МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра строительной механики

Крекнин А.И.

Бирюкова Н.И.

МЕХАНИКА
(ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. Ч. 2 КИНЕМАТИКА)

методические указания по выполнению контрольных работ

для студентов направления подготовки
270800 Строительство (квалификация (степень) «бакалавр»)
заочной формы обучения и заочной формы обучения в сокращенные сроки

Тюмень, 2010

УДК 531/534
К - 79

Крекнин А. И., Бирюкова Н.И. Механика. Теоретическая механика. Ч. 2. Кинематика: Методические указания по выполнению контрольных работ для студентов направления подготовки 270800 Строительство (квалификация (степень) «бакалавр») заочной формы обучения и заочной формы обучения в сокращенные сроки. – Тюмень: РИО ГОУ ВПО ТюмГАСУ, 2010. – 46 с.

Сборник разработан на основании федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению подготовки 270800 Строительство (квалификация (степень) «баклавр»), утвержденного приказом Минобрнауки России от 18 января 2010 г. № 54 и рабочих программ ГОУ ВПО ТюмГаСУ дисциплины «Теоретическая механика» для студентов направления подготовки 270800 Строительство (квалификация (степень) «бакалавр») заочной формы обучения и заочной формы обучения в сокращенные сроки. Сборник предлагает задания (задачи) для выполнения контрольных работ по дисциплине Механика (Теоретическая механика.Ч.2.Кинематика). Задачи сопровождаются методическими указаниями по их выполнению и примерами решения задач. Набор задач, представленных в сборнике, позволят обеспечить дифференцированный подход к студентам заочной формы обучения и заочной формы обучения в сокращенные сроки.

Рецензент: Нарута Т.А.

Тираж: 400 экз.
Заказ №

Редакционно-издательский центр ГОУ ВПО «Тюменский государственный архитектурно – строительный университет»

Содержание

1 ВЫБОР ВАРИАНТОВ, ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ

Студенты по кинематике выполняют контрольные задания (работы) из задач, состав которых определяется кафедрой в зависимости от специальности.

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица, содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рисунок Д1.4 – это рисунок 4 к задаче Д1 и т. д. Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице – по последней; например, если шифр оканчивается числом 46, то берутся рисунок 4 и условие № 6 из таблицы.

Каждое задание выполняется в отдельной тетради (ученической), страницы которой нумеруются. На обложке указывается: название дисциплины, номер работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, факультет, специальность и адрес. На первой странице тетради записывается: номер работы, номера решаемых задач и год издания контрольных заданий.

Решение каждой задачи обязательно начинать на развороте тетради (на четной странице, начиная со второй, иначе работу трудно проверять). Сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано, и что требуется определить (текст задачи не переписывается). *Чертеж выполняется с учетом условия решаемого варианта задачи*; на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение должны соответствовать этим условиям. В результате в целом ряде задач чертеж получается более простым, чем общий.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др. Показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы получаемых величин *нужно обязательно*. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы и теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) и *подробно излагать весь ход расчетов*. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращены для переделки.

К работе, высылаемой на повторную проверку (если она выполнена в другой тетради), должна обязательно прилагаться незачтенная работа.

На экзамене (зачете) необходимо представить зачтенные по данному разделу курса работы, в которых все отмеченные рецензентом погрешности должны быть исправлены.

При чтении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштабов. На рисунках к задачам К1 – К4 все линии, параллельные строкам, считаются горизонтальными, а перпендикулярные строкам – вертикальными и это в тексте специально не оговаривается. Также без оговорок считается, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят, катки и колеса катятся по плоскости без скольжения. Все связи, если не сделано других оговорок, считаются идеальными.

Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задач и в таблице P_1, l_1, r_1 и т. п. означают вес или размеры тела 1; P_2, l_2, r_2 – тела 2 и т. д. Аналогично, V_{B}, a_{B} – означает скорость и ускорение точки *B*; V_{C}, a_{C} – точки *C*; ω_1 ε_1 – угловую скорость и угловое ускорение тела 1; ω_2, ε_2 – тела 2 и т. д. В каждой задаче подобные обозначения могут также специально не оговариваться.

