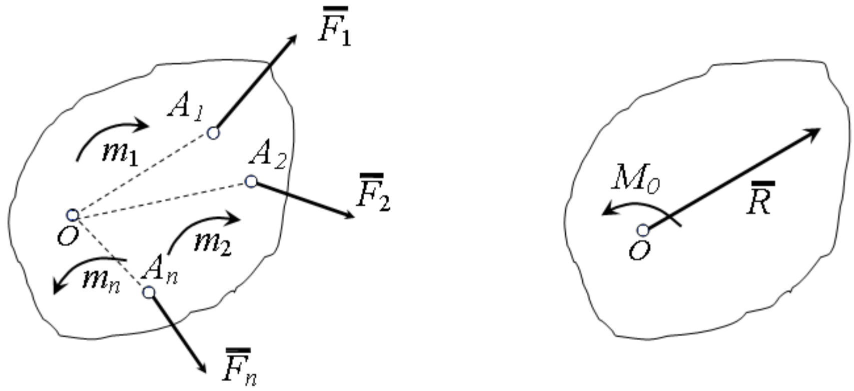


Рисунок 44

Примечание. Понятие главного вектора системы сил введено выше.

2.5.5 Условия равновесия произвольной плоской системы сил

Геометрические условия равновесия

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор этой системы сил и ее главный момент относительно любого центра были равны нулю, то есть, чтобы выполнялись условия

$$\vec{R} = 0, \quad m_O(\vec{R}) = \sum m_O(\vec{F}_k) = 0.$$

Основная форма аналитических условий равновесия произвольной плоской системы сил.

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum m_O(\vec{F}_k) = 0.$$

Первая вспомогательная форма аналитических условий равновесия произвольной плоской системы сил .

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех этих сил относительно каких - нибудь центров *А* и *В* и сумма их проекций на ось *Ох*, не перпендикулярную прямой *АВ*, были равны нулю.

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad \sum m_A(\vec{F}_k) = 0, \qquad \sum m_B(\vec{F}_k) = 0.$$

Вторая вспомогательная форма аналитических условий равновесия произвольной плоской системы сил.

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех этих сил относительно любых трех центров *А, В* и *С,* не лежащих на одной прямой, были равны нулю.

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0, \qquad \sum m_B(\vec{F}_k) = 0, \qquad \sum m_C(\vec{F}_k) = 0.$$

Аналитические условия равновесия плоской системы параллельных сил

Если все силы параллельны какой-нибудь оси (например, оси *Оу* – рисунок 45), то аналитические условия равновесия системы сил имеют вид

$$\sum F_{ky} = 0, \qquad \sum m_O\left(\vec{F}_k\right) = 0$$

или

$$\sum m_A\left(\vec{F}_k\right) = 0, \qquad \sum m_B\left(\vec{F}_k\right) = 0.$$

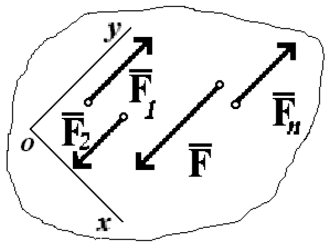


Рисунок 45

2.5.6 Условия равновесия произвольной плоской системы сил, приложенной к двум абсолютно твердым телам

Внешние и внутренние связи

Связи, соединяющие части конструкции называются *внутренними* связями, а связи, присоединяющие ее к другим телам – *внешними* (рисунок 46).

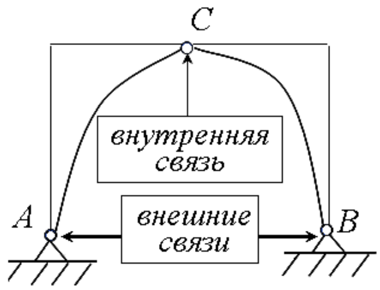


Рисунок 46

Метод замораживания

При определении реакций *внешних связей* составляют одну из форм условий равновесия для «замороженной» конструкции *АВС*.

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum m_O(\vec{F}_k) = 0.$$

Однако этих условий равновесия не достаточно для определения всех реакций внешних связей (4-е реакции невозможно определить из 3-х уравнений). Такие системы называются *статически неопределимые*.

Такую статическую неопределимость раскрывают составлением дополнительного уравнения(ий) равновесия для одной из частей конструкции (АС или ВС), расчленяя ее на части по внутренней связи (рисунок 47). При этом, как правило, необходимо составить уравнение моментов, принимая за моментную точку ту точку, где тела соединяются связью (здесь точку С)

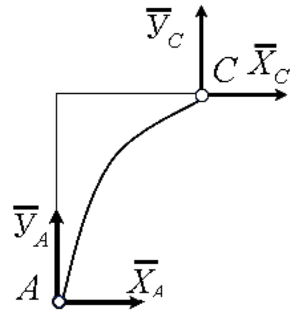


Рисунок 47

$$\sum m_C(\vec{F}_k) = 0.$$

Метод разбиения

При определении реакций внешних связей и внутренних связей конструкцию расчленяют по внутреннему шарниру, и для каждой части (рисунок 48) составляют уравнения равновесия (в одной из трех форм).

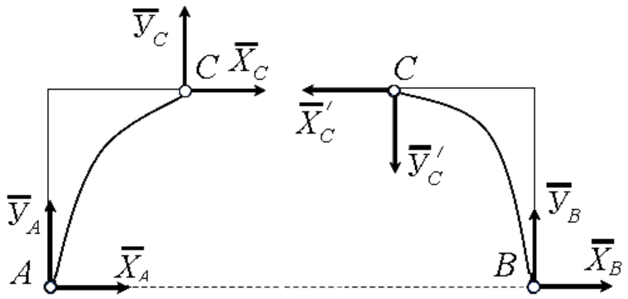


Рисунок 48

Для части АС:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum m_A(\vec{F}_k) = 0.$$

Для части ВС:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum m_A(\vec{F}_k) = 0,\ \sum m_A(\vec{F}_k) = 0.$$

С учетом того, что $\vec{X}_C = -\vec{X}_C'$, $\vec{У}_C = -\vec{У}_C'$, а модули $X_C = X_C'$, $У_C = У_C'$, в систему шести уравнений будет входить 6 неизвестных реакций X_A, $У_A$, X_B, $У_B$, X_C, $У_C$. То есть система является статически определимой.

Для проверки правильности решения могут быть составлены уравнения равновесия для «замороженной» конструкции.

Тема 2.6 Центр тяжести

2.6.1 Определение центра тяжести

Центром тяжести твердого тела называется неизменно связанная с этим телом точка С, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести, действующих на частицы данного тела, при любом положении тела (рисунок 49).

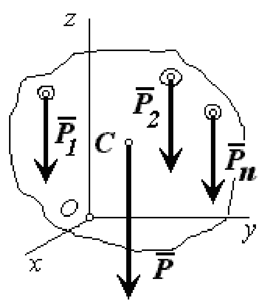


Рисунок 49

Координаты центра тяжести неоднородного тела

Определяются по формулам

$$X_C = \frac{\sum p_k x_k}{P}, \qquad У_C = \frac{\sum p_k y_k}{P}, \qquad Z_C = \frac{\sum p_k z_k}{P} \quad ,$$

где

p_k – модули сил тяжести частиц тела,
P – модуль силы тяжести тела,
x_k, y_k, z_k – координаты частиц тела.

2.6.2 Координаты центров тяжести однородных тел

Понятие однородного тела

Однородным называется тело, когда вес p_k любой его части пропорционален объему V_k этой части: $p_k = \gamma \cdot V_k$, а вес P всего тела пропорционален объему V, т.е. $P = \gamma \cdot V$, где γ – вес единицы объема.

Центр тяжести объема V

Координаты центра тяжести объема V определяются по формулам

$$X_C = \frac{\sum V_k x_k}{V}, \qquad У_C = \frac{\sum V_k y_k}{V}, \qquad Z_C = \frac{\sum V_k z_k}{V} \quad ,$$

где

V_k – объемы частиц тела,
V – объем тела,
x_k, y_k, z_k – координаты объемов частиц тела.

Центр тяжести площади S

Координаты центра тяжести площади S определяются по формулам

$$X_C = \frac{\sum S_k x_k}{S}, \qquad У_C = \frac{\sum S_k y_k}{S} \quad ,$$

где

S_k – площади частиц тела,
S – площадь тела,
x_k, y_k – координаты площадей частиц тела.

Центр тяжести линии L

Координаты центра тяжести линии L определяются по формулам

$$X_C = \frac{\sum l_k x_k}{L}, \qquad У_C = \frac{\sum l_k y_k}{L}, \qquad Z_C = \frac{\sum l_k z_k}{L} \quad ,$$

где

l_k – длины частиц линии,
L – длина линии,
x_k, y_k, z_k – координаты частиц линии.

2.6.3 Способы определения координат центров тяжести однородных тел

Способ симметрии

Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно или в плоскости симметрии, или на оси симметрии, или в центре симметрии.

Из свойств симметрии следует, что центр тяжести однородного кольца, круглой или прямоугольной пластины, прямоугольного параллелепипеда, шара и других однородных тел, имеющих центр симметрии, лежит в геометрическом центре (центре симметрии) этих тел.

Способ разбиения

Суть метода разбиения заключается в том, что если тело можно разбить на конечное число таких частей, для каждой из которых положение центра тяжести известно, то координаты центра тяжести можно вычислить по формулам

$$X_C = \frac{\sum p_k x_k}{P}, \qquad Y_C = \frac{\sum p_k y_k}{P}, \qquad Z_C = \frac{\sum p_k z_k}{P}.$$

При этом число слагаемых в каждой сумме будет равно числу частей, на которые разбито тело.

Способ дополнения (отрицательных площадей)

Этот способ является частным случаем способа разбиения. Он применяется к телам, имеющим вырезы, если центры тяжести тел без выреза и вырезанной части известны. При этом площади (объемы) вырезанных частей принимаются отрицательными.

Способ интегрирования

Способ заключается в том, что суммы в приведенных выше формулах заменяют соответствующими интегралами. Тогда:

а) координаты центра тяжести объема V определяются по формулам:

$$X_C = \frac{\int\limits_{(V)} x\,dV}{V}, \qquad Y_C = \frac{\int\limits_{(V)} y\,dV}{V}, \qquad Z_C = \frac{\int\limits_{(V)} z\,dV}{V},$$

где

dV – бесконечно малый объем частицы тела,

V – объем тела,

x, y, z – координаты бесконечно малых объемов частиц тела.

б) координаты центра тяжести площади S определяются по формулам:

$$X_C = \frac{\int\limits_{(S)} x dS}{V}, \qquad У_C = \frac{\int\limits_{(S)} y dS}{V},$$

где

dS – бесконечно малая площадь частицы тела,

S – площадь тела,

x, y – координаты бесконечно малых площадей частиц тела.

в) координаты центра тяжести линии L определяются по формулам:

$$X_C = \frac{\int\limits_{(L)} x dL}{L}, \qquad У_C = \frac{\int\limits_{(L)} y dL}{L}, \qquad Z_C = \frac{\int\limits_{(L)} z dL}{V},$$

где

dl – бесконечно малая часть линии,

L – длина линии,

x, y, z – координаты бесконечно малых частей линии.

Экспериментальный способ

Различают два основных экспериментальных способа определения положения центра тяжести однородных и неоднородных тел произвольной формы:

а) метод подвешивания

Заключается в том, что тело подвешивают на нити или тросе за различные его точки. Направление нити, на которой подвешено тело, будет каждый раз давать направление силы тяжести. Точка пересечения этих линий даст положение центра тяжести тела (рисунок 50).

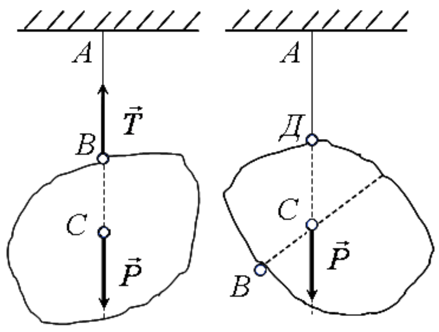


Рисунок 50

б) метод взвешивания

Заключается в том, что одну из реакций опор тяжелого неоднородного тела произвольной конфигурации (паровоз, самолет и т.д.) определяют посредством взвешивания на специальных весах, а другую реакцию находят из уравнений равновесия.

2.6.4 Центры тяжести некоторых однородных тел

Центр тяжести дуги окружности

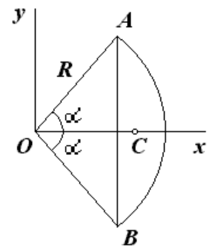


Рисунок 51

Центр тяжести дуги окружности (рисунок 51), радиусом R опирающейся на угол 2α имеет координаты:

$$x_C = (R \cdot \sin\alpha) / \alpha, \quad y_C = 0.$$

Центр тяжести площади треугольника

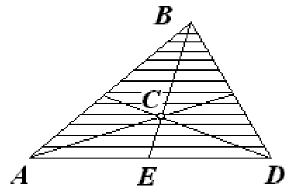
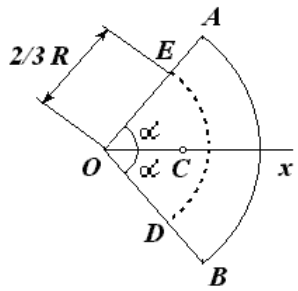


Рисунок 52

Центр тяжести треугольника лежит на пересечении его медиан (рисунок 52).

Центр тяжести кругового сектора

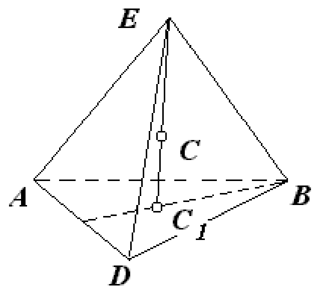


Центр тяжести кругового сектора (рисунок 53) лежит на его оси симметрии на расстоянии от центра O равном

$$x_C = (2 \cdot R \cdot \sin\alpha) / (3 \cdot \alpha).$$

Рисунок 53

Центр тяжести объема пирамиды



Центр тяжести пирамиды C лежит на прямой C_1E, где E – вершина, а C_1 – центр тяжести площади основания пирамиды (рисунок 54), при этом

$$C\,C_1 = C_1E / 4.$$

Рисунок 54

Тема 2.7 Трение

Различают следующие основные виды трения:

а) трение скольжения;

б) трение качения.

2.7.1 Трение скольжения при равновесии

Сила трения скольжения

Силой трения скольжения называется сила сопротивления относительному скольжению при стремлении двигать одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел (рисунок 55).

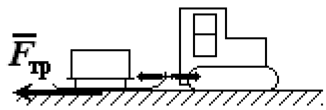


Рисунок 55

Законы трения скольжения

1. При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила трения (или сила сцепления) $F_{тр}$, которая может принимать любые значения от нуля до значения $F_{пр}$, называемого *предельной силой трения*

$$0 \leq F_{тр} \leq F_{пр}.$$

Сила трения, приложенная к телу, направлена в сторону противоположную той, куда действующие на тело силы стремятся его сдвинуть.

2. Предельная сила трения численно равна произведению статического коэффициента трения на нормальное давление или нормальную реакцию (рисунок 56):

$$F_{пр} = f_0 \cdot N.$$

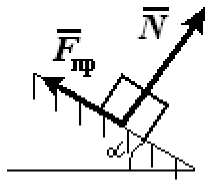


Рисунок 56

Статический коэффициент трения f_0 – величина безразмерная; он определяется опытным путем и зависит от материала соприкасающихся тел и состояния поверхностей.

3. Значение предельной силы трения $F_{пр}$ в довольно широких пределах не зависит от размеров соприкасающихся при трении поверхностей.

При равновесии сила трения $F \leq F_{пр}$. Равновесие, имеющее место, когда сила трения равна $F_{пр}$, называется предельным равновесием.

Типы задач на равновесие тел с учетом трения скольжения

<u>Различают два типа задач:</u>

1. Предельное равновесие, когда сила трения равна $F_{пр} = f_0 \cdot N$.

Задачи этого типа решают обычным путем. К действующим силам добавляется предельная сила трения $F_{пр}$, величина которой выражается через реакцию N. То есть новых неизвестных сил при рассмотрении предельного равновесия не возникает.

2. Равновесие не является предельным $F_{тр} < F_{пр}$.

В этом случае сила трения скольжения $F_{тр}$ является неизвестной величиной, и определяется наряду с другими неизвестными силами из уравнений равновесия.

2.7.2 Трение скольжения при движении

При движении сила трения скольжения направлена в сторону, противоположную движению, и равна произведению *динамического коэффициента трения* на нормальное давление (реакцию)

$$F = f \cdot N.$$

Динамический коэффициент трения скольжения f также как и статический коэффициент трения f_0 является безразмерной величиной и определяется опытным путем.

2.7.3 Реакция шероховатой связи

Наибольший угол φ_0 (рис. *б)*), который полная реакция шероховатой связи образует с нормалью к поверхности (рисунок 57), называется *углом трения*

$$tg\ \varphi_0 = F_{\text{пр}} / N = f_0.$$

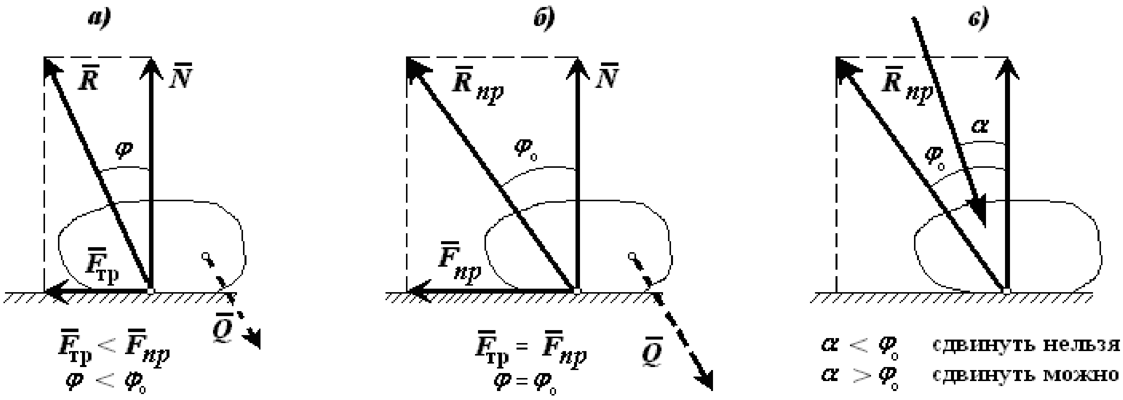


Рисунок 57

Никакой силой, образующей с нормалью угол α (рис.*в)*), меньший угла трения φ_0, тело вдоль данной поверхности сдвинуть нельзя (явление заклинивания).

2.7.4 Трение качения

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого (рисунок 58).

Трение качения возникает из-за деформации соприкасающихся тел, в результате которой катящееся тело фактически опирается на неподвижную поверхность не в точке, а по некоторой площадке *AB*.

Нормальная реакция $\vec{N}$ смещается в сторону качения на некоторое расстояние, предельное значение которого равно f_{k} - коэффициенту трения качения.

Для учета трения качения в задачах на исследование движения тел необходимо к действующим силам добавить момент $M_{\text{k}} = N \cdot f_{\text{k}}$.

Коэффициент f_{k} имеет размерность длины, то есть $[f_{\text{k}}] = м.$

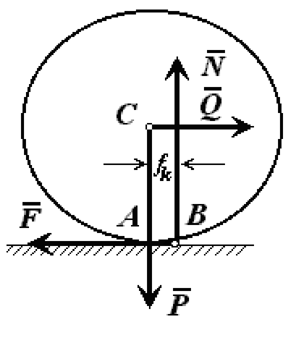


Рисунок 58

Тема 2.8 Произвольная пространственная система сил

2.8.1 Векторный момент силы относительно центра

Векторным моментом силы $\vec{F}$ относительно центра O называется приложенный в центре O вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$, модуль которого равен произведению модуля силы на ее плечо h и который направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр O и силу, в ту сторону, откуда сила видна стремящейся повернуть тело вокруг центра O против хода часовой (рисунок 59)

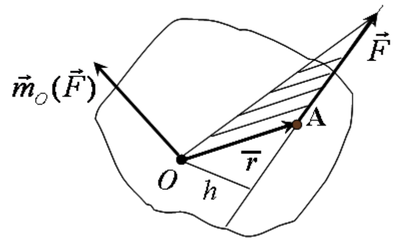


Рисунок 59

$$|\vec{m}_O(\vec{F})| = |\vec{F}|\ h.$$

2.8.2 Момент силы относительно оси

Проекция вектора $\vec{M}_O(\vec{F})$, т.е. момента силы $\vec{F}$ относительно центра O, на какую-нибудь ось z, проходящую через этот центр, называется моментом силы $\vec{F}$ относительно оси z (рисунок 60), т. е.

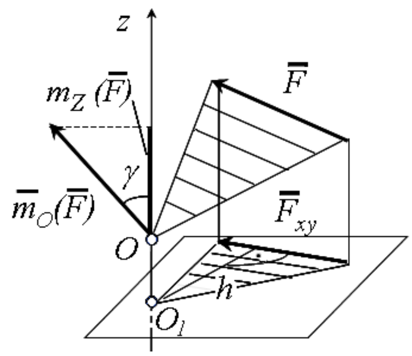


Рисунок 60

$$m_Z(\vec{F}) = \pm|\vec{F}_{xy}|\cdot h.$$

Момент силы $\vec{F}$ относительно оси z равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярно оси z, взятому относительно точки O_1 пересечения оси с этой плоскостью, т.е.

$$m_Z(\vec{F}) = \pm|\vec{F}_{xy}|\cdot h.$$

Знак момента силы относительно оси z определяется также как и знак алгебраического момента силы.

Практическое правило определения момента силы относительно оси

1. Проведем плоскость, перпендикулярную к оси.
2. Спроектируем силу на проведенную плоскость.
3. Найдем алгебраический момент проекции относительно точки пересечения оси с плоскостью.

Случаи равенства нулю момента силы относительно оси

Момент силы относительно оси равен 0, если сила лежит в одной плоскости с осью (рисунок 61).

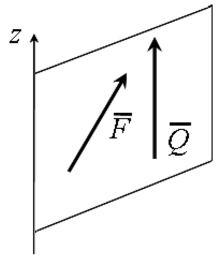


Рисунок 61

2.8.3 Векторный момент пары сил

Определение векторного момента пары сил

Векторным моментом пары сил называется вектор $\vec{m}$, модуль которого равен произведению модуля одной из сил пары на ее плечо $m = F \cdot d$, и который направлен перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки (рисунок 62).

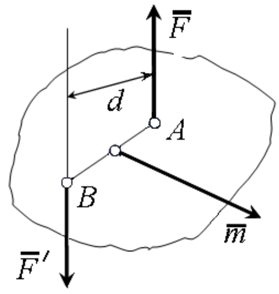


Рисунок 62

Свойства векторного момента пары сил

1. Действие пары сил на твердое тело полностью характеризуется ее векторным моментом.
2. Две пары сил, имеющие одинаковые векторные моменты эквивалентны.
3. Векторный момент можно приложить в любой точке, то есть это вектор свободный.

Теоремы о сложении пар сил, не лежащих в одной плоскости

Теорема 1. Действие на твердое тело двух пар с моментами $\vec{m}_1$ и $\vec{m}_2$ можно заменить одной парой сил с моментом $\vec{m}$ равным геометрической сумме моментов складываемых пар $\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2$ (рисунок 63).

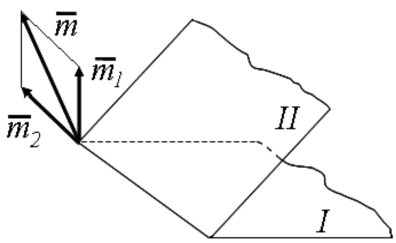


Рисунок 63

Теорема 2. Система пар, действующих на тело, эквивалентна одной паре с моментом, равным геометрической сумме моментов складываемых пар, то есть:

$$\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + ... + \vec{m}_n = \sum \vec{m}_k,$$

где $\vec{m}_1, \vec{m}_2, ..., \vec{m}_n$ – моменты складываемых пар, а $\vec{m}$ – момент равнодействующей пары.

2.8.4 Условие равновесия пространственной системы пар сил

Геометрическое условие равновесия системы пар

При равновесии системы пар момент равнодействующей пары будет равен нулю, то есть

$$\vec{M} = \sum \vec{m}_k = 0.$$

Это геометрическое условие равновесия пространственной системы пар.

Аналитические условия равновесия системы пар

В проекциях на оси координат векторное равенство $\vec{M} = \sum \vec{m}_k = 0$ имеет вид

$$M_x = \sum m_{kx} = 0, \qquad M_y = \sum m_{ky} = 0, \qquad M_z = \sum m_{kz} = 0,$$

где

M_x, M_y, M_z – проекции векторного момента равнодействующей пары сил на оси координат;

m_{kx}, m_{ky}, m_{kz} – проекции векторных моментов составляющих пар на оси координат.

Это аналитические условия пространственной системы пар.

2.8.5 Теорема о приведении произвольной пространственной системы сил относительно произвольного центра (теорема Пуансо)

Векторная величина $\vec{M}_0$ равная геометрической сумме моментов всех сил относительно центра *O*, называется главным моментом системы сил, то есть $\vec{M}_0 = \sum \vec{m}_k$.

Теорема. Любая система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно выбранному центру *O* заменяется одной силой $\vec{R}$ приложенной в центре приведения *O*, равной главному вектору, и одной парой с моментом $\vec{M}_0$ равным главному моменту системы сил относительно центра *O* (рисунок 64).

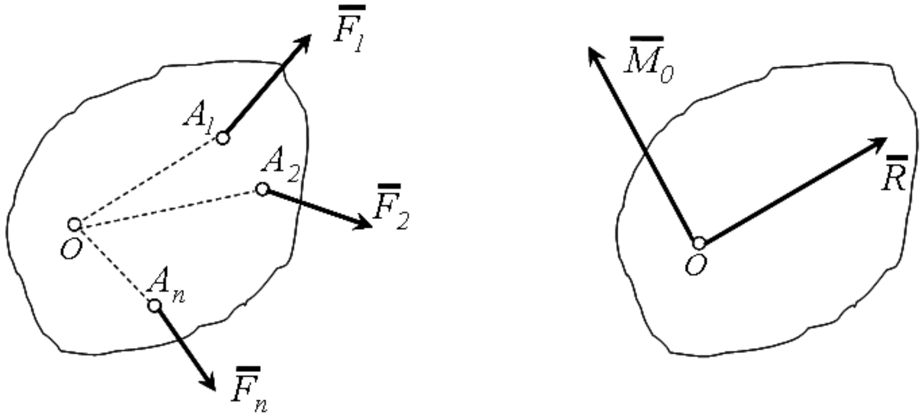


Рисунок 64

Следствие. Две системы сил, имеющие одинаковые главные векторы и главные моменты относительно одного и того же центра, эквивалентны.

Частные случаи приведения системы сил к центру

1. Если для данной системы сил $\vec{R} = 0$, $\vec{M}_0 \neq 0$, то она приводится к одной паре сил с моментом $\vec{M}_0$.

2. Если для данной системы сил $\vec{R} \neq 0$, $\vec{M}_0 = 0$, то она приводится к одной силе, то есть к равнодействующей, равной $\vec{R}$ и приложенной в центре *O*.

2.8.6 Условия равновесия произвольной пространственной системы сил

Геометрические условия равновесия произвольной пространственной системы сил

Для равновесия любой системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор этой системы сил и ее главный момент относительно любого центра были равны нулю, т.е. чтобы выполнялись условия

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{M}_0 = 0.$$

Вычисление модулей главного вектора и главного момента

Пусть силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ заданы аналитически, т.е. известны проекции сил на оси координат: $F_{1x}, F_{2x}, ..., F_{nx}$; $F_{1y}, F_{2y}, ..., F_{ny}$; $F_{1z}, F_{2z}, ..., F_{nz}$.

Тогда проекции главного вектора на оси координат

$$R_x = \sum F_{kx}, \quad R_y = \sum F_{ky}, \quad R_z = \sum F_{kz}.$$

Проекции главного момента – по формулам

$$M_{Ox} = \sum m_{Ox}(\vec{F}_k), \quad M_{Oy} = \sum m_{Oy}(\vec{F}_k), \quad M_{Oz} = \sum m_{Oz}(\vec{F}_k).$$

Модули главного вектора и главного момента

$$\left|\overline{\boldsymbol{R}}\right| = \sqrt{\boldsymbol{R}_x^2 + \boldsymbol{R}_y^2 + \boldsymbol{R}_z^2}; \qquad \left|\overline{M_0}\right| = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2}.$$

Аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил

В случае равновесия произвольной пространственной системы сил главный вектор и главный момент равны нули, то есть

$$\left|\overline{\boldsymbol{R}}\right| = \sqrt{\boldsymbol{R}_x^2 + \boldsymbol{R}_y^2 + \boldsymbol{R}_z^2} = 0; \qquad \left|\overline{M_0}\right| = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2} = 0.$$

Следовательно,

$$R_x = \sum F_{kx} = 0, \quad R_y = \sum F_{ky} = 0, \quad R_z = \sum F_{kz} = 0.$$

$$M_{Ox} = \sum m_{Ox}(\vec{F}_k) = 0, \quad M_{Oy} = \sum m_{Oy}(\vec{F}_k) = 0, \quad M_{Oz} = \sum m_{Oz}(\vec{F}_k) = 0.$$

<u>Вывод.</u> Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и суммы их моментов относительно этих осей были равны нулю.

Это аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил.

2.8.7 Теорема Вариньона о моменте равнодействующей (пространственная система сил).

Если данная система сил имеет равнодействующую (рисунок 65), то момент равнодействующей относительно любого центра O равен сумме моментов сил системы относительно того же центра, т.е.

$$\vec{m}_0(\vec{R}) = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k).$$

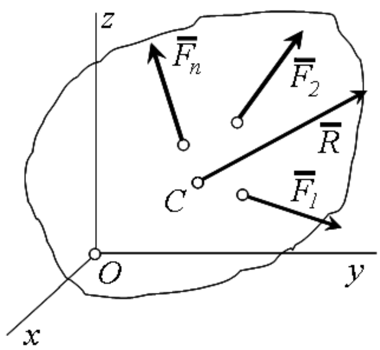


Рисунок 65

2.8.8 Равновесие пространственной системы параллельных сил

Если все действующие силы параллельны друг другу, то можно выбрать оси координат так, что ось Oz будет параллельна силам (рисунок 66).

Тогда из шести уравнений равновесия останутся только три

$$\sum F_{kz} = 0,$$
$$\sum m_{Ox}(\vec{F}_k) = 0,$$
$$\sum m_{Oy}(\vec{F}_k) = 0.$$

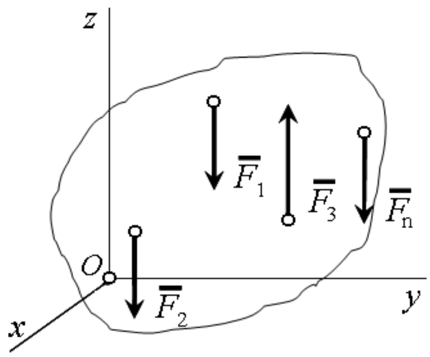


Рисунок 66

Это условия равновесия пространственной системы параллельных сил.

3 РАСЧЕТНО – ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ПО СТАТИКЕ

3.1 Задача С1а

Исследование условий равновесия плоской сходящейся системы сил

Точка (диск) A (таблица 6) находится в равновесии под действием: силы $\vec{P}$ (нити к которой подвешен груз весом Р); переброшенной через блок $Д$ нити, к другому концу которой прикреплен груз весом P (приложена сила $\vec{F}$ или другой конец которой закреплен); одной или двух связей (невесомые стержни AB и AC или свободное опирание о гладкую поверхность (ти) в точке B (B и C) или о выступ в точке C). Положение стержней, нити и наклонных плоскостей определяется углами α, β и γ, значения которых даны в таблице 5. Конструкция расположена в вертикальной плоскости.

Определить усилия в стержнях AB и AC (реакции других связей, указанных в тексте на рисунке) пренебрегая трением в блоке $Д$. Вес груза P = 10 кН.

Для справки: $\cos 15^0 \approx 0{,}966$, $\sin 15^0 \approx 0{,}259$.

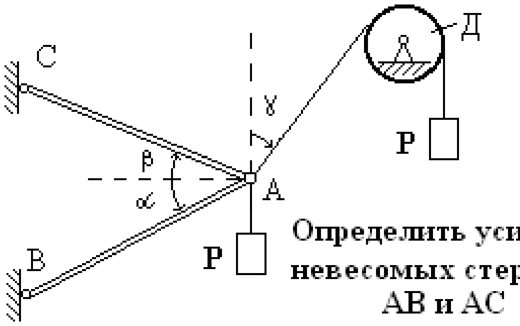
Таблица 5 – Условия к вариантам задач С1а

№ условия	α^{o}	β^{o}	γ^{o}
0	30	45	45
1	45	30	30
2	30	45	30
3	45	30	15
4	30	45	15
5	45	60	30
6	30	60	30
7	45	45	15
8	30	60	45
9	30	60	15

Таблица 6 – Рисунки к вариантам задач С1а

Рисунки к задаче С1а

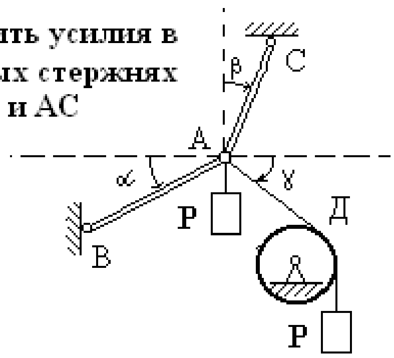
1



Определить усилия в невесомых стержнях АВ и АС

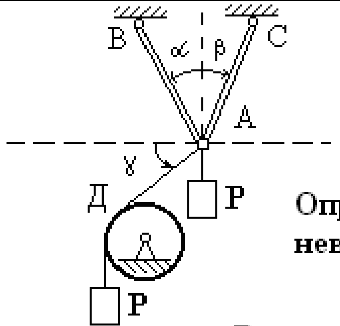
Рисунок С1а.0

2



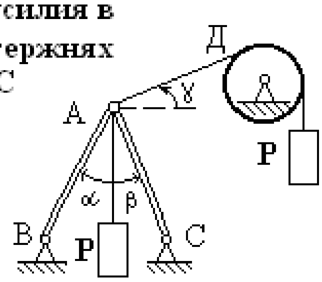
Определить усилия в невесомых стержнях АВ и АС

Рисунок С1а.1



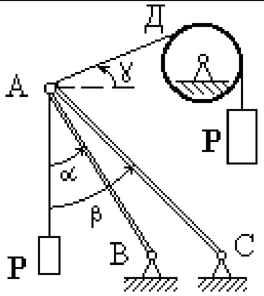
Определить усилия в невесомых стержнях АВ и АС

Рисунок С1а.2



Определить усилия в невесомых стержнях АВ и АС

Рисунок С1а. 3



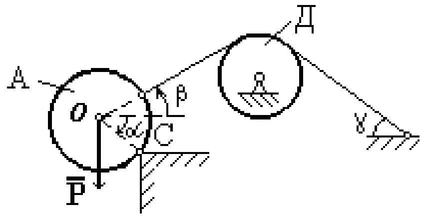
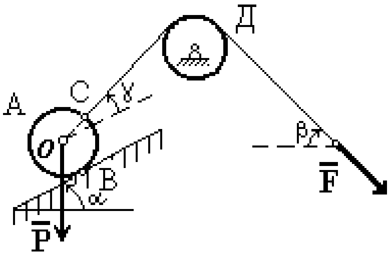
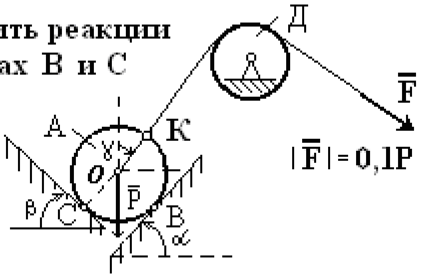
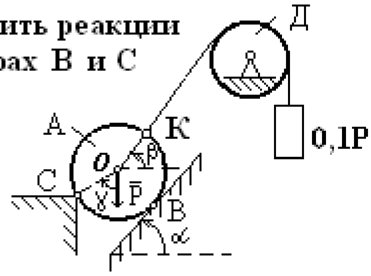
Определить усилия в невесомых стержнях АВ и АС

Рисунок С1а. 4

Определить реакцию в опоре В и силу натяжения нити

Рисунок С1а.5

Продолжение таблицы 6

1	2
Определить реакцию в опоре С и силу натяжения нити  **Рисунок С1а.6**	**Определить реакцию в опоре С и величину силы F при равновесии системы**  **Рисунок С1а.7**
Определить реакции в опорах В и С  **Рисунок С1а.8**	**Определить реакции в опорах В и С**  **Рисунок С1а.9**

3.2 Пример решения задачи С1а

Диск A находится в равновесии (рисунок 67) под действием: силы $\vec{P}$; нити, прикрепленной одним концом к центру диска $\boldsymbol{O}$ и переброшенной через идеальный блок $Д$, к другому концу которой прикреплен груз весом $0{,}5P$; двух связей (невесомый стержень OC и свободное опирание о гладкую поверхность в точке B).

Конструкция расположена в вертикальной плоскости. Углы $\alpha = 45^0$, $\beta = 30^0$ и $\gamma = 30^0$. Вес груза $P = 10$ кН.

Определить усилия в стержне OC и реакцию гладкой наклонной плоскости на диск в точке B.

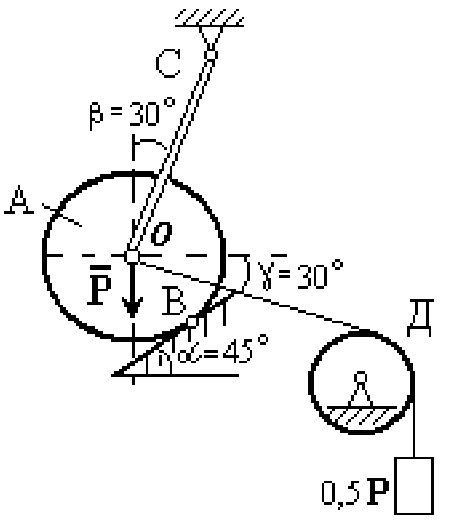


Рисунок 67

При решении задач, когда заведомо известно, что конструкция находится в равновесии, целесообразно придерживаться следующей последовательности действий.

1. Изображение конструкции в положении, соответствующем конкретным значениям данных о ее геометрических характеристиках (если в этом есть необходимость).

В данном случае конкретные значения данных о геометрических характеристиках – это конкретные значения углов α, β и γ. Конструкция при заданных значениях углов α, β и γ изображена на рисунке 67.

2. Выбор тела (тел), равновесие которого должно быть рассмотрено (объект равновесия).

Необходимость выбора *объекта равновесия* диктуется тем, что уравнения равновесия, из которых будут определяться неизвестные силы (реакции связей), могут быть составлены только для *свободного* твердого тела.

При выборе объекта равновесия руководствуются следующим. *К объекту равновесия должны быть приложены заданные силы и неизвестные силы (реакции связей), которые требуется определить.*

В данном случае в качестве объекта равновесия следует выбрать диск *A* (рисунок 68). К диску присоединены нить и стержень *OC*, усилие в котором требуется определить, а также он в точке *B* опирается на гладкую наклонную плоскость, реакция которой должна быть найдена.

3. Изображение сил, действующих на выбранный объект равновесия.

В точке *O* на диск действует сосредоточенная сила $\vec{P}$ и три связи: нить, невесомый стержень *OC* и гладкая поверхность (рисунок 68).

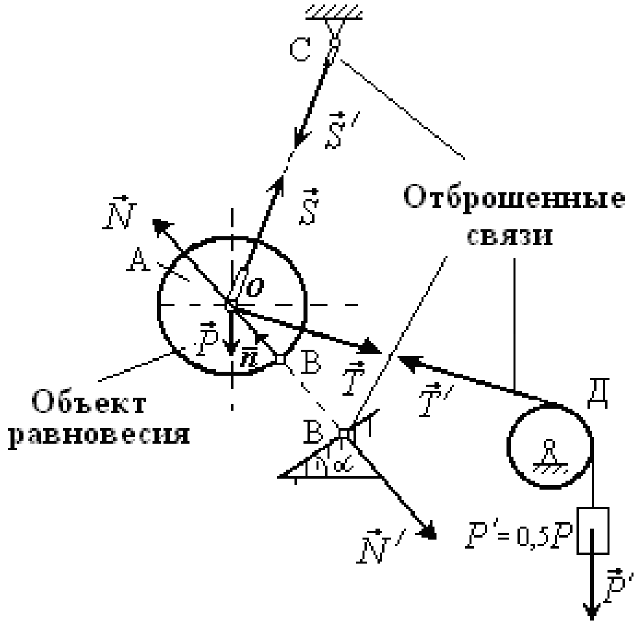


Рисунок 68

Применим принцип освобождаемости от связей (аксиому связей) и мысленно «перережем» нить (рисунок 68). Ее действие на объект равновесия следует заменить силой натяжения нити $\vec{T}$, которая, как известно, направлена всегда вдоль нити. Более того, реакция $\vec{T}$ будет направлена от объекта равновесия (к точке подвеса). К другому концу перерезанной нити будет приложена сила $\vec{T}^{/}$, которая на основании аксиомы действия и противодействия по модулю равна силе $\vec{T}$ и направлена в противоположную сторону от нее, то есть $\vec{T} = -\vec{T}^{/}$. Очевидно, что сила $\vec{T}^{/}$ по величине равна весу груза $P^{/}$, так как в блоке Д по условиям задачи трение не учитывается. Таким образом, величина силы $\vec{T}$ (модуль) равна 0,5Р, то есть $|\vec{T}| = 0{,}5P$. Следовательно, силу $\vec{T}$ следует считать заданной.

Освободим объект равновесия от других связей, то есть от невесомого стержня *ОС* и гладкой поверхности (в точке *В*).

Мысленно «перережем» стержень *ОС* (рисунок 68). Его действие на объект равновесия (на основании аксиомы связей) заменим усилием $\vec{S}$. Усилие в невесомом стержне всегда направлено вдоль стержня. При этом необходимо учитывать, что усилие в стержне считается положительным в случае, если он растянут. Кроме того, всегда (не только в данном случае) следует выполнять правило о том, что *неизвестные величины всегда изображаются положительными*. Для соблюдения всех этих правил усилие $\vec{S}$, заменяющее действие невесомого стержня *ОС*, следует направить *от объекта равновесия.* Только в этом случае «кусочек» стержня *ОС*, оставшийся около объекта равновесия, после «перерезания» стержня *ОС*, будет растянут.