Следует также иметь в виду, что некоторые из заданных в условиях задачи величин (размеров) при решении каких-нибудь вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов задачи.

Из всех пояснений в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся к *вашему варианту*, т. е. номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Методические указания по решению задач, входящих в контрольные задания, даются для каждой задачи после ее текста под рубрикой «Указания», затем дается пример решения аналогичной задачи. Цель примера – разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. *Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями*; в конце должны быть даны ответы.

2 ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНЫХ ВОПРОСОВ ПО КИНЕМАТИКЕ

1. Сформулировать основную задачу кинематики.
2. Дать понятие системы отсчета, используемое в кинематике.
3. Дать понятие пространства, которое используется в кинематике.
4. Охарактеризовать время (изложить свойство и характеристики), которое используется в кинематике.
5. Раскрыть векторный способ задания движения точки.
6. Раскрыть координатный способ задания движения точки.
7. Раскрыть естественный способ задания движения точки.
8. Изложить способ определения скорости точки при векторном способе задания ее движения.
9. Изложить способ определения ускорения точки при векторном способе задания ее движения.
10. Изложить способ определения скорости точки при координатном способе задания ее движения.
11. Изложить способ определения ускорения точки при координатном способе задания ее движения.
12. Дать понятие об осях естественного трехгранника.
13. Изложить способ определения скорости точки при естественном способе задания ее движения.
14. Изложить способ определения ускорения точки при естественном способе задания ее движения.
15. Охарактеризовать прямолинейное движение точки и раскрыть физический смысл нормального ускорения.
16. Охарактеризовать равномерное криволинейное движение точки и раскрыть физический смысл касательного ускорения.
17. Охарактеризовать равномерное прямолинейное движение точки.
18. Охарактеризовать равнопеременное криволинейное движение точки.
19. Охарактеризовать ускоренное и замедленное движение точки.
20. Охарактеризовать гармонические колебания точки.
21. Дать понятие сложного, относительного, переносного и абсолютного движения точки.
22. Изложить теорему о сложении скоростей.
23. Изложить теорему о сложении ускорений (теорему Кориолиса).
24. Сформулировать правила определения модуля и направления Кориолисова ускорения.

25. Изложить метод определения модуля и направления абсолютного ускорения точки.
26. Перечислить виды движения твердого тела.
27. Сформулировать основные задачи кинематики твердого тела.
28. Дать определение поступательного движения твердого тела.
29. Изложить методы определения кинематических характеристик твердого тела и его точек при поступательном движении тела.
30. Дать определение и записать закон вращательного движения твердого тела.
31. Дать понятие угловой скорости вращающегося тела.
32. Дать понятие углового ускорения вращающегося тела.
33. Охарактеризовать равномерное вращение тела.
34. Охарактеризовать равнопеременное вращение тела.
35. Изложить способ определения скорости точки вращающегося тела.
36. Изложить способ определения ускорения точки вращающегося тела.
37. Дать определения плоскопараллельного (плоского) движения твердого тела и плоской фигуры.
38. Дать уравнения плоскопараллельного (плоского) движения твердого тела.
39. Охарактеризовать разложение плоского движения тела на простейшие.
40. Охарактеризовать кинематические характеристики плоского движения тела.
41. Перечислить способы нахождения скорости точки плоской фигуры.
42. Изложить способ определения скоростей точек плоской фигуры с помощью полюса.
43. Изложить способ определения скоростей точек плоской фигуры с применением теоремы о проекциях скоростей 2 - х точек.
44. Дать определение мгновенному центру скоростей.
45. Изложить способ определения скоростей точек плоской фигуры с применением м.ц.с.
46. Изложить общий и частные случай построения м.ц.с.
47. Дать представление о векторе скорости точки вращающегося тела как о векторном произведении.
48. Изложить способ определения ускорений точек плоской фигуры через геометрическую сумму (с применением полюса).
49. Дать определение сферического движения твердого тела.
50. Записать уравнения сферического движения твердого тела.
51. Дать определение движения свободного твердого тела.
52. Записать уравнения свободного движения твердого тела.