Освободимся от гладкой поверхности, на которую объект равновесия *А* свободно опирается. Реакция $\vec{N}$ в этом случае будет направлена по общей нормали в точке соприкосновения тел *В* (рисунок 68). По общему правилу определения направления реакций связей реакция $\vec{N}$, будет направлена в сторону противоположную той, куда связь мешает телу переместиться, то есть вверх.

После освобождения от связей объект равновесия (диск *А*) будет свободным твердым телом (рисунок 69), к которому приложена плоская сходящаяся система сил ($\vec{P}$, $\vec{T}$, $\vec{S}$, $\vec{N}$), то есть в центре диска *А* сходятся линии действия двух известных сил $\vec{P}$ и $\vec{T}$ и двух неизвестных сил $\vec{S}$ и $\vec{N}$.

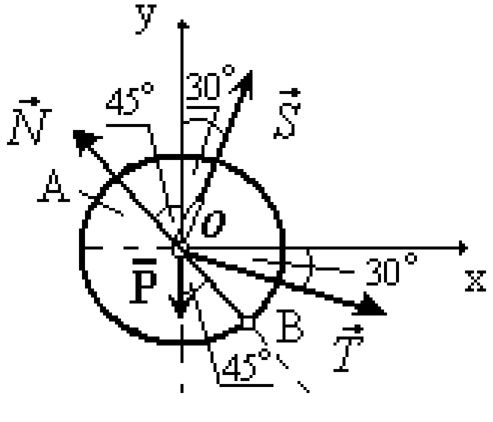


Рисунок 69

4. Составление уравнений равновесия.

При равновесии плоской сходящейся системы сил, действующей на свободное твердое тело, имеют место два аналитических уравнения равновесия.

$$\Sigma \mathrm{F}_{\mathrm{KX}} = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\Sigma \mathrm{F}_{\mathrm{Ky}} = 0 \qquad \text{(b)}$$

Количество уравнений равновесия совпадает с количеством неизвестных сил. Такая система сил называется статически определимой, и все неизвестные силы могут быть найдены из уравнений равновесия статики.

Для составления уравнений равновесия (1) и (2) выполним следующие действия.

Выберем оси координат (рисунок 69).

На первоначальном этапе, когда еще отсутствует достаточный опыт составления уравнений равновесия, полезно составлять таблицы проекций (таблица № 7), что понижает вероятность ошибок.

Таблица 7 – Проекции сил на оси координат

Проекции сил $\vec{F}_k$	Проекции сил, приложенных к объекту равновесия			
	$\vec{T}$	$\vec{S}$	$\vec{N}$	$\vec{P}$
F_{kx}	$T\cos30^0$	$S\ \sin30^0$	$-N\cos45^0$	0
F_{ky}	$-T\sin30^0$	$S\cos30^0$	$N\cos45^0$	$-P$

В соответствии с данными таблицы 7 уравнения (1) и (2) будут иметь вид:

$$\Sigma F_{kX} = T\cos30^0 + S\ \sin30^0 - N\cos45^0 = 0, \qquad (a^{/})$$

$$\Sigma F_{k\mathrm{y}} = -T\sin30^0 + S\cos30^0 + N\cos45^0 - P = 0. \qquad (b^{/})$$

5. Определение искомых величин и анализ полученных результатов.

Для решения полученной системы уравнений сложим уравнение (a $^{/}$) и уравнение (b $^{/}$). В результате получим:

$$T(\cos 30^0 - \sin 30^0) + S(\cos 30^0 + \sin 30^0) - P = 0$$

Откуда, учитывая, что $T = 0{,}5P$, найдем

$$S = P[1 - 0{,}5(\cos 30^0 - \sin 30^0)] / (\cos 30^0 + \sin 30^0) \approx 5{,}98 \text{ кН}.$$

Подставляя значение S в уравнение (a $^{/}$), определим

$$N = (0{,}5P\cos30^0 + S\ \sin30^0) / \cos45^0 \approx 10{,}38 \text{ кН}.$$

Рациональный выбор осей координат.

Как отмечалось выше, возможен и иной, более рациональный, выбор осей координат, что позволяет составить более простые уравнения равновесия. В данной задаче такая возможность есть.

Рассмотрим другие оси координат: $Ox^{/}$ и $Oy^{/}$ (рисунок 70).

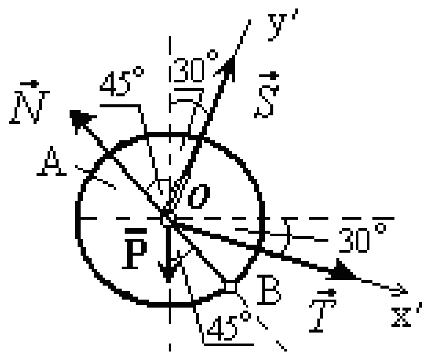


Рисунок 70

Составим таблицу проекций.

Таблица 8 – Проекции сил на оси координат $Ox^{/}$ и $Oy^{/}$

Проекции сил $\vec{F}_k$	Проекции сил, приложенные к объекту равновесия			
	$\vec{T}$	$\vec{S}$	$\vec{N}$	$\vec{P}$
$F_{kx^{/}}$	T	0	$-N\cos15^0$	$P\cos60^0$
$F_{ky^{/}}$	0	S	$N\cos75^0$	$-P\cos30^0$

В соответствии с данными таблицы 8, получим

$$\Sigma F_{kx^{/}} = T - N\cos15^0 + P\cos60^0 = 0 \qquad (a^{//})$$

$$\Sigma F_{ky^{/}} = S + N\cos75^0 - P\cos30^0 = 0 \qquad (b^{//})$$

Из уравнения ($a^{//}$) определим

$$N = P\,(0{,}5 + \cos60^{O}) / \cos15^{O} \approx 10{,}35 \text{ кН}.$$

Из уравнения ($b^{//}$) найдем

$$S = P\cos30^0 - N\cos75^0 \approx 5{,}98 \text{ кН}.$$

Найденные значения усилий N и S в пределах допустимой погрешности (0,1%) совпадают с теми, которые были определены из уравнений ($a^{/}$) и ($b^{/}$). Но уравнения ($a^{/}$) и ($b^{/}$) значительно проще уравнений ($a^{//}$) и ($b^{//}$). Это достигнуто за счет рационального выбора системы координат. Вместе с тем, не следует этим увлекаться, так как это может осложнить нахождение необходимых углов.

3.3 Задача С1б
Определение усилий в невесомых стержнях при равновесии пространственной сходящейся системы сил

Три невесомых стержня (таблица 10), соединены своими концами шарнирно в узле А и закреплены другими концами сферическими шарнирами В, С, Д. Стержни направлены по сторонам и диагоналям прямоугольного параллелепипеда. Узел Д и шарниры А, В, С расположен в вершинах параллелепипеда.

К узлу А приложена сила Р = 20 кН, составляющая с положительными направлениями осей координат углы α, β и γ, значения которых для различных вариантов даны в таблице 9. Углы, которые образуют диагонали параллелепипеда с осями координат, показаны на рисунках.

Определить усилия в стержнях АВ, АС, АД.

При расчетах принять Sin $(63^0 28^/) \approx 0{,}89$, Cos $(63^0 28^/) \approx 0{,}45$.

Таблица 9 – Условия к задачам С1б

№ условия	α^o	β^o	γ^o
0	60	30	0
1	45	60	60
2	0	30	60
3	30	60	0
4	60	45	60
5	0	60	30
6	60	0	30
7	60	60	45
8	0	45	45
9	30	0	60

Таблица 10 – Рисунки к вариантам задачи С1б

Рисунки к задаче С1б

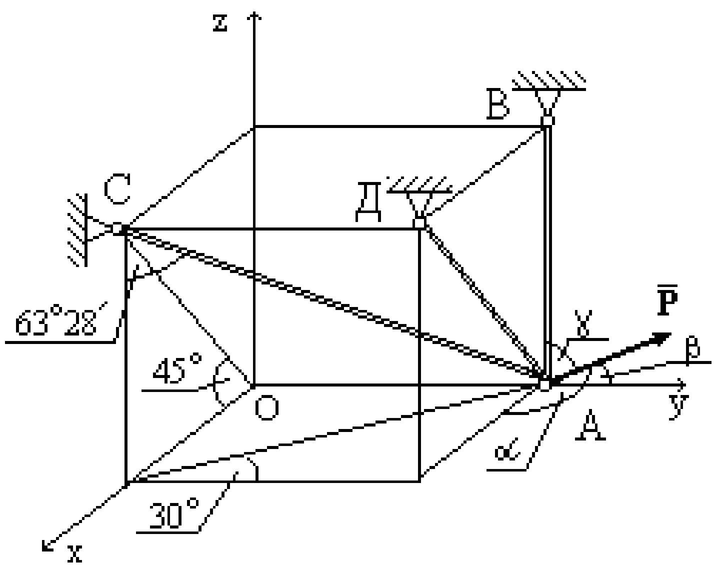


Рисунок С1б.0

Продолжение таблицы 10

Рисунки к задаче С1б

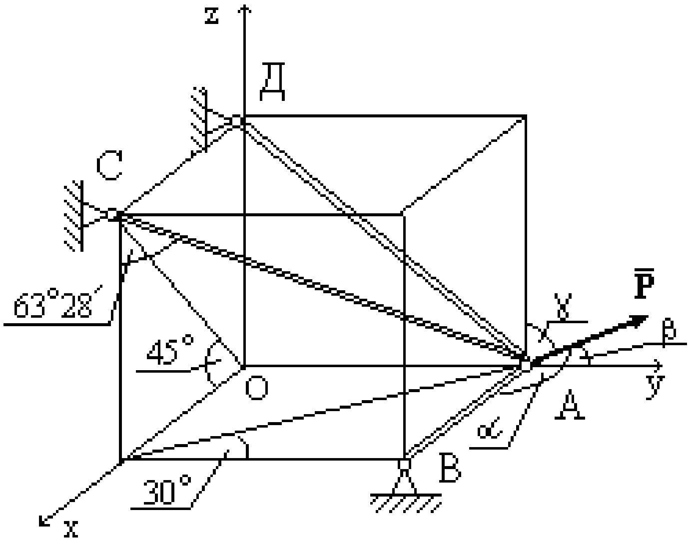


Рисунок С2б.1

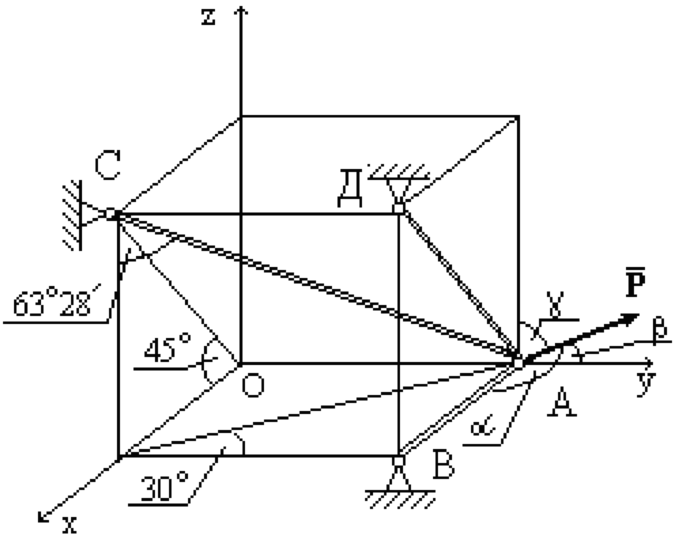


Рисунок С1б.2

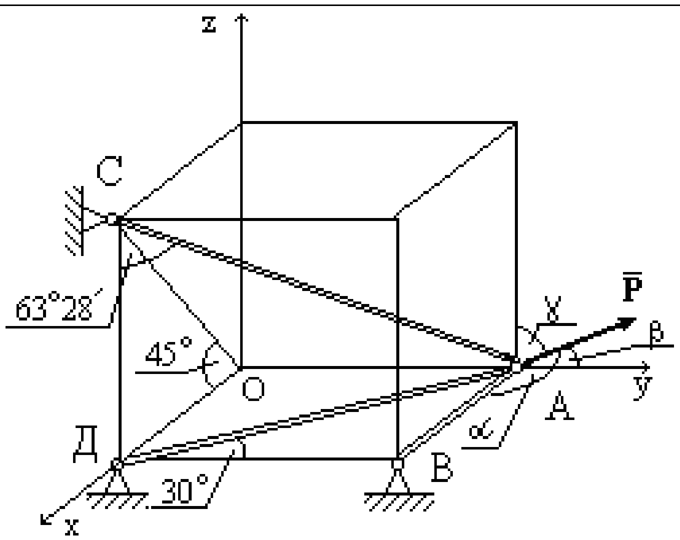
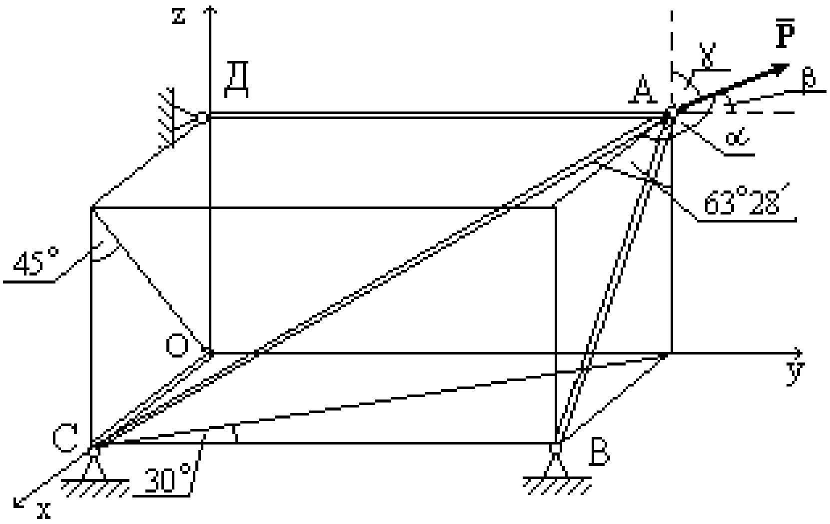
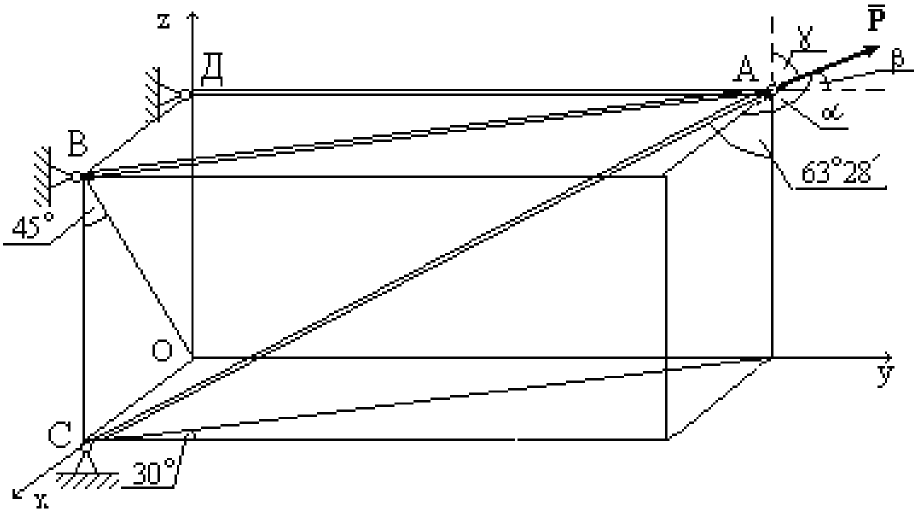
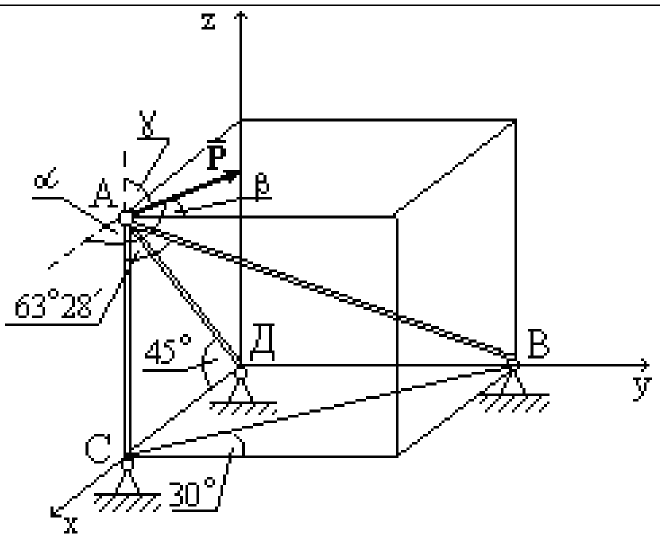


Рисунок С1б.3

Продолжение таблицы 10

Рисунки к задаче С1б
 Рисунок С1б.4
 Рисунок С1б.5
 Рисунок С1б.6

Продолжение таблицы 10

Рисунки к задаче С1б

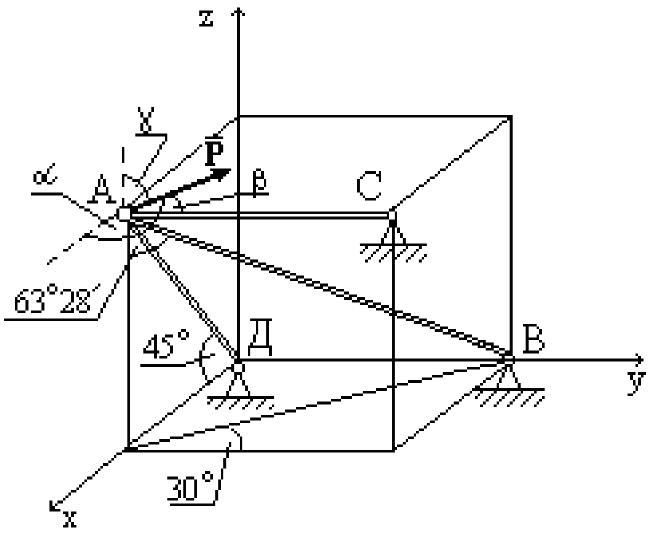


Рисунок С1б.7

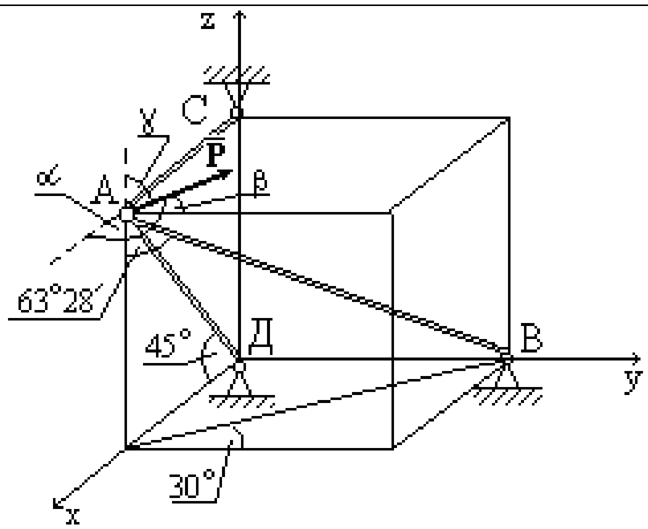


Рисунок С1б.8

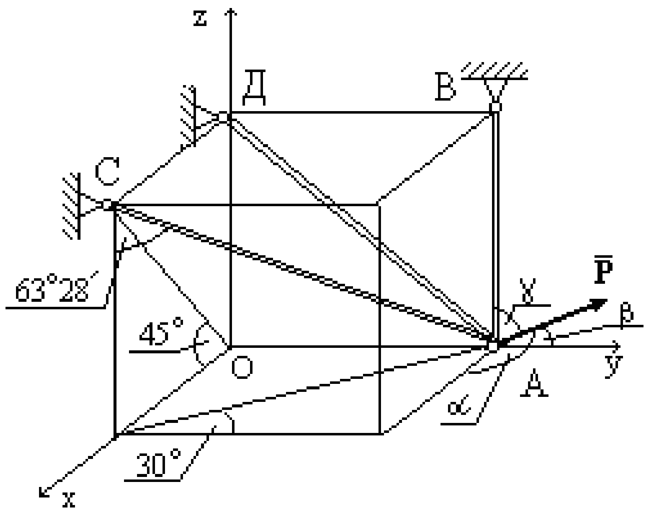


Рисунок С2б.9

3.4 Пример решения задачи С1б

Три невесомых стержня (рисунок 71), соединены своими концами шарнирно в узле А и закреплены другими концами сферическими шарнирами В, С, Д. Стержни направлены по сторонам и диагоналям прямоугольного параллелепипеда. Узел Д и шарниры А, В, С расположен в вершинах параллелепипеда.

К узлу А приложена сила Р = 20 кН, составляющая с положительными направлениями осей координат углы $\alpha = 30^0$, $\beta = 69^0 18^/$ и $\gamma = 69^0 18^/$. Углы, которые образуют диагонали параллелепипеда с осями координат, показаны на рисунках.

Определить усилия в стержнях АВ, АС, АД.

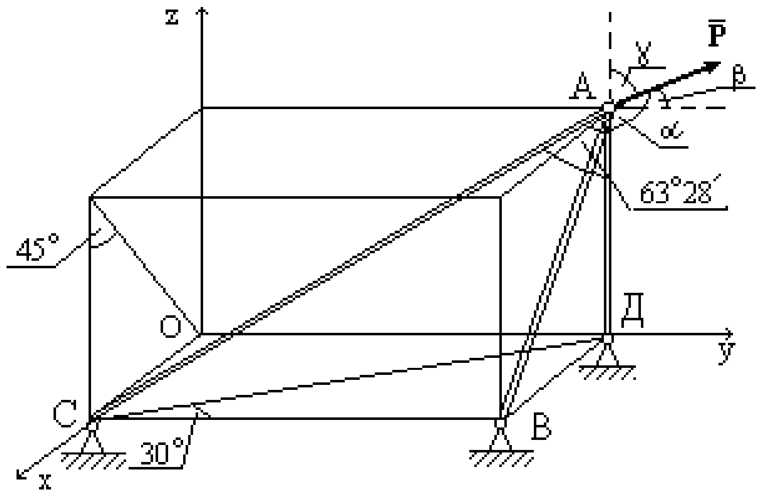


Рисунок 71

Решение задач на равновесие пространственной сходящейся системы сил осуществляется в той же последовательности, что и для плоской сходящейся системы сил.

<u>1. Изображение конструкции в положении, соответствующем конкретным значениям данных о ее геометрических характеристиках</u> (если в этом есть необходимость).

При выполнении данного пункта необходимо изобразить конструкцию соответствующую номеру варианта. Фактическое направление силы $\vec{P}$**,** определяемое углами α, β и γ, соответствующими данным к задаче (таблица 9). При этом, если один из углов (рисунок 72) равен 90^0 (например, $\alpha = 90^0$, $\beta = 30^0$, $\gamma = 60^0$) силу необходимо изобразить в соответствующей плоскости.

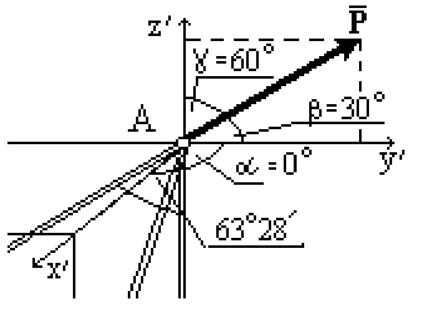


Рисунок 72

2. Выбор объекта равновесия.

Руководствуясь теми же соображениями, что и в примере решения задачи С1а, в качестве объекта равновесия выберем шарнир А. К нему приложена заданная сила $\vec{P}$ и наложены три связи (невесомые стержни АВ, АС, АД).

3. Изображение сил, действующих на выбранный объект равновесия.

Заданная сила $\vec{P}$ уже изображена. Для изображения неизвестных усилий в стержнях применим принцип освобождаемости от связей. Для этого мысленно вырежем узел А (рисунок 73).

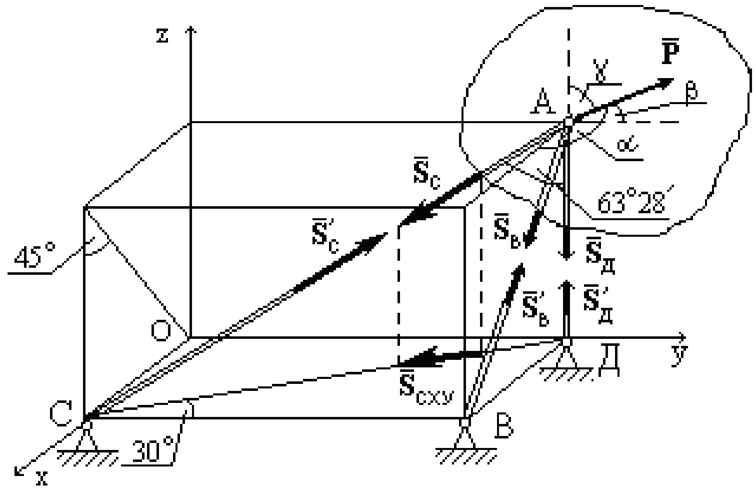


Рисунок 73

На основании аксиомы связей действие невесомых стержней АВ, АС, АД заменим усилиями $\vec{S}_B, \vec{S}_C$ и $\vec{S}_Д$, которые будут направлены вдоль этих стержней от узла А.

Таким образом, к свободному узлу А приложена сходящаяся пространственная система сил, находящаяся в равновесии, в которой три силы неизвестны. Для сходящейся пространственной системы сил, находящейся в равновесии, могут быть составлены три аналитические условия равновесия. То есть система сил, приложенная к узлу А, является статически определимой.

4. Составление уравнений равновесия.

При равновесии пространственной сходящейся системы сил, действующей на свободное твердое тело, имеют место три аналитических уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{KX} = 0 \qquad (a)$$
$$\Sigma F_{Ky} = 0 \qquad (b)$$
$$\Sigma F_{KZ} = 0 \qquad (c)$$

Составим таблицу проекций сил (таблица 11). При этом необходимо обратить внимание, что известны углы, которые силы $\vec{P}$, $\vec{S}_B$ и $\vec{S}_Д$ составляют с осями координат, также известен угол ($68^{O}\ 28^{/}$), который составляет сила $\vec{S}_C$ с осью Oz. То есть соответствующие проекции сил могут быть найдены их прямым проектированием на оси координат. Вместе с тем, углы, которые составляет сила $\vec{S}_C$ с осями Ох и Оу, неизвестны. Поэтому для нахождения проекций силы на оси координат необходимо применить метод двойного проектирования. То есть, сначала силу $\vec{S}_C$ необходимо спроектировать на плоскость Оху, а далее полученный вектор $\vec{S}_{CXY}$ проектировать на оси Ох и Оу. С учетом изложенного выше, получим:

Таблица 11 – Проекции сил к примеру решения задачи С1б

Проекции сил $\vec{F}_k$	Проекции сил, приложенные к объекту равновесия			
	$\vec{P}$	$\vec{S}_B$	$\vec{S}_C$	$\vec{S}_Д$
F_{kX}	$P \cdot \cos\alpha$	$S_B \cdot \cos 45^O$	$S_C \cdot \sin(63^O28^/) \cdot \sin30^O$	0
$F_{kУ}$	$P \cdot \cos\beta$	0	$-S_C \cdot \sin(63^O28^/) \cdot \cos30^O$	0
F_{kZ}	$P \cdot \cos\gamma$	$-S_B \cdot \cos 45^O$	$-S_C \cdot \cos(63^O28^/)$	$-S_Д$

В соответствии с данными таблицы 11 уравнения равновесия системы сил, приложенной к узлу А, запишутся в виде:

$$\sum F_{kX} = -P \cdot \cos 30^0 + S_B \cdot \cos 45^0 + S_C \cdot \sin(63^0 28^/) \cdot \sin 30^0 = 0, \qquad (a^/)$$

$$\sum F_{kУ} = P \cdot \cos(69^0 18^/) - S_C \cdot \sin(63^0 28^/) \cdot \cos 30^0 = 0, \qquad (b^/)$$

$$\sum F_{kZ} = -P \cdot \cos(69^0 18^/) - S_B \cdot \cos 45^0 - S_C \cdot \cos(63^0 28^/) - S_Д = 0. \qquad (c^/)$$

5. Нахождение искомых величин и исследование результатов.

Из уравнения ($b^/$) найдем:

$$S_C = P \cdot \cos(69^0 18^/) / \sin(63^0 28^/) / \cos 30^0 = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}35 / 0{,}89 / 1{,}73 \approx 9{,}09 \text{ (кН)}.$$

Из уравнения ($a^/$) определим:

$$S_B = (P \cdot \cos 30^0 - S_C \cdot \sin(63^0 28^/) \cdot \sin 30^0)/\cos 45^0 = 2 \cdot (20 \cdot \sqrt{3}/2 - 9{,}09 \cdot 0{,}9/2)/\sqrt{2} =$$
$$= (34{,}64 - 8{,}18)/1{,}41 \approx 18{,}76 \text{(кН)}.$$

Из уравнения ($c^/$) получим:

$$S_Д = -P \cdot \cos(69^0 18^/) - S_C \cdot \cos(63^0 28^/) - S_B \cdot \cos 45^0 = -20 \cdot 0{,}35 - 9{,}09 \cdot 0{,}45 -$$
$$- 18{,}76 \cdot 1{,}41/2 = -7{,}0 - 4{,}09 - 13{,}22 \approx -24{,}31 \text{ (кН)}.$$

Знак минус у усилия $S_Д$ указывает на то, что стержень АД сжат. Другие стержни растянуты, так как их знаки положительны.

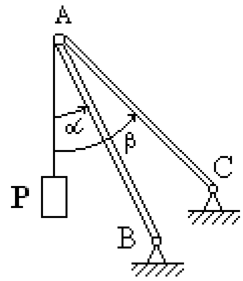
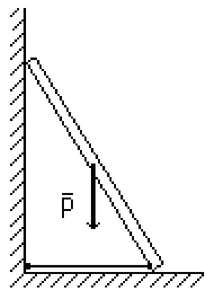
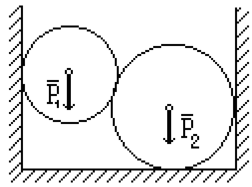
3.5 Контрольная работа по теме «Равновесие сходящейся системы сил» и пример ее выполнения

Контрольная работа по теме «Равновесие сходящейся системы сил» состоит из четырех заданий:

1) составить уравнения равновесия плоской сходящейся системы сил;
2) определить направления реакций связей, наложенных на одно тело;
3) определить направления реакций связей наложенных на два тела[1];
4) ответить на 2 теоретических вопроса (Приложение А).

[1] По усмотрению преподавателя задача может быть исключена из контрольной работы

Таблица 12 – Образец варианта контрольной работы по теме «Равновесие сходящейся системы сил»

Задачи (задания) контрольной работы			
Задача	Рисунок к задаче	Задача (задание)	Рисунок к задаче
<u>Задача 1</u> **К шарнирному болту А, который удерживается в равновесии с помощью двух невесомых стержней АВ и ВС, подвешен груз весом Р. Составить уравнения равновесия болта, если: $\alpha = 60^0$, $\beta = 210^0$.**		**<u>Задача 2</u>** **Определить направления реакций связей, наложенных на балку весом Р.**	
<u>Задача 3</u> **Определить направления реакций связей, наложенных на каждое тело системы тел.**		**<u>Задание 4</u>** **1. Дать аксиому присоединения.** **2. Какой вид имеют геометрические условия равновесия сходящейся системы сил?**	

3.6 Пример выполнения заданий контрольной работы

<u>Задача 1</u>

При решении Задачи 1 (таблица 12) необходимо совершить действия, определенные в примере выполнения Задачи С1а.

<u>1. Изображение конструкции в положении, соответствующем конкретным значениям данных о ее геометрических характеристиках</u>.

Конструкция при $\alpha = 60^0$ и $\beta = 210^0$ изображена на рисунке 74.

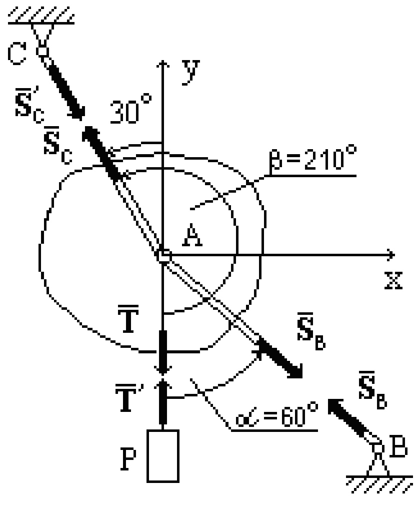


Рисунок 74

<u>2. Выбор объекта равновесия.</u>

Объектом равновесия здесь необходимо выбрать шарнирный болт А.

3. Изображение сил, действующих на выбранный объект равновесия.

Заданной силой в данной задаче является сила $\vec{T}$. Очевидно, что $|\vec{T}| = P$.

На объект равновесия наложены две связи – невесомые стержни AB и AC, действие которых заменяем усилиями $\vec{S}_B$ и $\vec{S}_C$, направленными вдоль стержней от узла А.

Таким образом, на свободный объект равновесия действует плоская сходящаяся система сил, для которой имеют место два аналитических условия равновесия:

$$\sum F_{kX} = 0,\ \sum F_{kY} = 0.$$

4. Составление уравнений равновесия.

Для составления уравнений равновесия заполним таблицу 13.

Таблица 13 – Таблица проекций к примеру выполнения КР

Проекции сил $\vec{F}_k$	Проекции сил, приложенных к объекту равновесия		
	$\vec{T}$	$\vec{S}_B$	$\vec{S}_C$
F_{kX}	0	$S_B \cdot \cos 30^0$	$-S_C \cdot \cos 60^0$
F_{kY}	P	$-S_B \cdot \cos 60^0$	$S_C \cdot \cos 30^0$

Уравнения равновесия шарнирного болта А будут иметь вид:

$$\sum F_{kX} = S_B \cdot \cos 30^0 - S_C \cdot \cos 60^0 = 0,$$
$$\sum F_{kY} = P - S_B \cdot \cos 60^0 + S_C \cdot \cos 30^0 = 0.$$

Задача 2

На балку весом Р наложены три связи: свободное опирание на гладкие поверхности в точках А и В; нерастяжимая нить – АС.

Реакции гладких поверхностей $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$ направлена по общей нормали в точке соприкосновения тел, а реакция нерастяжимой нити $\vec{T}_C$ направлена вдоль нити к точке подвеса.

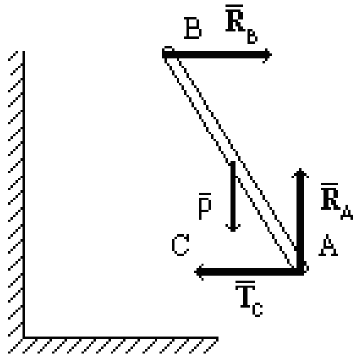


Рисунок 75

Задача 3

Для шара весом P_1 связями является: гладкая стена и гладкий шар весом P_2 (рисунок 76). Для шара весом P_2 связи: вертикальная стена и горизонтальный поверхность, а также шар весом P_1 (рисунок 76).

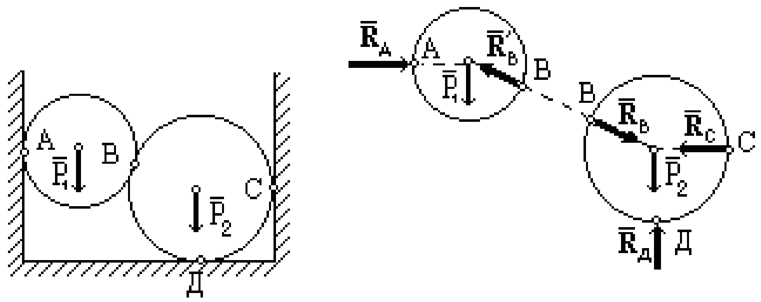


Рисунок 76

Во всех случаях связи относятся к типу свободного опирания. В этом случае реакция связи направлена по общей нормали, проведенной в точке касания (рисунок 76). При этом, на основании аксиомы действия и противодействия $\vec{R}_B = -\vec{R}'_B$.

<u>Задание 4</u>

Ответы на вопросы задания даны в Справочнике.

3.7 Задача С2а

Исследование условий равновесия произвольной плоской системы сил, приложенной к балке

Балка *AB* находится под действием приложенных сил и связей в равновесии (таблица 15). Размеры указаны на рисунках в таблице 15 (a = 2 м).

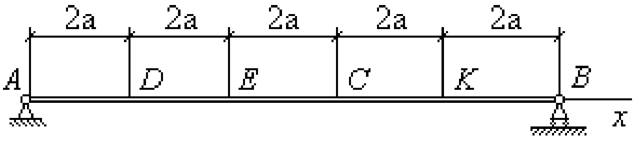
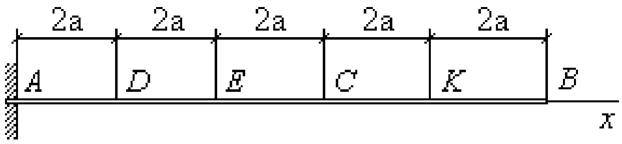
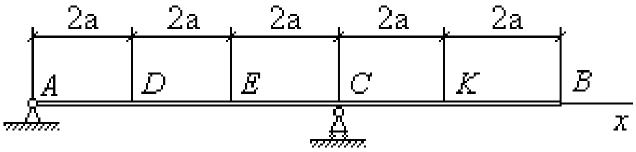
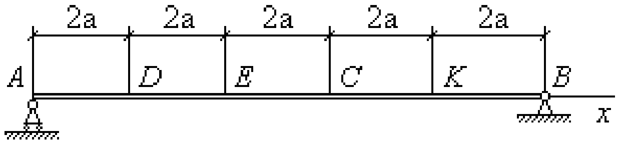
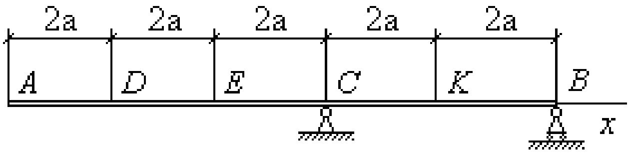
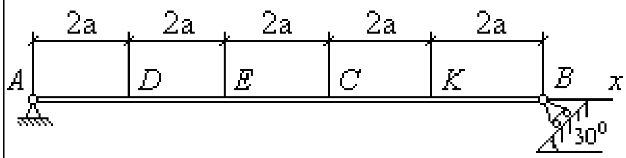
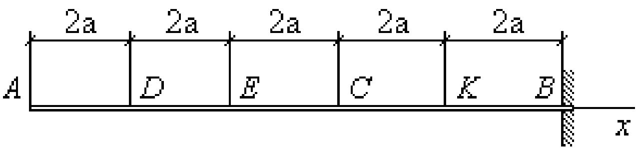
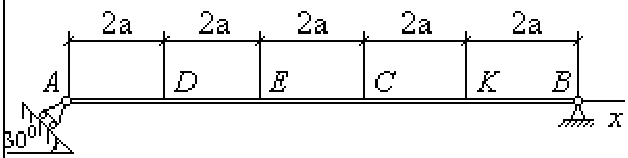
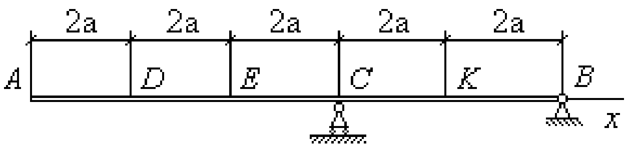
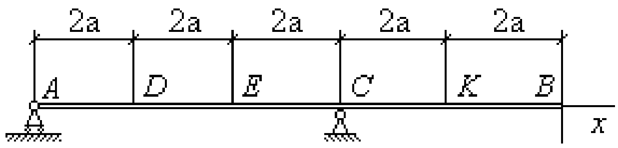
На балку действуют: равномерно распределенная нагрузка интенсивности q = 2 кН/м); сосредоточенная наклонная сила F = 6 кН (точка приложения и угол наклона α − в столбцах 3,4 таблицы 14); пара сил с моментом M = 8 кНм (знак момента − в последнем столбце таблицы 14).

Определить реакции связей, наложенных на балку *AB* и сделать проверку.

Таблица 14 – Условия к вариантам задач С2а

Номер условия	Равномерно распределенная нагрузка на участке (q)	Сосредоточенная сила (α, x, $\bar{F}$): точка приложения	Сосредоточенная сила: угол α, град	Знак момента
1	2	3	4	5
0	*DE*	*D*	150	−
1	*EC*	*D*	30	+
2	*CK*	*E*	120	−
3	*KB*	*E*	60	−
4	*KB*	*D*	150	+
5	*AD*	*K*	30	+
6	*EC*	*K*	120	−
7	*CK*	*E*	60	−
8	*AD*	*D*	150	+
9	*DE*	*K*	30	+

Таблица 15 – Рисунки к вариантам задач С2а

Рисунки к задаче С2а	
 Рисунок С2а.0	 Рисунок С2а.1
 Рисунок С2а.2	 Рисунок С2а.3
 Рисунок С2а.4	 Рисунок С2а.5
 Рисунок С2а.6	 Рисунок С2а.7
 Рисунок С2а.8	 Рисунок С2.9

3.8 Пример решения задачи С2а

Балка *AB* находится под действием приложенных сил и связей в равновесии рисунок 77. Размеры указаны на рисунках (a = 2 м). На балку действуют: равномерно распределенная нагрузка интенсивности q = 2 кН/м; сосредоточенная сила F = 6 кН с углом наклона $\alpha = 150^0$; пара сил с моментом M = – 8 кНм.

Определить реакции связей, наложенных на балку *AB* и убедиться в верности их нахождения (сделать проверку).

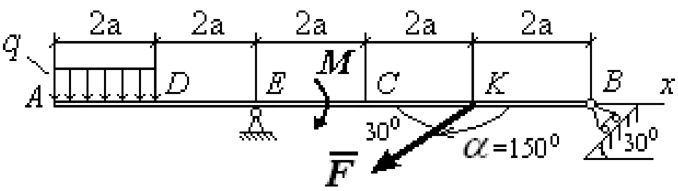


Рисунок 77

Решение задач на равновесие осуществляется по алгоритму, который был применён при решении задач С1 и С1а.

<u>1. Изображение балки в положении, соответствующем конкретным значениям данных о ее геометрических характеристиках и нагрузках</u>.

На рисунке 77 балка и нагрузки, приложенные к ней, изображены в соответствии с заданными значениями. Следует иметь в виду, что если угол α тупой, то необходимо изобразить острый угол равный дополнению до угла 90^0, 180^0, 270^0, 360^0. В данном случае необходимо взять острый угол 30^0, дополняющий угол $\alpha = 150^0$ до 180^0 (рисунок 77).

<u>2. Выбор объекта равновесия.</u>

Выбор объекта равновесия в задаче С2а однозначен – это балка АВ.

<u>3. Изображение сил, действующих на выбранный объект равновесия.</u>

3.1. Изображение заданных нагрузок (рисунок 78).