3 ЗАДАЧИ, МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО КИНЕМАТИКЕ

3.1 Задача К1а

Кинематический анализ движения точки

(координатный способ задания движения)

Точка *M* движется в плоскости *xy* (таблица 1; траектория точки на рисунках показана условно). Даны уравнения движения точки $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, где x, y выражены в сантиметрах, t – в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1$ с определить скорость, ускорение и радиус кривизны траектории.

Зависимость $x = f_1(t)$ указана непосредственно на рисунках, а зависимость $y = f_2(t)$ дана в таблице 2 (для рисунков 0 – 2 в столбце 2, для рисунков 3 – 6 в столбце 3, для рисунков 7 – 9 в столбце 4).

Указание. Задача К1а относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки).

В данной задаче все искомые величины нужно определить для момента времени $t_1 = 1$ с. В некоторых вариантах задачи при определении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть известные из тригонометрии формулы: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$; $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

Таблица 1– Рисунки к вариантам задачи К1а

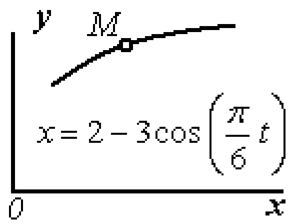
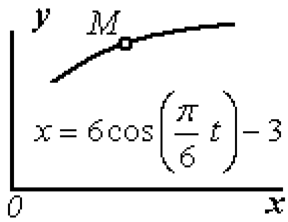
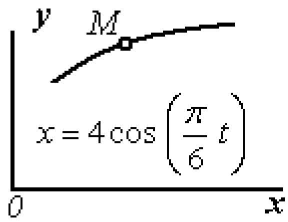
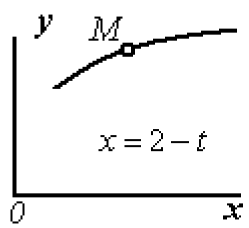
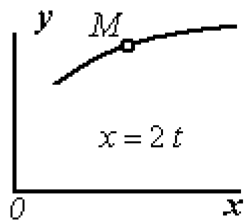
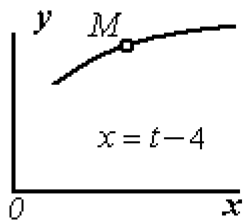
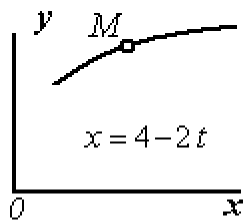
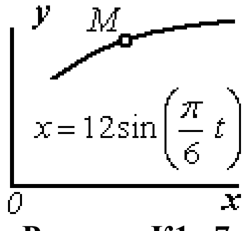
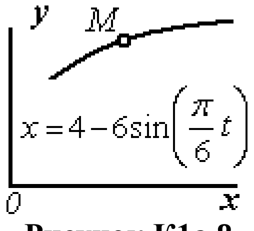
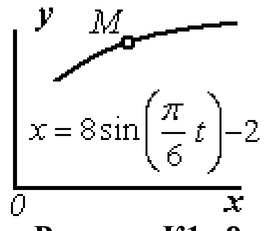
 $x = 2 - 3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ **Рисунок К1а.0**	 $x = 6\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 3$ **Рисунок К1а.1**	 $x = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ **Рисунок К1а.2**	
 $x = 2 - t$ **Рисунок К1а.3**	 $x = 2t$ **Рисунок К1а.4**	 $x = t - 4$ **Рисунок К1а.5**	 $x = 4 - 2t$ **Рисунок К1а.6**
 $x = 12\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ **Рисунок К1а.7**	 $x = 4 - 6\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ **Рисунок К1а.8**	 $x = 8\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 2$ **Рисунок К1а.9**	

Таблица 2 – Условия к задаче К1а.

Номер условия	Уравнение движения точки $y = f_2(t)$		
	Рисунки 0 – 2	Рисунки 3 – 6	Рисунки 7 – 9
1	2	3	4
0	$12\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^2+2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)-2$
1	$-4-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$3-2t^3$	$14-16\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
2	$-3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(2+t)^2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
3	$9\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)-4$	$2t^3$	$-10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
4	$3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)-2$	$(5+2t)^2$	$-4\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
5	$-10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2-3t^2$	$8-12\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
6	$2-6\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$1-3t^2$	$3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
7	$2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)-2$	$(t+1)^3$	$6-8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
8	$9\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)+5$	$2-t^3$	$9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)-3$
9	$3-8\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3t^2+1$	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

3.2 Пример выполнения задачи К1а

Точка *M* движется в плоскости *xy*. Даны уравнения движения точки

$$x = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right), \qquad \text{(a)}$$

$$y = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 4, \qquad \text{(b)}$$

где x, y выражены в сантиметрах, t – в секундах.