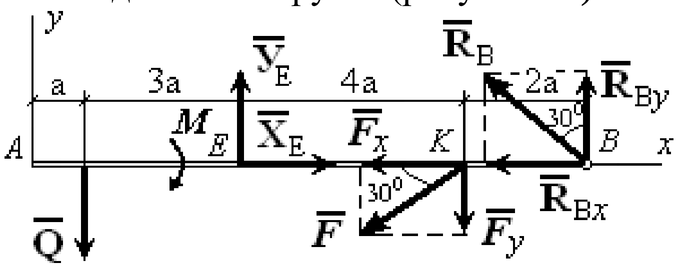


Рисунок 78

Сосредоточенная сила $\vec{F}$ уже изображена. Однако её целесообразно разложить на две параллельные осям координат составляющие. Модули составляющих определятся по формулам

$$F_x = F \cos 30^0;$$
$$F_y = F \sin 30^0.$$

При изображении момента пары сил М необходимо учесть его знак. На рисунке 78 момент пары перенесен, что правомерно, так как пару можно переносить в любое место *в пределах одного абсолютно твердого тела*.

Равномерно распределенную нагрузку заменим сосредоточенной силой $\vec{Q}$, которая приложена к середине участка распределения (рисунок 78). Модуль силы определяется по формуле $Q = q \cdot 2\,a = 2 \cdot 4 = 8$ кН.

3.2. Изображение реактивных сил (реакций связей).

Действие неподвижного шарнира, наложенного на балку в точке Е, заменим двумя реакциями $\vec{X}_E$ и $\vec{Y}_E$ (рисунок 78). В точке В на балку наложен подвижный шарнир, реакция $\vec{R}_B$ которого направлена перпендикулярно опорной плоскости. Реакцию $\vec{R}_B$ также целесообразно разложить на две составляющие параллельные координатным осям $\vec{R}_{Bx}$ и $\vec{R}_{By}$. Модули этих реакций определятся по формулам

$$R_{Bx} = R_B \cos 60^0; \qquad R_{By} = R_B \sin 60^0.$$

Такое разложение не приводит к увеличению количества неизвестных реакций, так как $\vec{R}_{Bx}$ и $\vec{R}_{By}$ выражаются через одну реакцию $\vec{R}_B$.

Объект равновесия, систему сил, приложенную к нему и все, что изображено на рисунке 78 часто называют **расчетной схемой**.

4. Составление и решение уравнений равновесия.

4.1. Установление статической определимости задачи и выбор системы уравнений равновесия.

При составлении условий (уравнений) равновесия системы сил, приложенной объекту равновесия (балке) прежде всего, необходимо ответить на вопрос – является ли задача статически определимой? Поскольку количество уравнений равновесия зависит от вида системы сил, приложенной к объекту равновесия, то сначала нужно определить тип системы.

Рассматриваемая система сил (рисунок 78) является плоской (все силы лежат в одной плоскости) и произвольной (т. е. силы не сходятся в одной точке). Для равновесия такой системы сил необходимо и достаточно выполнение трех аналитических условий равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad \sum F_{ky} = 0, \qquad \sum M_A(\vec{F}_k) = 0. \qquad (*)$$

Здесь A – моментная точка, в качестве которой может быть выбрана любая (связанная с объектом равновесия) точка.

Вместо основной системы условий (*) может быть составлена одна из двух вспомогательных условий равновесия, которые имеют вид:

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad \sum M_A(\vec{F}_k) = 0, \qquad \sum M_B(\vec{F}_k) = 0.$$

Или

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = 0, \qquad \sum M_B(\vec{F}_k) = 0, \qquad \sum M_C(\vec{F}_k) = 0.$$

Выбор одной из трех систем уравнений равновесия (с учетом того, что две последних имеют ограничения) зависит от типа задачи. Но в любом случае **уравнений равновесия должно быть только три**.

Количество неизвестных в рассматриваемой системе сил также равно трем ($\vec{X}_E$, $\vec{Y}_E$ и $\vec{R}_B$).

Таким образом, число уравнений равновесия и количество уравнений равновесия совпадают, такая задача является статически определимой (то есть неизвестные силы могут быть найдены методами статики).

Для составления уравнений равновесия (*) выберем оси координат и моментную точку.

Ось x направим горизонтально, ось y – вертикально.

При выборе моментной точки обычно используют правило – в этой точке **сходится наибольшее число неизвестных сил** (это обеспечивает более простой способ решения системы уравнений). Такой точкой (рисунок 78) является точка E (здесь сходятся две силы $\vec{X}_E$ и $\vec{Y}_E$).

Окончательно принимаем решение о составлении системы уравнений

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad \sum F_{ky} = 0, \qquad \sum M_E(\vec{F}_k) = 0.$$

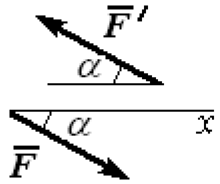
4.2. Составление уравнений проекций

Уравнения проекций на ось x и y

$$\sum F_{kx} = X_E - F\cos 30^0 - R_B \cos 60^0 = 0; \qquad \text{(a)}$$

$$\sum F_{ky} = -Q + У_E - F\cos 60^0 + R_B \cos 30^0 = 0. \qquad \text{(b)}$$

Уравнения составлены с учетом того, что проекция момента M (пары сил) на любую ось всегда равна нулю, что изображено на рисунке 79.



$$F_x + F_x{}' =$$
$$F\cos\alpha - F'\cos\alpha =$$
$$F\cos\alpha - F\cos\alpha = 0$$

Рисунок 79

4.3. Составление уравнения моментов.

В рассматриваемую систему сил (рисунок 78) входят наклонные силы. Их моменты удобно определять на основе применения теоремы Вариньона, согласно которой

$$M_E(\vec{F}) = M_E(\vec{F}_x) + M_E(\vec{F}_y); \qquad M_E(\vec{R}_B) = M_E(\vec{R}_{Bx}) + M_E(\vec{R}_{By}).$$

(Именно для этих целей наклонные силы $\vec{F}$ и $\vec{R}_B$ были ранее разложены на составляющие.)

При составлении уравнения моментов можно составить таблицу 16 (ее полезно составлять при решении первых задач подобного типа).

Таблица 16 – Таблица моментов для задачи С2а

Моменты сил $\vec{F}_k$	Моменты сил, приложенных к объекту равновесия							
	$\vec{Q}$	$\vec{X}_E$	$\vec{У}_E$	$\vec{F}_x$	$\vec{F}_y$	$\vec{R}_{Bx}$	$\vec{R}_{By}$	M
$M_E(\vec{F}_k)$	$Q \cdot 3а$	0	0	0	$-F\cos 60^0 \cdot 4а$	0	$R_B \cos 30^0 \cdot 6а$	$-M$

Алгебраическая сумма выражений из ячеек строки даст уравнение моментов

$$\sum M_E(\vec{F}_k) = Q \cdot 3a - F\cos 60^0 \cdot 4a + R_B \cos 30^0 \cdot 6a - M = 0. \qquad \text{(c)}$$

4.4. Решение уравнений.

Из уравнения (c) находим

$$R_B = (M/a - Q \cdot 3 + F\cos 60^0 \cdot 4) / (6\cos 30^0) = (8/2 - 8 \cdot 3 + 6 \cdot 2) / (6 \cdot \sqrt{3}/2) =$$
$$= (4 - 24 + 12) / (3 \cdot \sqrt{3}) = -8 / 5{,}2 = -1{,}54 \text{ кН}.$$

Из уравнения (а) определяем

$$X_E = F\cos 30^0 + R_B\cos 60^0 = 6\cdot\sqrt{3}/2\ - 1{,}54/2 = 4{,}43 \text{ кН}.$$

Из уравнения (b) получим

$$У_E = Q + F\cos 60^0 - R_B\cos 30^0 = 8 + 6/2 + 1{,}33 = 12{,}33 \text{ кН}.$$

5. Проверка.

Для проверки правильности полученных результатов необходимо составить новые уравнения, которые должны обращаться в тождества при подстановке в них заданной нагрузки и найденных выше реакций связей.

Однако можно составить только одно уравнение, в которое входили бы все найденные реакции. Таким уравнением могло бы быть уравнение моментов, но на балке нет моментной точки, относительно которой моменты всех реакций связей были бы равны нулю, так как сила $\vec{X}_A$ направлена вдоль балки. В подобных случаях моментной точкой можно выбирают точку вне балки на определенном расстоянии (например, на расстоянии 1 м). Выберем в качестве моментной точки точку P, находящуюся над точкой B балки на расстоянии 1 м (рисунок 80).

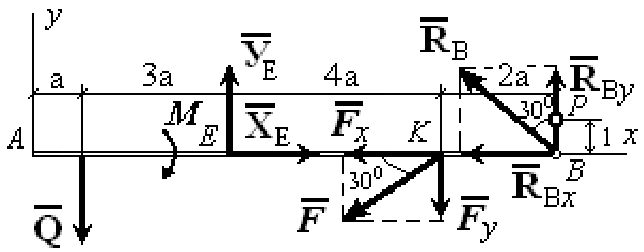


Рисунок 80

Составим сумму моментов сил, действующих на балку, относительно точки P и подставим в это выражение значения заданных нагрузок и найденных реакций $\vec{X}_E$, $\vec{У}_E$ и $\vec{R}_B$.

$$\sum M_P(\vec{F}_k) = Q\cdot 9a - У_E\cdot 6a + X_E\cdot 1 - F\cos 30^0\cdot 1 + F\cos 60^0\cdot 2a - R_B\cos 60^0\cdot 1 - M =$$

$$= 8\cdot 18 - 12{,}33\cdot 12 + 4{,}43 - 6\cdot\sqrt{3}/2 + 6\cdot 2 + 1{,}54/2 - 8 =$$

$$= 144\ - 147{,}96 + 4{,}43\ - 5{,}2 + 12 + 0{,}77\ - 8 = 161{,}2 - 161{,}16 = 0{,}04 \approx 0.$$

Тождественное удовлетворение уравнения свидетельствует о верности решения. Незначительная погрешность является следствием округления результатов.

3.9 Задача С2б

Исследование условий равновесия произвольной плоской системы сил, приложенной к составной балке

Балка *AB* находится в равновесии под действием приложенных сил и связей. Балка состоит из двух частей *AC* и *CB*, соединенных между собой в точке *C* шарниром (таблица 18). Размеры указаны на рисунках таблицы 17, где a = 2 м. На балку действуют (данные – в таблице 17): распределенная нагрузка интенсивности q = 2 кН/м; сосредоточенная сила F = 6 кН; момент M = 8 кН м.

Найти реакции внешних связей, наложенных на балку *AB*, и сделать проверку.

Таблица 17 – Условия к вариантам задач С2б

Номер условия	Равномерно распределенная нагрузка на участке	Сосредоточенная сила		Момент	
		точка приложения	угол α, град	участок приложения	знак
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	*DE*	*K*	60	*CB*	–
1	*EC*	*K*	120	*CB*	–
2	*CK*	*E*	120	*CB*	+
3	*KB*	*E*	150	*AC*	+
4	*KB*	*K*	150	*AC*	–
5	*AD*	*K*	30	*AC*	+
6	*EC*	*K*	60	*CB*	+
7	*CK*	*E*	60	*AC*	+
8	*AD*	*E*	150	*CB*	–
9	*DE*	*K*	30	*AC*	+

Таблица 18 – Рисунки к вариантам задачи С2б

Рисунки к задаче С2б

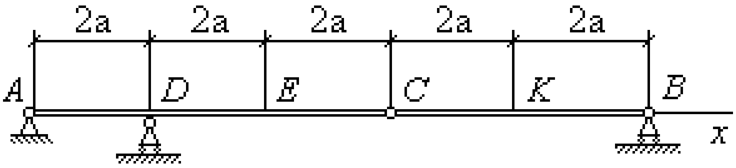


Рисунок С2б.0

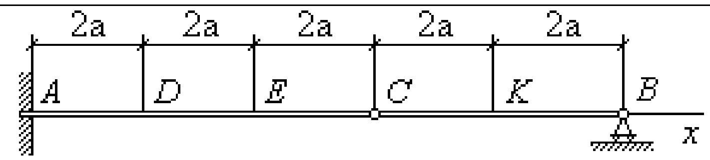


Рисунок С2б.1

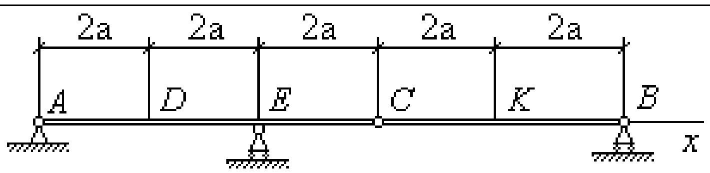


Рисунок С2б.2

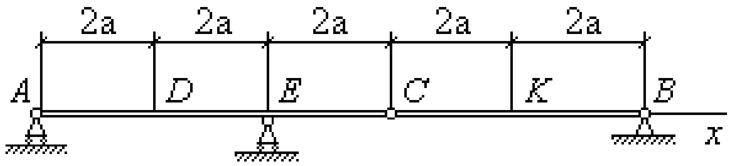


Рисунок С2б.3

Продолжение таблицы 18

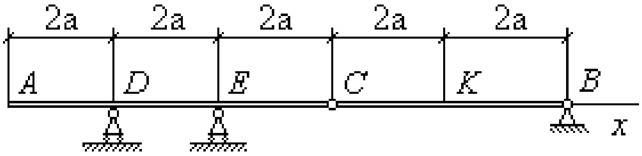


Рисунок С2б.4

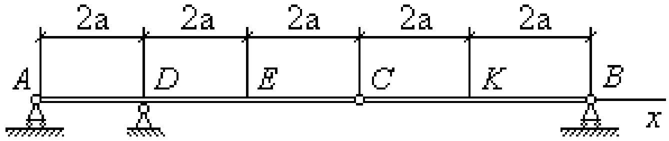


Рисунок С2б.5

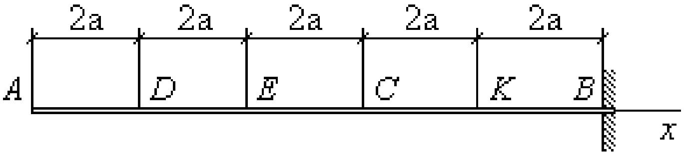


Рисунок С2а.6

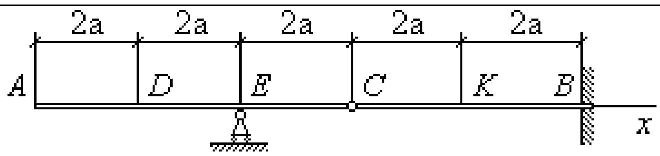


Рисунок С2б.7

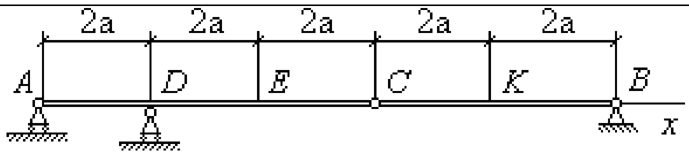


Рисунок С2б.8

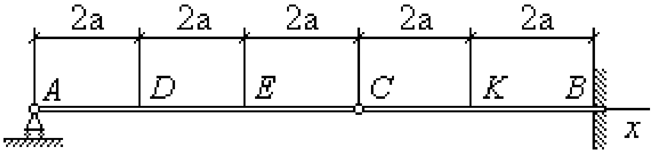


Рисунок С2б.9

3.10 Пример решения задачи С2б

Балка *AB* (рисунок 81), состоящая из двух частей *AC* и *CB*, соединенных между собой в точке *C* цилиндрическим шарниром, находится в равновесии под действием наложенных связей, равномерно распределенной нагрузки интенсивности $q = 2$ кН/м, сосредоточенной силы $F = 6$ кН и пары сил с моментом $M = 5$ кН, $a = 2$ м, $\alpha = 60^0$.

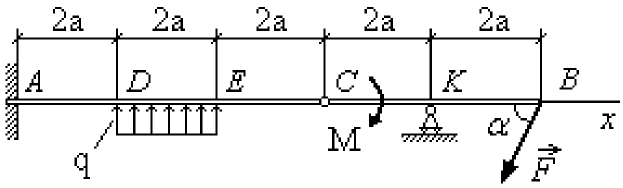


Рисунок 81

Определить реакции внешних связей в точках *A* и *K*, и сделать проверку.

Решение.

Сформируем расчетную схему. Для этого выполним последовательность действий, основой которой является примененный в Задачах С1а, С1б, С2а алгоритм.

1. Выберем объект равновесия (тело (систему тел), равновесие которого будем рассматривать).

Поскольку требуется определить реакции только внешних связей, то в качестве объекта равновесия целесообразно рассмотреть замороженную балку (то есть, балку состоящую из обеих частей АС и СВ – рисунок 82).

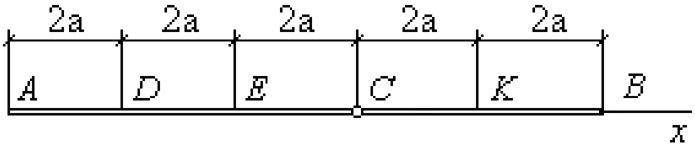


Рисунок 82

2.Приложим к объекту равновесия заданные силы (нагрузки).

Равномерно распределенную нагрузку интенсивности q, заменим сосредоточенной силой Q, приложенной к середине участка распределения. Величина $Q = q \cdot 2\,a = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ кН (рисунок 83).

3. Действие внешних связей заменим реакциями.

Действие жесткой заделки в точке A заменим двумя $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ и реактивным моментом M_A (рисунок 83).

Действие подвижного шарнира в точке K заменим одной реакцией $\vec{R}_A$, перпендикулярной опорной плоскости (рисунок 83).

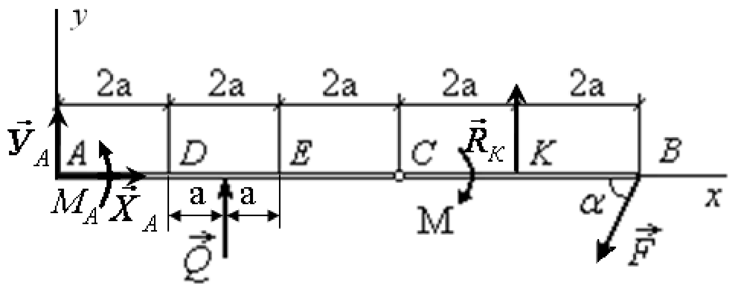


Рисунок 83

Расчетная схема сформирована.

Система сил, приложенная к объекту, равновесия является произвольной плоской системой сил, при равновесии которой должны выполняться три уравнения равновесия.

4. Составим уравнения равновесия.

4.1. Выберем оси координат (рисунок 83) и составим уравнения проекций на эти оси.

$$\sum F_{kx} = X_A - F \cdot \cos 60^0 = 0; \qquad (a)$$

$$\sum F_{ky} = У_A + Q + R_K - F \cdot \cos 30^0 = 0. \qquad (b)$$

4.2. Выберем моментную точку и составим уравнение моментов.

Обычно в качестве моментной точки (центра) выбирают ту точку, где сходится большее число неизвестных сил.

В этом случае в уравнение моментов будет входить наименьшее число неизвестных сил, что упрощает решение.

Предварительно (для применения теоремы Вариньона), разложим силу $\vec{F}$ на составляющие $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ (рисунок 84).

Модули составляющих сил $F_x = F \cdot \cos 60^0$, $F_y = F \cdot \cos 30^0$.

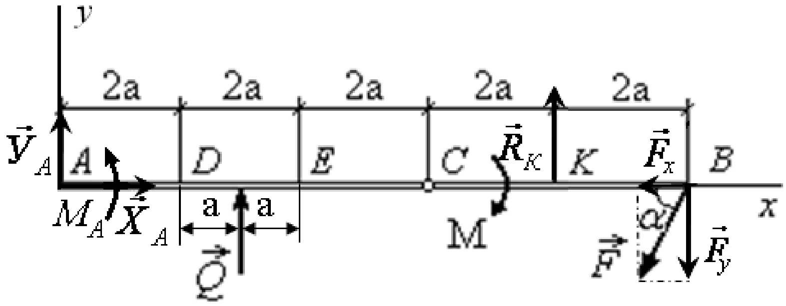


Рисунок 84

Уравнение моментов будет иметь вид

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = M_A + Q \cdot 3a - M + R_K \cdot 8a - F \cdot \cos 30^0 \cdot 10a = 0. \qquad (c)$$

<u>5. Составим дополнительное уравнение равновесия.</u>

Необходимость составления дополнительного уравнения вытекает из того, что в три уравнения (a) – (c) входят 4 неизвестные реакции ($\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, M_A, $\vec{R}_K$). Для определения 4 - х реакций требуются четыре уравнения.

Для составления 4-го уравнения рассмотрим балку *CB* (рисунок 85).

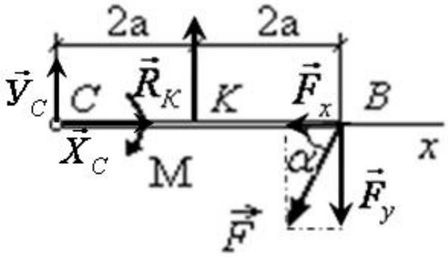


Рисунок 85

Действия отброшенной левой части (*AC*) заменим двумя реакциями $\vec{X}_C$ и $\vec{Y}_C$ (в точке *C* неподвижный шарнир).

Составим уравнение моментов относительно точки *C* (тогда неизвестные реакции $\vec{X}_C$ и $\vec{Y}_C$, которые не требуется определять не войдут в уравнение).

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = -M + R_K \cdot 2a - F \cdot \cos 30^0 \cdot 4a = 0. \qquad (d)$$

<u>6. Решим систему уравнений (a) – (d).</u>

Из уравнения (d)

<u>R_K</u> $= M / 2a + 2 \cdot F \cdot \cos 30^0 = 5/4 + 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{3} / 2 = 1{,}25 + 10{,}39 =$ <u>11,64 кН.</u>

Из уравнения (c)

$$\underline{M_{\text{А}}} = -Q \cdot 3a + M - R_{\text{К}} \cdot 8a + F \cdot \cos 30^0 \cdot 10a = (-8 \cdot 3 + 5/2 - 11{,}64 \cdot 8 + 10 \cdot 6 \cdot \sqrt{3}/2) \cdot 2 =$$
$$= (-24 + 2{,}5 - 93{,}12 + 51{,}96) \cdot 2 = \underline{-125{,}32 \cdot \text{кНм}}.$$

Из уравнения (a)

$$\underline{X_{\text{А}}} = F \cdot \cos 60^0 = 6/2 = \underline{3\ \text{кН.}}$$

Из уравнения (b)

$$\underline{У_{\text{А}}} = -Q - R_{\text{К}} + F \cdot \cos 30^0 = -8 - 11{,}64 + 6 \cdot \sqrt{3}/2 = \underline{-14{,}44\ \text{кН.}}$$

7. Проверка.

При проведении проверки необходимо стремиться к составлению (по возможности) одного уравнения, в которое входили бы все (или большинство) определяемых реакций). При этом нельзя использовать уравнения, из которых были найдены реакции.

В данной задаче при составлении уравнения моментов относительно любой точки на балке (например, точки С - рисунок 85) в него войдет три из 4-х реакции: $\vec{Y}_A,\ M_A,\ \vec{R}_K$. Поэтому для проверки в качестве моментной точки возьмем точку L, находящуюся на расстоянии a выше балки (рисунок 86).

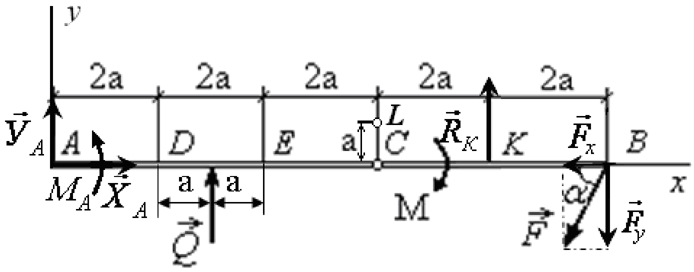


Рисунок 86

Тогда сумма моментов сил, действующих на балку, определится в виде

$$\sum M_L(\vec{F}_k) = M_{\text{А}} - У_{\text{А}} \cdot 6a - Q \cdot 3a - M + R_K \cdot 2a - F \cdot \cos 30^0 \cdot 4a + X_A \cdot a - F \cdot \cos 60^0 \cdot a =$$
$$= -125{,}32 + 14{,}44 \cdot 12 - 8 \cdot 6 - 5 + 11{,}64 \cdot 4 - 6 \cdot 8 \cdot \sqrt{3}/2 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 2/2 =$$
$$= -125{,}32 + 173{,}28 - 48 - 5 + 46{,}56 - 41{,}57 + 6 - 6 = 225{,}84 - 225{,}89 = 0{,}05 \approx 0.$$

Полученный результат свидетельствует о верности решения (незначительное отличие суммы моментов всех сил относительно точки L от нуля является следствием округлений).

3.11 Задача С2в

Исследование условий равновесия произвольной плоской системы сил, приложенной к раме

Жесткая рама (таблица 20) нагружена сосредоточенной силой $\vec{F}$, направленной под углом α к горизонту, равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q и моментом M. Рама закреплена связями, виды которых и точки закрепления указаны в таблице 19, и находится в равновесии. Прочерки в графах 2-4 таблицы 19 означают отсутствие соответствующих связей.

При заданных значениях F = 4 кН, q = 2 кН/м, M = 5 кН м, a = 2 м определить реакции наложенных на раму связей. Точка приложения силы $\vec{F}$, участок приложения распределенной нагрузки и знак момента M (момент прикладывается к любой части рамы) указаны в таблице 19.

Таблица 19 – Данные к задаче С2в

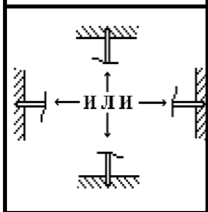
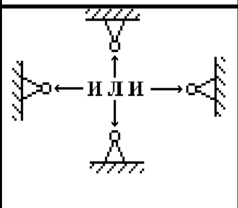
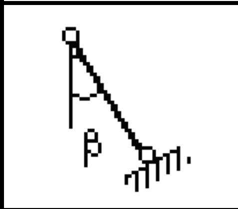
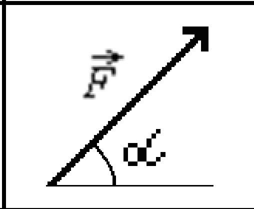
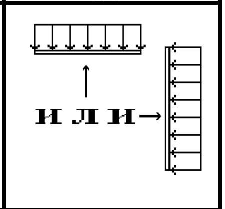
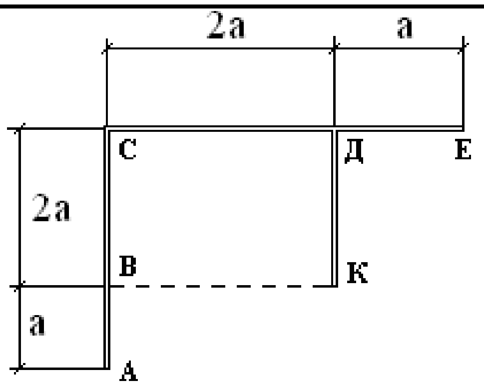
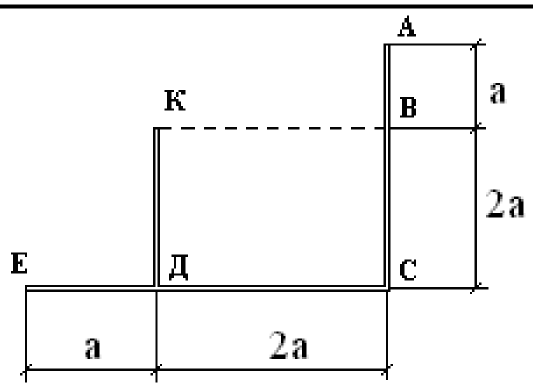
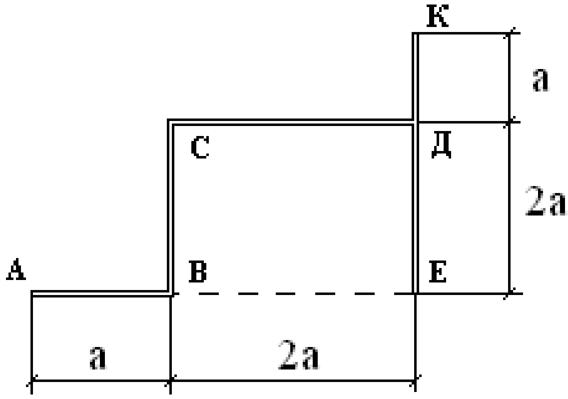
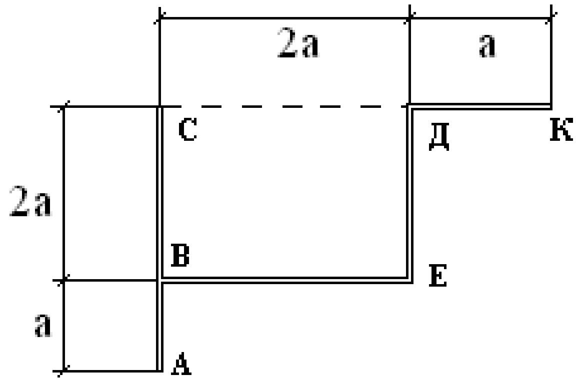
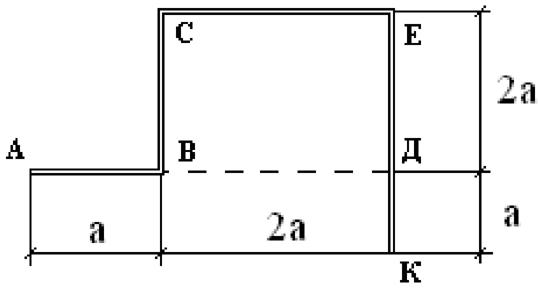
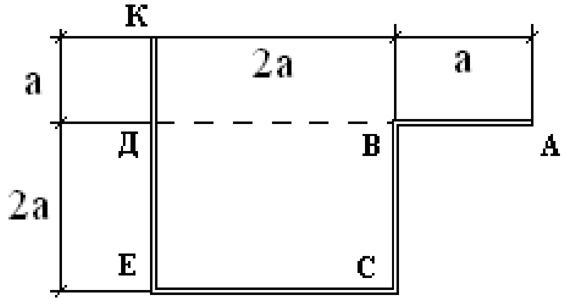
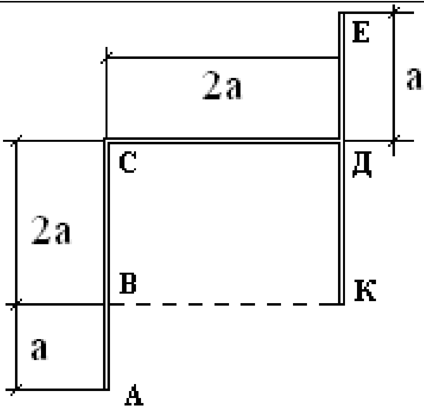
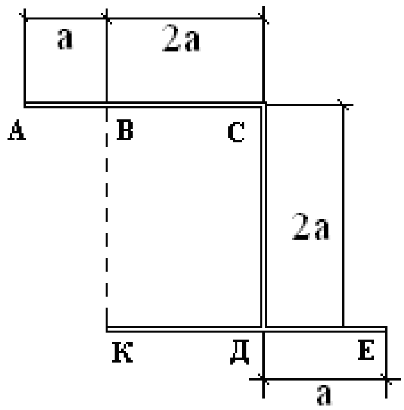
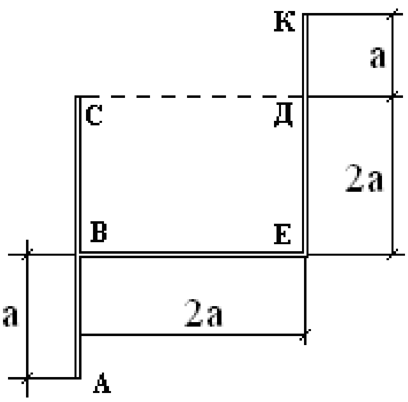
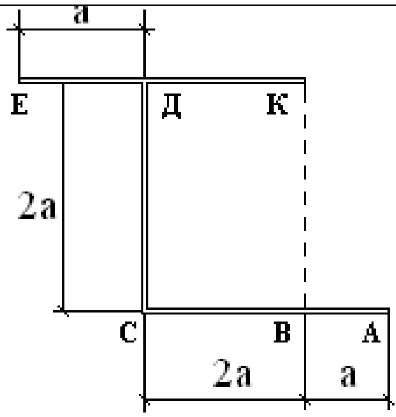
№ условия	Виды наложенных связей				Нагрузки			Знак момента М
	Жесткая заделка	Неподвижный шарнир	Стержень с шарнирами на концах		Сила $\vec{F}$		Распределенная нагрузка	
								
	точка наложения			β^0	точка приложен.	α^0	участок распределения	
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	—	С	А	60	Е	60	КД	—
1	—	А	К	30	С	60	ДЕ	+
2	А	—	—	—	К	30	КД	—
3	—	К	А	60	С	60	ДЕ	+
4	—	А	Е	30	С	60	КД	—
5	К	—	—	—	А	30	АВ	+
6	—	К	Е	30	Д	60	КД	—
7	—	Е	К	60	В	30	ДЕ	+
8	—	А	С	30	Е	60	АВ	—
9	—	Е	А	60	К	30	АВ	+

Таблица 20 – Рисунки к вариантам задачи С2в

Рисунки к задаче С2в	
1	**2**
 Рисунок С2в.0	 Рисунок С2в.1

Продолжение таблицы 20

1	2
 Рисунок С2в.2	 Рисунок С2в.3
 Рисунок С2в.4	 Рисунок С2в.5
 Рисунок С2в.6	 Рисунок С2в.7
 Рисунок С2в.8	 Рисунок С2в.9

3.12 Пример решения задачи С2в

Жесткая рама рисунок 87 нагружена сосредоточенной силой $\vec{F}$, направленной под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту, равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q и парой сил с моментом M. На раму в точке К наложен неподвижный шарнир, а в точке А – невесомый стержень.

При заданных значениях $F = 4$ кН, $q = 2$ кН/м, $M = 5$ кН м (знак момента отрицательный), $a = 2$ м определить реакции наложенных на раму связей.

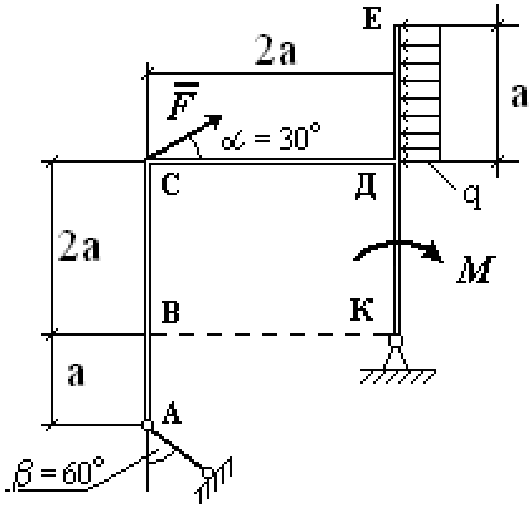


Рисунок 87

Решение задач на равновесие произвольной плоской системы сил, приложенной к твердому телу, осуществляется в той же последовательности, что и для сходящейся системы сил.

<u>1. Изображение конструкции в положении, соответствующем конкретным значениям данных о ее геометрических характеристиках</u>

В рассматриваемом примере это уже сделано (рисунок 87).

<u>2. Выбор тела (тел), объекта равновесия.</u>

В качестве объекта равновесия в данном случае целесообразно выбрать раму (рисунок 88).

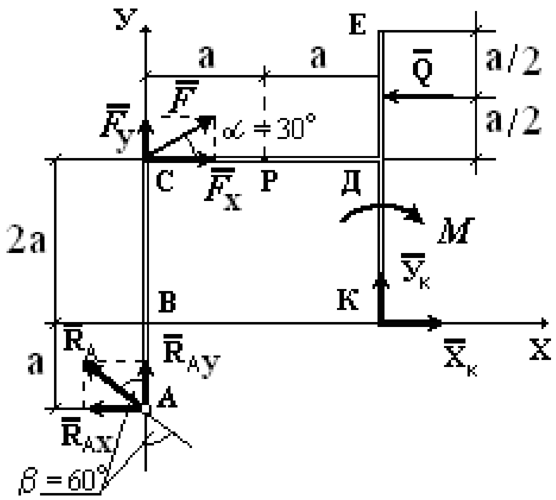


Рисунок 88

3. Изображение сил, действующих на выбранный объект равновесия.

3.1. Заданные силы.

Заданными силами являются (рисунок 88).

Сила $\vec{F}$, которую разложим на две составляющие параллельные координатным осям $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$. Модули составляющих

$$F_x = F \cos 30^0;$$
$$F_y = F \sin 30^0.$$

Равномерно распределенная нагрузка интенсивности q, которую заменяем сосредоточенной силой $\vec{Q}$**.** Модуль силы $Q = q \cdot l = q \cdot a = 2 \cdot 2 = 4$ (кН), а точка приложения находится на середине отрезка ДЕ.

Момент пары сил М может быть приложен к любой точке объекта равновесия (рамы).

3.2. Реактивные силы (реакции связей).

На раму наложены две связи: в точке К – неподвижный цилиндрический шарнир и в точке А – невесомый стержень. На основании аксиомы связей заменяем действие связей их реакциями.

Неподвижный цилиндрический шарнир заменим двумя реакциями: $\vec{X}_K$ и $\vec{Y}_K$, которые направлены параллельно по осям координат.

Невесомый стержень заменяется одной реакцией $\vec{R}_A$, которая направлена вдоль стержня, то есть составляет с вертикалью угол $\beta = 60^0$. Разложим наклонную силу $\vec{R}_A$ на две составляющие, параллельные осям координат $\vec{R}_{Ax}$ и $\vec{R}_{Ay}$. Модули составляющих:

$$R_{Ax} = R \sin 60^0;$$
$$R_{Ay} = R \cos 60^0.$$

4. Составим уравнения равновесия.

4.1. Выбор системы уравнений равновесия.

На свободный объект равновесия (раму) действует произвольная плоская система сил, для которой имеют место три аналитических условия равновесия:

$$\sum F_{kX} = 0, \quad \sum F_{kY} = 0, \quad \sum M_K(\vec{R}_k) = 0. \qquad (*)$$

Здесь в качестве моментной точки выбрана точка K, так как в ней сходится наибольшее число неизвестных сил.

Моментную точку целесообразно выбирать так, чтобы в ней сходилось наибольшее число неизвестных сил, тогда в уравнение моментов войдет меньшее число неизвестных сил, что облегчит решение системы уравнений.

Уравнения (*) являются основная форма аналитических условий равновесия произвольной плоской системы сил. Вместо нее может быть составлена одна из двух вспомогательных форм.

4.2. Составление уравнений проекций.

Для составления первых двух уравнений (*) заполним таблицу 21.

Таблица 21 – Таблица проекций к задаче С2в.

Проекции сил $\vec{F}_k$	Проекции сил, приложенных к объекту равновесия				
	$\vec{F}$	$\vec{Q}$	$\vec{X}_K$	$\vec{У}_K$	$\vec{R}_A$
F_{kX}	$F \cdot \cos30^0$	$-Q$	$X_К$	0	$-R_А \cdot \cos30^0$
$F_{kУ}$	$F \cdot \cos60^0$	0	0	$У_К$	$R_А \cdot \cos60^0$

На основании данных таблицы 21 два первых уравнения равновесия будут иметь вид:

$\sum F_{kX} = F \cdot \cos30^0 - Q + X_К - R_А \cdot \cos30^0 = 0,$ (a)

$\sum F_{kУ} = F \cdot \cos 60^0 + У_К + R_А \cdot \cos60^0 = 0.$ (b)

4.3. Составление уравнения моментов.

Для составления третьего уравнения равновесия (уравнения моментов - $\sum M_К(\vec{F}_k) = 0$) составим таблицу 22 моментов.

Для удобства вычисления моментов сил $\vec{R}_A$ и $\vec{F}$ воспользуемся теоремой Вариньона, согласно которой момент равнодействующей равен сумме моментов составляющих сил.

$$M_К(\vec{R}_A) = M_К(\vec{R}_x) + M_К(\vec{R}_y); \qquad M_К(\vec{F}) = M_К(\vec{F}_x) + M_К(\vec{F}_y),$$

Таблица 22 – Таблица моментов к задаче С2в.

Моменты сил $\vec{F}_k$	Моменты сил, приложенных к объекту равновесия					
	$\vec{R}_{Ax}$	$\vec{R}_{Ay}$	$\vec{F}_x$	$\vec{F}_y$	$\vec{Q}$	M
$M_К(\vec{F}_k)$	$-R_А \cdot \cos30^0 \cdot a$	$-R_А \cdot \cos60^0 \cdot 2a$	$-F \cdot \cos30^0 \cdot 2a$	$-F \cdot \cos60^0 \cdot 2a$	$Q \cdot 2{,}5a$	$-M$

На основании данных таблицы 22 составим уравнение

$$\sum M_К(\vec{F}_k) = -R_А \cdot \cos30^0 \cdot a - R_А \cdot \cos60^0 \cdot 2a - F \cdot \cos30^0 \cdot 2a -$$
$$- F \cdot \cos60^0 \cdot 2a + Q \cdot 2{,}5a - M = 0 \qquad (c)$$

5. Определение искомых величин и исследование результатов.

Из уравнения (c) найдем:

$$R_A = \frac{-2F(\cos30^0 + \cos60^0) + 2{,}5Q - M}{\cos30^0 + 2\cos60^0} = \frac{-2 \cdot 4(0{,}866 + 0{,}5) + 2{,}5 \cdot 4 - 5}{0{,}866 + 2 \cdot 0{,}5} = -3{,}18 \quad (кН).$$

Из уравнения (a) получим:

$X_К = -F \cdot \cos30^0 + R_А \cdot \cos30^0 + Q = -(3{,}18 + 4) \cdot 0{,}866 + 4 = -3{,}894 + 4 = -2{,}22$ (кН).

Из уравнения (b) определим:

$$У_К = -R_А \cdot \cos60^0 - F \cdot \cos60^0 = (3{,}18 - 4) \cdot 0{,}5 = -0{,}41 \text{ (кН)}.$$

Знаки « – » у реакций $R_А$, $X_К$ и $У_К$ свидетельствуют о том, что они направлены в противоположную сторону.

Модуль реакции $\vec{R}_K$

$$R_K = \sqrt{X_K^2 + У_K^2} = \sqrt{(-2{,}22)^2 + (-0{,}41)^2} = 2{,}26 \quad (кН).$$

6. Проверка полученных результатов.

Для проверки результатов расчета в случае равновесия произвольной плоской системы сил необходимо составить уравнение моментов. При этом в качестве моментной точки необходимо выбрать такую точку, чтобы в уравнение моментов вошли все искомые реакции связей.