Определить уравнение траектории точки, для момента времени $t_1 = 1c$ найти положение точки на траектории, скорость, ускорение, радиус кривизны траектории и установить вид движения точки.

Решение.

1. Определим вид траектории.

Движение точки M заданы координатным способом (уравнения (а) и (b)).

Так как время t входит в аргумент тригонометрических функций синуса и косинуса в этих уравнениях, то используя формулу $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, можно его исключить. Преобразуя уравнения, возводя обе их части в квадрат и складывая, получим

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{4-y}{3}\right)^2 = \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\ t\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\ t\right)\right)^2 = 1.$$

Это уравнение эллипса, то есть, траекторией движения точки M является эллипс (рисунок 1). Так как при различных значениях t x пробегает все значения интервала [– 2, 2], а y – все значения интервала [1, 7], то весь эллипс является траекторией точки (рисунок 1).

Центр эллипса имеет координаты: $x_C = 0$, $y_C = 4$. Полуоси эллипса $a = 2$ см, $b = 3$ см.

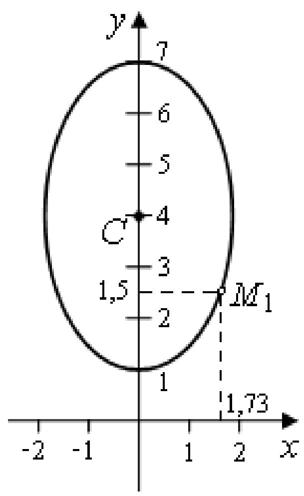


Рисунок 1

2. Определим положение точки на траектории.

Подставляя время $t_1 = 1c$ в уравнения (а) и (b), получим:

$$x_1 = 2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot 1}{3}\right) = 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = 1{,}73\ \ \textit{см.}$$

$$y_1 = -3\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot 1}{3}\right) + 4 = -3\cdot\cos in\left(\frac{\pi}{3}\right) + 4 = 2{,}5\ \ \textit{см.}$$

Точку с координатами x_1, y_1 обозначим на траектории M_1 (рисунок 1).

3. Определим скорость точки.

Скорость $\bar{V}$ точки M определяем через ее проекции V_x, V_y.

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)\right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) \cdot \frac{\pi}{3};$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 4\right) = 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) \cdot \frac{\pi}{3}.$$

Тогда модуль скорости определится по формуле $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$.

При $t_1 = 1$ c

$$V_{x1} = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = 1{,}05 \quad {}^{см}\!/_{c};$$

$$V_{y1} = 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{\pi}{3} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = 2{,}72 \quad {}^{см}\!/_{c}.$$

Величина скорости

$$V_1 = \sqrt{(1{,}05)^2 + (2{,}72)^2} = 2{,}92 \quad {}^{см}\!/_{c}.$$

Построим вектор скорости $\vec{V}_1$ в точке M_1 (рисунок 2).

$$\vec{V}_1 = V_{1x}\vec{i} + V_{1y}\vec{j} = \vec{V}_{1x} + \vec{V}_{1y} = 1{,}05\vec{i} + 2{,}72\vec{j},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$ − орты декартовой системы координат (рисунок 2).

В точке M_1 параллельно осям x, y в выбранном масштабе, отложим (рисунок 2).

$$\vec{V}_{1x} = 1{,}05\vec{i} \quad \text{и} \quad \vec{V}_{1y} = 2{,}72\vec{j}.$$