В рассматриваемом примере такой точкой, например, является точка Р (рисунок 88). Составим соответствующую таблицу моментов.

Таблица 23 – Таблица моментов к проверке в задаче С2в

Моменты сил $\vec{F}_k$	Моменты сил, приложенных к объекту равновесия							
	$\vec{R}_{Ax}$	$\vec{R}_{Ay}$	$\vec{F}_x$	$\vec{F}_y$	$\vec{X}_K$	$\vec{У}_K$	$\vec{Q}$	M
$M_P(\vec{F}_k)$	$-R_A \cdot 3a \cdot \cos30^0$	$-R_A \cdot a \cdot \cos60^0$	0	$-F \cdot a \cos60^0$	$X_K \cdot 2a$	$У_K \cdot a$	$Q \cdot 0{,}5a$	$-M$

На основании данных таблицы 23 проверочное уравнение имеет вид

$$\sum M_P(\vec{F}_k) = -R_A \cdot 3a \cdot \cos30^O - R_A \cdot a \cdot \cos60^O - F \cdot \cos60^O \cdot a +$$
$$+ X_K \cdot 2a + У_K \cdot a + Q \cdot 0{,}5a - M = 0. \quad (d)$$

Поделив уравнение (4) на a и подставляя в него найденные значения реакций R_A, X_K и $У_K$ получим:

$$3{,}18 \cdot 0{,}866 \cdot 3 + 3{,}18 \cdot 0{,}5 - 4 \cdot 0{,}5 - 2{,}22 \cdot 2 - 0{,}41 \cdot 1 + 4 \cdot 0{,}5 - 5 =$$

$$= 8{,}26 + 1{,}59 - 2 - 4{,}44 - 0{,}41 + 2 - 5 = 11{,}84 - 11{,}85 = -0{,}01 \approx 0.$$

Таким образом, уравнение (d) удовлетворяется тождественно (незначительная погрешность является следствием округления), что свидетельствует о верном определении реакций R_A, X_K и $У_K$.

3.13 Задача С2г

Исследование условий равновесия произвольной плоской системы сил, приложенной к составной раме

Рама состоит из двух тел, соединенных шарниром в точке С. Схемы конструкций, данные о направлениях сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ и точках их приложения, участок приложения распределенной нагрузки приведены на таблицах 24, 25.

Дано: модули сил: F_1 = 2 кН, F_2 = 4 кН, F_3 = 3 кН, F_4 = 5 кН; интенсивность равномерно распределенная нагрузка q = 2 кН/м (участок приложения указан в графе 10 таблице 24); момент пары сил М = 8 кНм. Размер a = 2м.

На конструкции, изображенные на рисунках С2г.0, С2г.2, С2г.6, в точке А наложена связь – невесомый стержень АА$^/$.

Прочерки в графах 2,4,6,8 таблицы 24 означают отсутствие соответствующих сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$.

Найти реакции внешних опор и давление во внутреннем шарнире С.

Таблица 24 – Данные о задачах С2г

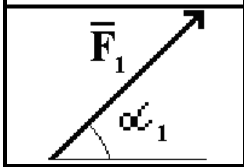
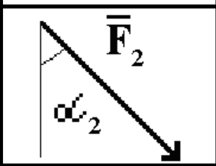
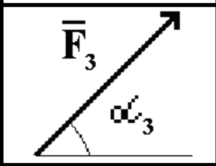
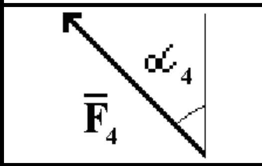
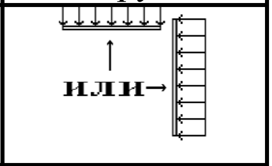
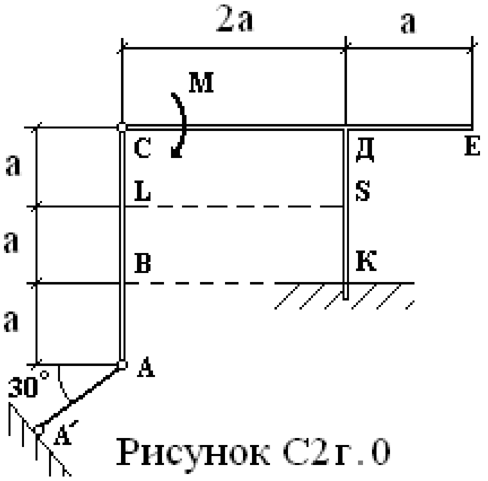
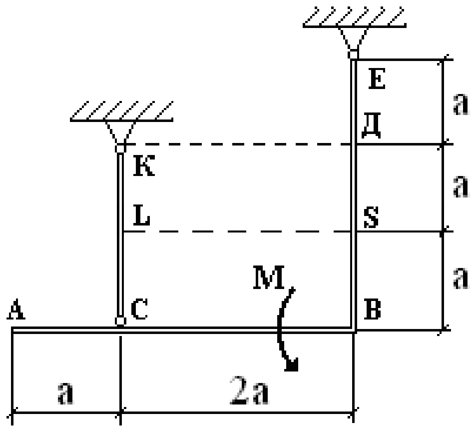
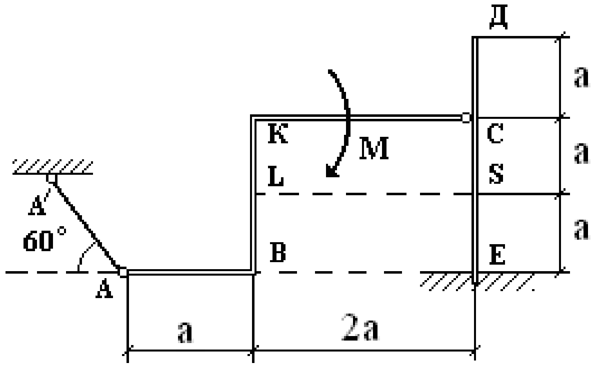
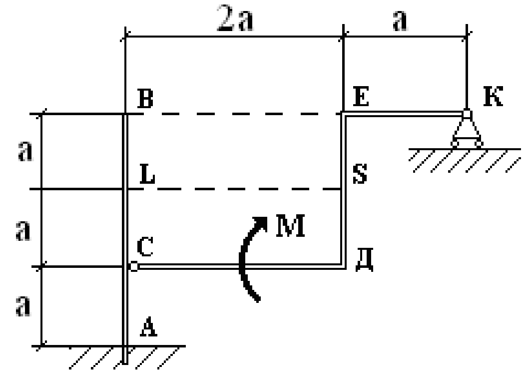
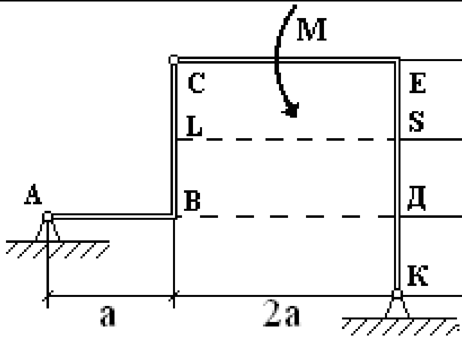
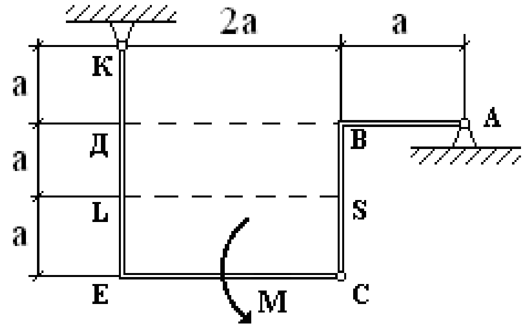
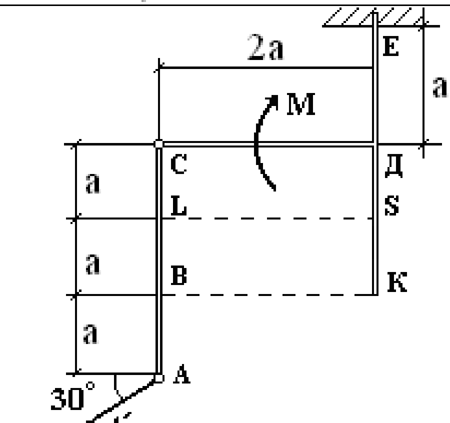
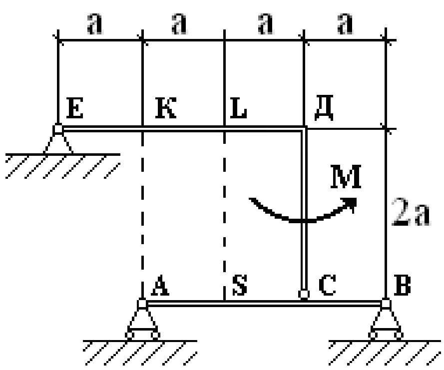
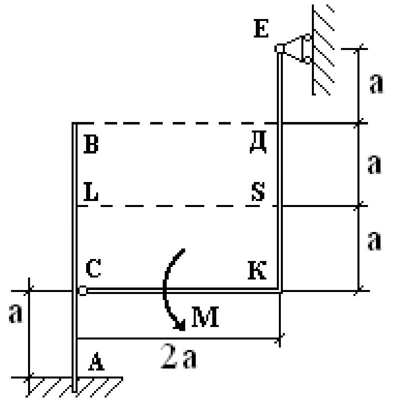
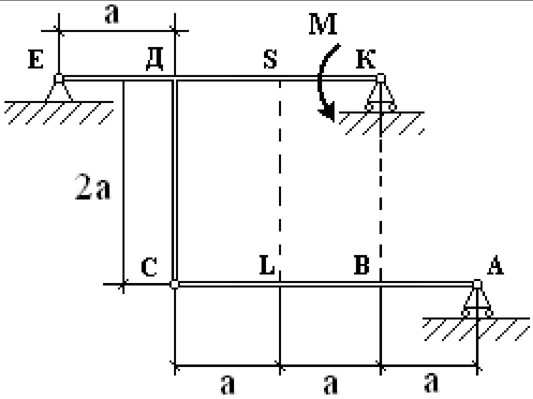
№ условия	Сила $\vec{F}_1$		Сила $\vec{F}_2$		Сила $\vec{F}_3$		Сила $\vec{F}_4$		Распределенная нагрузка
									
	Точка приложения	α_1^0	Точка приложения	α_2^0	Точка приложения	α_3^0	Точка приложения	α_4^0	Участок распределения
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	—	—	—	—	L	30	S	60	АВ
1	—	—	—	—	L	30	Д	60	ДЕ
2	Д	60	—	—	—	—	S	30	АВ
3	—	—	L	60	—	—	S	120	ДЕ
4	L	120	S	30	—	—	—	—	ДЕ
5	Д	60	—	—	—	—	L	150	АВ
6	S	120	—	—	—	—	Д	60	ДЕ
7	—	—	L	150	—	—	S	30	ДЕ
8	—	—	L	60	Д	30	—	—	АВ
9	—	—	—	—	Д	60	S	120	ДЕ

Таблица 25 – Рисунки к вариантам задачи С2г

Рисунки к задаче С2г	
1	**2**
 Рисунок С2г.0	 Рисунок С2г.1

Продолжение таблицы 25

1	2
 Рисунок С2г.2	 Рисунок С2г.3
 Рисунок С2г.4	 Рисунок С2г.5
 Рисунок С2г.6	 Рисунок С2г.7
 Рисунок С2г.8	 Рисунок С2г.9

3.14 Пример решения задачи С2г

Рама, изображенная на рисунке 89, состоит из двух тел, соединенных шарниром в точке С.

На конструкцию в точках Д и В наложены силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_4$ модули которых F_1 = 2 кН и F_4 = 5 кН. Силы составляют углы $\alpha_1 = 150^0$, $\alpha_4 = 120^0$ с вертикалью и горизонталью соответственно; на участке ДЕ действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности q = 2 кН/м; к части конструкции СКЕ приложена пара сил с моментом М = 8 кНм. Размер a = 2м.

Найти реакции внешних опор в точках А и Е и давление во внутреннем шарнире С конструкции (рисунок 89).

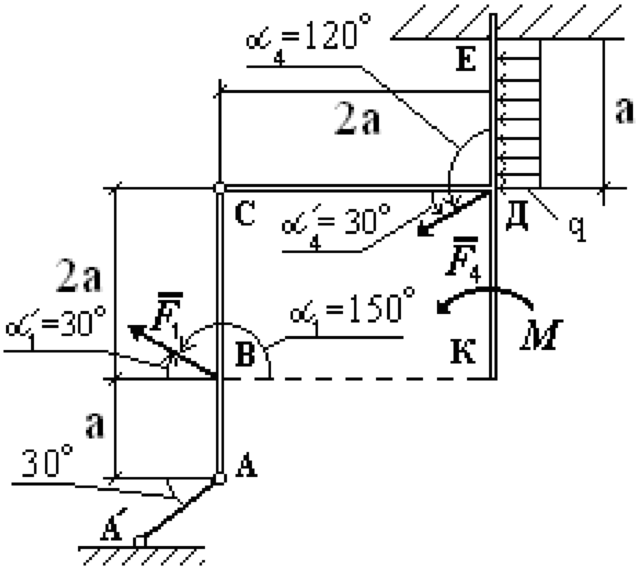


Рисунок 89

Решение.

1. Изображение конструкции в положении, соответствующем конкретным значениям данных о ее геометрических характеристиках.

В выполнении этого пункта нет необходимости, так как на рисунке 89 указаны: внешние связи, наложенные на конструкцию; нагрузки, действующие на раму; размеры конструкции.

Далее необходимо освободиться от тупых углов способом, указанным на рисунке 89. Т. е. вместо угла $\alpha_1 = 150^0$ будем использовать угол $\alpha_1^{/} = 30^0$ (дополнение α_1 до угла 180^0), а вместо угла $\alpha_4 = 120^0$ угол $\alpha_4^{/} = 30^0$ ($\alpha_4^{/} = \alpha_4 - 90^0$).

2. Выбор тела (тел), равновесие которого должно быть рассмотрено (объект равновесия).

В задаче помимо реакции внешних опор необходимо определить давление в промежуточном шарнире С, поэтому для решении задачи применим метод разбиения. Расчленим мысленно конструкцию по шарниру С на две части и рассмотрим равновесие каждой части отдельно.

Таким образом, имеем 2 объекта равновесия: левая часть конструкции – АС (рисунок 90 а)) и правая часть – СКЕ (рисунок 90 б)).

3. Изображение сил, действующих на выбранные объекты равновесия.

3.1. Изображение активных (заданных) сил (нагрузок).

Сосредоточенные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_4$ разложим на составляющие, параллельные осям координат $\vec{F}_{1x}$, $\vec{F}_{1y}$, и $\vec{F}_{4x}$, $\vec{F}_{4y}$, соответственно (рисунок 90). Модули составляющих сил

$$F_{1x} = F_1 \cos 30^0;$$
$$F_{1y} = F_1 \sin 30^0;$$
$$F_{4x} = F_4 \cos 30^0;$$
$$F_{4y} = F_4 \sin 30^0.$$

Пару сил с моментом М (рисунок 90) приложим к правой части СКЕ конструкции (пару сил можно переносить только в пределах одного тела, то есть ее нельзя прикладывать к левой части АС конструкции).

Действие равномерно распределенной нагрузки интенсивности $q = 2$ кН/м заменим сосредоточенной силой $Q = q \cdot a = = 2 \cdot 2 = 4$ (кН), которая будет приложена к середине участка распределения ЕД (рисунок 90).

3.2. Изображение реактивных сил (реакций связей).

Применяя аксиому связей, освободимся от внешних связей (рисунок 90):

Жесткая заделка в точке Е эквивалентна двум реакциям $\vec{X}_E$ и $\vec{У}_E$, направленным по осям координат, и паре сил, с моментом M_E (реактивный момент).

Действие невесомого стержня $AA^/$ заменим реакцией $\vec{R}_A$, которая направлена вдоль стержня и которую разложим на две составляющие $\vec{R}_{Ax}$ и $\vec{R}_{Ay}$, параллельные осям координат (рисунок 90). Модули составляющих

$$R_{Cx} = R_C \cos 30^0;$$
$$R_{Cy} = R_C \sin 30^0;$$

При расчленении конструкции внутренний шарнир С (рисунок 90) для каждой из частей конструкции АС и СКЕ является неподвижным цилиндрическим шарниром, действие которого заменяется двумя реакциями $\vec{X}_C$ и $\vec{У}_C$ (приложены к части конструкции АС) или $\vec{X}_C^/$ и $\vec{У}_C^/$ (приложены к части конструкции СКЕ). При этом:

$$X_C = X_C^/, \qquad У_C = У_C^/. \qquad (*)$$

То есть составляющие реакции в шарнире С ($\vec{X}_C$ и $\vec{X}_C^/$, $\vec{У}_C$ и $\vec{У}_C^/$) равны по модулю и направлены в противоположные стороны.

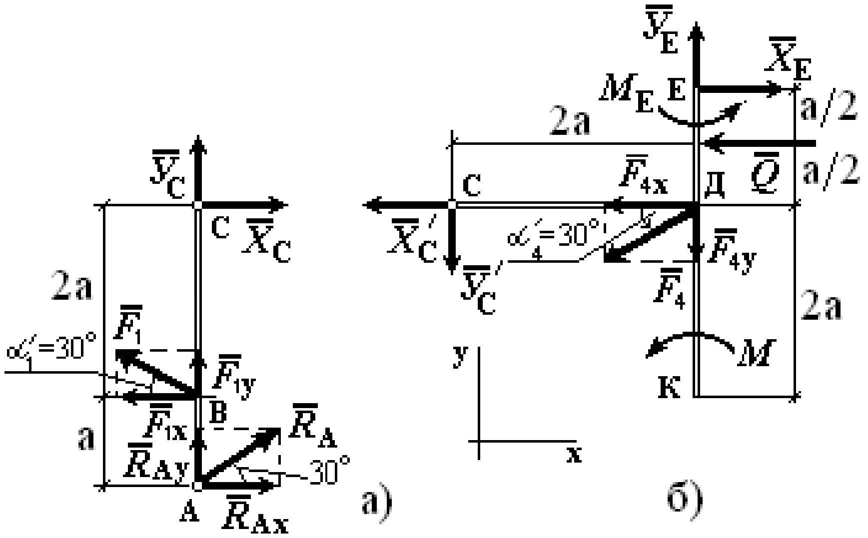


Рисунок 90

4. Составление уравнений равновесия.

На каждую из двух частей конструкции действует произвольная плоская система сил, следовательно, для каждой части имеют место три уравнения равновесия, то есть

для части АС		для части СКЕ	
$\sum F_{kX} = 0,$	(a)	$\sum F_{kX} = 0,$	(d)
$\sum F_{kY} = 0,$	(b)	$\sum F_{kY} = 0,$	(e)
$\sum M_C(\vec{F}_k) = 0$	(c)	$\sum M_E(\vec{F}_k) = 0$	(f)

В уравнении моментов (с) для части конструкции АС в качестве моментной принята точка С, так как в ней сходятся неизвестные силы $\vec{X}_C$ и $\vec{Y}_C$. В уравнении моментов (f) для части конструкции СКЕ в качестве моментной принята точка Е - в ней сходятся неизвестные силы $\vec{X}_E$ и $\vec{Y}_E$ (предполагается, что силы $\vec{X}_C^{/}$ и $\vec{Y}_C^{/}$ уже найдены из уравнений равновесия, составленных для части конструкции АС).

Уравнения равновесия (а) – (с) для части конструкции АС будут иметь вид[1]:

$$\sum F_{kX} = R_A \cdot \cos 30^0 - F_1 \cdot \cos 30^0 + X_C = 0, \qquad (a^{/})$$

$$\sum F_{kY} = R_A \cdot \cos 60^0 + F_1 \cdot \cos 60^0 + Y_C = 0, \qquad (b^{/})$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = R_A \cdot \cos 30^0 \cdot 3a - F_1 \cdot \cos 30^0 \cdot 2a = 0. \qquad (c^{/})$$

[1] При наличии достаточных навыков таблицы проекций и моментов, составленные в примере решения задачи С2а, можно опустить

Уравнения равновесия (d) – (f) для части конструкции СКЕ запишутся в виде:

$$\sum F_{kX} = - X_C - F_4 \cdot \cos30^0 - Q + X_E = 0, \qquad (d^{/})$$

$$\sum F_{kУ} = - У_C - F_4 \cdot \cos60^0 + У_E = 0, \qquad (e^{/})$$

$$\sum M_E(\vec{F}_k) = У_C \cdot 2a - X_C \cdot a - F_4 \cdot \cos30^0 \cdot a - Q \cdot a/2 + M_E + M = 0. \qquad (f^{/})$$

Здесь при составлении уравнений равновесия ($d^{/}$) – ($f^{/}$) были использованы равенства (∗), а при определении моментов сил $\vec{R}_A$ и $\vec{F}_1$ в уравнении ($c^{/}$) и момента силы $\vec{F}_4$ в уравнении ($f^{/}$) была применена теорема Вариньона о моменте равнодействующей.

<u>5. Определение искомых величин и исследование полученных результатов.</u>

В шести уравнениях ($a^{/}$) – ($f^{/}$) шесть неизвестных величин: пять реакций $\vec{R}_A, \vec{X}_C, \vec{У}_C, \vec{X}_E, \vec{У}_E$ и реактивный момент M_E. То есть, число неизвестных величин совпадает с числом уравнений равновесия. Следовательно, все неизвестные величины могут быть найдены из уравнений равновесия. Такие системы сил называются статически определимыми.

Поделим уравнение ($c^{/}$) на величину $a \cdot \cos30^0$ и получим:

$$3 R_A - 2 F_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad R_A = 2 \cdot F_1 / 3 = 2 \cdot 2 / 3 = 1,33 \text{ (кН)}$$

Из уравнения ($a^{/}$) определим:

$$X_C = \cos30^0 \cdot (F_1 - R_A) = 0,87 \cdot (2 - 1,33) = 0,87 \cdot 0,67 = 0,58 \text{ (кН)}$$

Из уравнения ($b^{/}$) найдем:

$$У_C = -\cos60^0 \cdot (R_A + F_1) = -0,5 \cdot (1,33 + 2) = 0,5 \cdot 3,33 = 1,66 \text{ (кН)}.$$

Модуль реакции $\vec{X}_E$ вычислим из уравнения ($d^{/}$):

$$X_E = X_C + F_4 \cdot \cos30^0 + Q = 0,58 + 5 \cdot 0,87 + 4 = 4,58 + 4,35 = 8,93 \text{ (кН)}.$$

Модуль реакции $\vec{У}_E$ определим из уравнения ($e^{/}$):

$$У_E = У_C + F_4 \cdot \cos60^0 = 1,66 + 5 \cdot 0,5 = 4,16 \text{ (кН)}.$$

Реактивный момент M_E найдем из уравнения ($f^{/}$):

$$M_E = a \cdot (-2 \cdot У_C + X_C + F_4 \cdot \cos30^0 + Q/2) - M = 2 \cdot (-2 \cdot 1,66 + 0,58 +$$

$$+5 \cdot 0,87 + 4/2) + 8 = 2 \cdot (-3,32 + 2,58 + 4,35) - 8 = 2 \cdot 3,61 - 8 =$$

$$= -0,78 \text{(кН)}.$$

6. Проверка полученных результатов.

Для проверки составим уравнение моментов для «замороженной» конструкции (рисунок 91). Так как в проверочное уравнение должны входить все или большее число искомых реакций, то выберем в качестве моментной точку С.

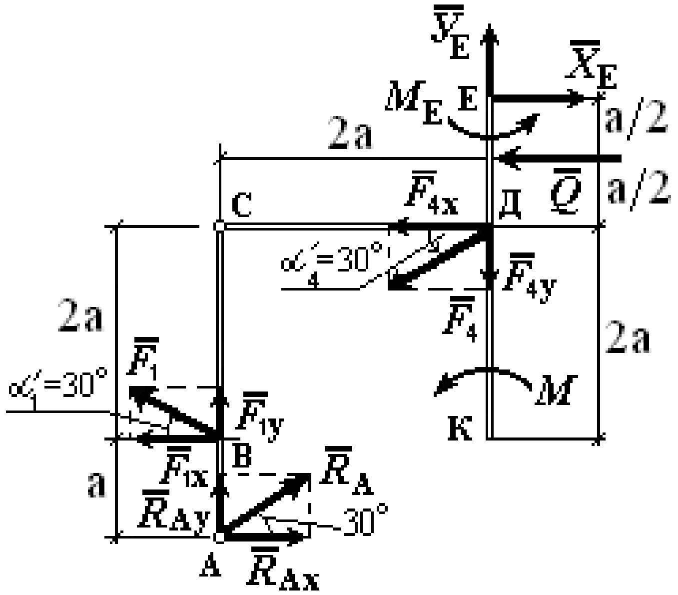


Рисунок 91

Уравнение моментов будет иметь вид:

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = R_A \cdot \cos 30^0 \cdot 3a - F_1 \cdot \cos 30^0 \cdot 2a - F_4 \cdot \cos 60^0 \cdot 2a + \qquad (**)$$

$$+ Q \cdot a/2 + M_E + M - X_E \cdot a + У_E \cdot 2a = 0.$$

Подставляя в это выражение значения известных и найденных величин, получим:

$$a \cdot (\cos 30^0 \cdot (3R_A - 2F_1) - F_4 + Q/2 - X_E + 2У_E) + M_E + M =$$

$$= 2 \cdot (0{,}87 \cdot (3 \cdot 1{,}33 - 2 \cdot 2) - 5 + 2 - 8{,}93 + 2 \cdot 4{,}16) - 0{,}78 + 8 =$$

$$2 \cdot (0{,}87 \cdot 0 - 11{,}93 + 8{,}32) + 4{,}48 = -7{,}22 + 7{,}22 \equiv 0.$$

Тождественное удовлетворение выражения (**) свидетельствует о правильности решения задачи.

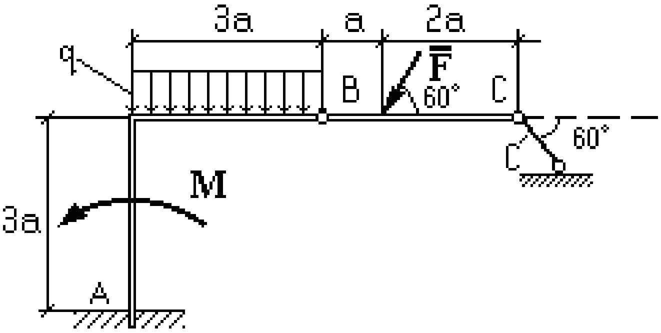
3.15 Образец контрольной работы по теме «Равновесие произвольной плоской системы сил» и пример ее выполнения

Контрольная работа по теме состоит из двух заданий:

1. Задание 1. Составить уравнения равновесия для определения реакций связей, наложенных на одно тело, или для определения реакций внешних связей, наложенных на систему тел;

2. Задание 2. Ответить на два теоретических вопроса из Приложения Б.

Таблица 26 – Образец варианта контрольной работы по теме «Равновесие произвольной плоской системы сил»

Задания варианта контрольной работы
Задание 1 Для определения реакций внешних связей составить уравнения равновесия системы сил, приложенной к составной конструкции, изображенной на рисунке 92.  **Рисунок 92**
Задание 2 1. Сформулировать теорему Вариньона для случая плоской системы сил. 2. Записать дополнительные формы аналитических условий равновесия произвольной плоской системы сил.

3.16 Выполнение заданий из образца контрольной работы по теме «Равновесие произвольной плоской системы сил»

Задание 1

При выполнении Задания 1 (таблица 26) необходимо придерживаться последовательности решения задач рассмотренных в предыдущих примерах.

1. Изображение конструкции в положении, соответствующем конкретным значениям данных о ее геометрических характеристиках.

В данной задаче нет необходимости выполнять данный пункт, так как все геометрические характеристики представлены на рисунке 92 в Задании 1.

2. Выбор тела (тел), равновесие которого должно быть рассмотрено (объект равновесия).

В Задании 1 (таблица 26) требуется составить уравнения равновесия для определения реакций только внешних связей, то есть не требуется определять давление во внутреннем шарнире B, поэтому применим метод замораживания.

3. Изображение сил, действующих на выбранный объект равновесия.

3.1. Изображение заданных сил.

Заданные нагрузки показаны на рисунке 92.

Наклонная сосредоточенная сила $\vec{F}$, которую разложим на две составляющие, параллельные координатным осям $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ (рисунок 93). Модули составляющих сил

$$F_{\text{x}} = F \cdot \cos 60^0; \qquad F_{\text{y}} = F \cdot \cos 30^0.$$

Пара сил с моментом M.

Равномерно распределенная нагрузка интенсивности q, которую заменим сосредоточенной силой $Q = q \cdot 3a$. Точка приложения силы Q находится в середине участка распределения (рисунок 93).

3.2. Изображение реакций связей.

Действие жесткой заделки в точке А (рисунок 93) заменяется двум реакциям $\vec{X}_A$ и $\vec{У}_A$, направленным по осям координат, и парой сил, с моментом $M_{\text{Е}}$ (реактивный момент).

Действие невесомого стержня $CC^{/}$ (рисунок 93) заменим реакцией $\vec{R}_C$, которая направлена вдоль стержня и которую разлагается на две составляющие $\vec{R}_{Cx}$ и $\vec{R}_{Cy}$, параллельные осям координат. Модули составляющих

$$R_{\text{Ax}} = R_{\text{A}} \cos 30^0;$$
$$R_{\text{ Ay}} = R_{\text{A}} \sin 30^0;$$

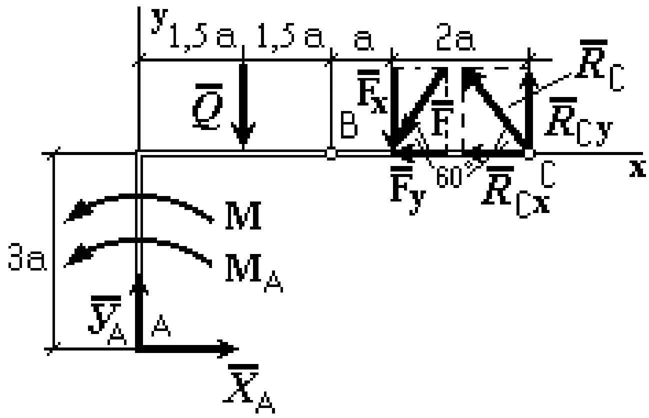


Рисунок 93

4. Составление уравнений равновесия.

К «замороженной» конструкции АВС приложена произвольная плоская система сил, для которой могут быть составлены три аналитических уравнения равновесия. В основной форме они имеют вид

$$\sum F_{\text{kX}} = 0, \qquad (a)$$
$$\sum F_{\text{kУ}} = 0, \qquad (b)$$
$$\sum M_{\text{A}} (\vec{F}_k) = 0. \qquad (c)$$

В качестве моментной точки при составлении уравнения (с) выбрана точка А (рисунок 93), так как в ней сходится наибольшее число неизвестных сил.

Уравнение (а) для сил, изображенных на рисунке 93, имеет вид:

$$\sum F_{\text{kX}} = X_{\text{A}} - F \cdot \cos 60^0 - R_{\text{C}} \cdot \cos 60^0 = 0. \qquad (a^{/})$$

Уравнение (b):

$$\sum F_{\text{kУ}} = У_{\text{A}} - Q - F \cdot \cos 30^0 - R_{\text{C}} \cdot \cos 30^0 = 0. \qquad (b^{/})$$

Уравнение (с)

$$\sum M_{\text{A}} (\vec{F}_k) = M_{\text{A}} + M - Q \cdot 1{,}5a + F \cdot \cos 60^0 \cdot 3a - F \cdot \cos 30^0 \cdot 4a + \qquad (c^{/})$$
$$+ R_{\text{C}} \cdot \cos 60^0 \cdot 3a + R_{\text{C}} \cdot \cos 30^0 \cdot 6a = 0.$$

В уравнениях (a$^/$) – (c$^/$) 4 неизвестные величины: силы $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{R}_C$ и момент M_A. Они не определяются из 3-х уравнений. Для получения 4-го уравнения рассмотрим часть *BC* конструкции рисунок 94.

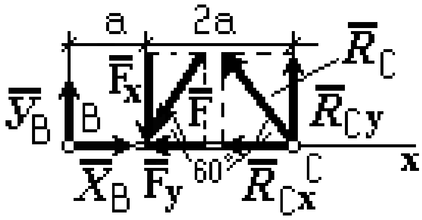


Рисунок 94

В качестве моментной точки примем точку В, что позволит исключить из рассмотрения неизвестные реакции $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$, значения которых определять не требуется.

$$\sum M_B(\vec{F}_k) = -F \cdot \cos 30^0 \cdot a + R_C \cdot \cos 30^0 \cdot 3a = 0. \qquad (d^/)$$

<u>5. Исследование полученных результатов.</u>

По условиям Задания не требуется определять реакции опор, поэтому не будем решать уравнения (a$^/$) – (d$^/$). Однако в случае необходимости неизвестные реакции определяются достаточно легко. Так реакцию $\vec{R}_C$ можно найти из уравнения (d$^/$). Далее из уравнений (a$^/$) - (c$^/$) можно определить $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$ и M_A.

<u>Задания 2</u>

Ответ на вопросы Задания 2 содержатся в Справочнике.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

При подготовке Методических указаний были использованы материалы следующих работ:

Цывильский В. Л. Теоретическая механика М., 2001г.
Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов / С.М.Тарг. - 15-е изд., стер. - М.: Высш. шк., 2005. - 415 с.

Яблонский А.А., В.М. Никифорова. Курс теоретической механики. Учеб. пособие для вузов: 13-е изд., исправ. - М.: Интеграл-Пресс, 2006. - 603с.

Крекнин А.И. Теоретическая механика Ч.3. Методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы обучения. Тюмень. 2006 год.

Курс теоретической механики: Учебник для вузов по направлению подгот. дипломир. специалистов в области техники и технологии/ [В.И.Дронг, В.В.Дубинин, М.М., Ильин и др.]; Под ред.К.С.Колесникова. -3-е изд., стер. М. : Изд- во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. -735 с.- (Механика в техническом университете: В 8 т.; Т.1).

Крекнин А.И. Методические указания по выполнению расчетно-графических работ по теоретической механике для студентов дневной формы обучения специальности. Ч.1. Статика. Тюмень, 2005.

Положение об организации внеаудиторной самостоятельной работы студентов ГОУ ВПО ТюмГАСУ, утвержденным ректором университета 28 января 2009 года.

Теоретическая механика. Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников машиностроительных, строительных и др. спец. М., 1989г.

Приложение А

Примерный перечень вопросов по теме «Сходящаяся система сил»

А) основные вопросы

1. Дать формулировку аксиомы связей.
2. Сформулировать аксиому параллелограмма.
3. Сформулировать аксиому о двух силах.
4. Сформулировать аксиому присоединения.
5. Сформулировать аксиому замораживания.
6. Сформулировать аксиому действия и противодействия.
7. Дать: определение связи, понятие о реакции связи и правило определения направления реакции связи.
8. Охарактеризовать связь - нерастяжимая нить.
9. Охарактеризовать связь - свободное опирание о гладкую поверхность.
10. Охарактеризовать связь - подвижный шарнир.
11. Охарактеризовать связь – неподвижный цилиндрического шарнира.
12. Охарактеризовать связь - сферической шарнир.
13. Охарактеризовать связь - невесомый стержнь.
14. Сформулировать теорему о трех силах.
15. Дать определение абсолютно твердого тела.
16. Дать определения свободного и несвободного тела.
17. Перечислить параметры, определяющие действие силы на твердое тело.
18. Сформулировать определения сосредоточенной силы и распределенной нагрузки.
19. Охарактеризовать основные виды распределенной нагрузки.
20. Дать определения равнодействующей и уравновешивающей силам.
21. Дать определение сходящейся системы сил и назвать ее виды.
22. Дать понятие главного вектора системы сил.
23. Дать понятие проекции силы на ось.
24. Дать понятие проекции силы на плоскость.
25. Записать виды аналитических условий равновесия сходящейся системы сил.
26. Сформулировать геометрические условия равновесия сходящейся системы сил.

Б) дополнительные вопросы

27. Дать определение статики.
28. Сформулировать определение силы.
29. Дать представление о размерности силы.
30. Дать определения внешних и внутренних сил.
31. Дать характеристику основным системам сил.
32. Сформулировать задачи статики.
33. Изложить правило сложения 2-х сил.
34. Изложить правило сложения 3-х сил, не лежащих в одной плоскости.
35. Изложить правило сложения системы сил.
36. Дать правило разложения силы по двум заданным направлениям.
37. Дать правило разложения силы по трем заданным направлениям.
38. Изложить аналитический способ задания сил.
39. Изложить аналитический способ сложения пространственной системы сил.
40. Изложить аналитический способ сложения плоской системы сил.

Приложение Б

Перечень вопросов по теме «Произвольная плоская система сил»

А) Основные вопросы

1. Дать представление о видах момента силы.
2. Дать понятие алгебраического момента силы относительно центра.
3. Дать представление о разновидностях теоремы Вариньона.
4. Охарактеризовать теорему Вариньона для плоской системы сил.
5. Дать понятие пары сил.
6. Сформулировать свойства пары сил.
7. Дать представление о видах моментов пары сил.
8. Дать понятие алгебраического момента пары сил.
9. Дать понятие главного момента системы сил.
10. Сформулировать теорему о приведении плоской системы сил.
11. Дать геометрические условия равновесия произвольной плоской системы сил
12. Записать основную форму аналитических условий равновесия произвольной плоской системы сил.
13. Записать вторую (дополнительную) форму аналитических условий равновесия произвольной плоской системы сил.
14. Записать третью (дополнительную) форму аналитических условий равновесия произвольной плоской системы сил.
15. Охарактеризовать аналитические условий равновесия плоской системы параллельных сил.
16. Изложить суть метода замораживания.
17. Изложить суть метода разбиения.
18. Охарактеризовать равновесие при наличии трения скольжения.
19. Охарактеризовать трение качения.

Б) дополнительные вопросы

20. Охарактеризовать случаи равенства нулю алгебраического момента силы.
21. Дать случаи приведения системы сил относительно центра.
22. Дать определение центра тяжести.
23. Охарактеризовать понятие однородного тела.
24. Дать формулы для определения координат центра тяжести объема V.
25. Дать формулы для определения координат центра тяжести площади S.
26. Дать формулы для определения координат центра тяжести линии L.
27. Охарактеризовать способ симметрии.
28. Охарактеризовать способ разбиения.
29. Охарактеризовать способ дополнения.
30. Охарактеризовать способ интегрирования.
31. Охарактеризовать экспериментальные способы.
32. Дать формулы для определения координат центров тяжести некоторых однородных тел (дуги окружности, площади треугольника, кругового сектора, объема пирамиды).
33. Дать определение силы трения скольжения.
34. Сформулировать законы трения скольжения.
35. Охарактеризовать реакцию шероховатой связи.

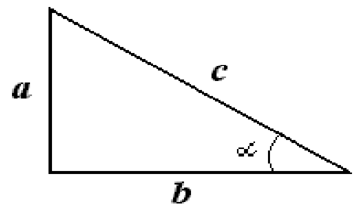
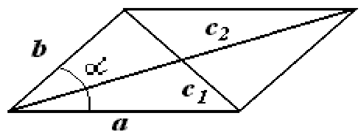
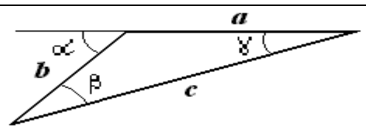
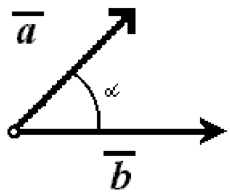
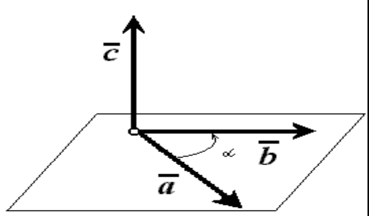
Приложение В

Примерный перечень вопросов по теме «Произвольная пространственная система сил система сил»

1. Дать понятие векторного момента силы относительно центра.
2. Дать понятие момента силы относительно оси.
3. Раскрыть случаи равенства нулю момента силы относительно оси.
4. Сформулировать основную теорему статики (теорему Пуансо).
5. Дать понятие главного момента системы сил относительно неподвижного центра.
6. Изложить геометрический способ нахождения главного момента системы сил относительно неподвижного центра.
7. Изложить аналитический способ нахождения главного момента системы сил относительно неподвижного центра.
8. Изложить геометрические условия равновесия произвольной пространственной системы сил.
9. Изложить аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил.
10. Изложить аналитические условия равновесия пространственной системы сил параллельных сил.

Приложение Г

Таблица 4.1 – Некоторые сведения из элементарной математики

№ п\п	Наименование, формулы	Рисунок
1	*Выражение тригонометрических функций через стороны прямоугольного треугольника* $\sin\alpha = a / c$, $\cos\alpha = b / c$, $\mathrm{tg}\,\alpha = a / b$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.	
2	*Некоторые значения тригонометрических функций* $\sin 0^0 = \cos 90^0 = 0$; $\sin 90^0 = \cos 0^0 = 1$; $\sin 30^0 = \cos 60^0 = 0{,}5$; $\sin 60^0 = \cos 30^0 = \sqrt{3}/2 = 0{,}866$; $\sin 45^0 = \cos 45^0 = \sqrt{2} / 2 = 0{,}714$; $\mathrm{tg}\,30^0 = \mathrm{ctg}\,60^0 = \sqrt{3}/3 = 0{,}577$; $\mathrm{tg}\,60^0 = \mathrm{ctg}\,30^0 = \sqrt{3} = 1{,}732$; $\mathrm{tg}\,45^0 = \mathrm{ctg}\,45^0 = 1$.	
3	*Теорема косинусов* $c_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha}$; $c_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha}$.	
5	*Теорема синусов* $a / \sin\beta = b / \sin\gamma = c / \sin\alpha$.	
6	*Скалярное произведение двух векторов* <u>Опр.</u> Скалярное произведение двух векторов – скалярная величина, определяемая по формуле: $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a \cdot b \cdot \cos\alpha = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$, где a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z – компоненты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.	
7	*Векторное произведение* <u>Опр.</u> Результатом векторного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и со стороны вектора $\vec{c}$ наименьший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору – $\vec{b}$ виден происходящим против хода часовой стрелки. Модуль векторного произведения $\lvert\vec{c}\rvert = \lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert = a \cdot b \cdot \sin\alpha$.	

Приложение Д
Образец титульного листа для РГР

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Образец

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА
ПО СТАТИКЕ
(КИНЕМАТИКЕ, ДИНАМИКЕ)

Вариант №_____

Выполнил студент группы №______________
____

Семестр Весенний 2009/2010 учебного года.

Принял ________________________________