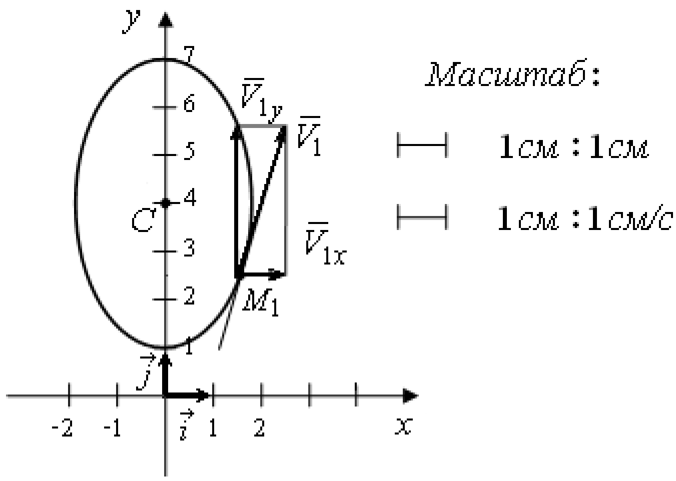


Рисунок 2

Вектор $\vec{V}_1$ − диагональ прямоугольника, по сторонам которого направлены векторы $\vec{V}_{1x} = 1{,}05\vec{i}$ и $\vec{V}_{1y} = 2{,}72\vec{j}$.

Верность построения вектора скорости $\vec{V}_1$ проверяется проведением касательной к эллипсу в точке M_1, вдоль которой он должен быть направлен.

4. Определим ускорение точки.

Вектор ускорения $\vec{a}$ точки M_1 находим аналогично, т.е. через его проекции на оси координат a_x и a_y.

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)\cdot\frac{\pi}{3}\right) = -2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^2;$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d}{dt}\left(3\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)\cdot\frac{\pi}{3}\right) = 3\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^2.$$

Тогда модуль ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

В момент времени $t_1 = 1$ c

$$a_{x1} = -2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 = -1{,}9 \quad см/c^2;$$

$$a_{y1} = 3\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 = 1{,}64 \quad см/c^2.$$

Величина ускорения

$$a_1 = \sqrt{(-1{,}9)^2 + (1{,}64)^2} = 2{,}51 \quad см/c^2.$$

Построим вектор ускорения $\vec{a}_1$ в точке M_1 (рисунок 3).

$$\vec{a}_1 = a_{1x}\vec{i} + a_{1y}\vec{j} = \vec{a}_{1x} + \vec{a}_{1y} = -1{,}9\vec{i} + 1{,}64\vec{j},$$

где $\vec{i}, \vec{j}$ − орты декартовой системы координат (рисунок 3).

В точке M_1 параллельно осям x, y в выбранном масштабе, отложим (рисунок 3)

$$\vec{a}_{1x} = -1{,}9\vec{i} \quad и \quad \vec{a}_{1y} = 1{,}64\vec{j}.$$

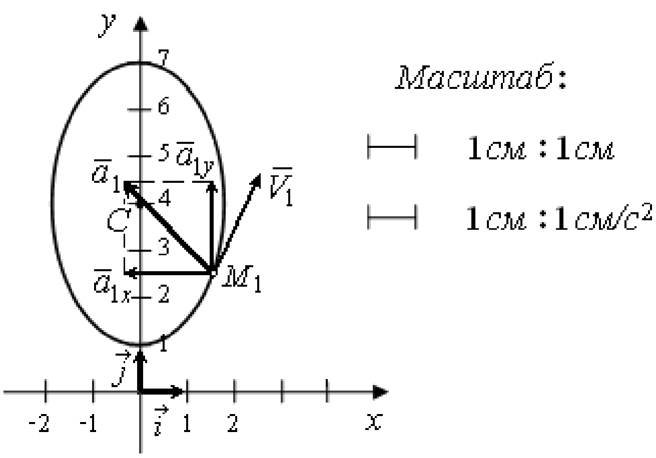


Рисунок 3

Вектор $\vec{a}_1$ – диагональ прямоугольника, сторонами которого являются векторы

$$\vec{a}_{1x} = a_{1x}\vec{i} \quad \text{и} \quad \vec{a}_{1y} = a_{1y}\vec{j}.$$

Верность построения вектора ускорения $\vec{a}_1$ проверяется его направленностью в сторону вогнутости траектории.

Найденные векторы скорости и ускорения точки позволяют сделать вывод: точка M совершает в данный момент t_1 *криволинейное ускоренное движение*, т.к. угол между векторами $\vec{V}_1$ и $\vec{a}_1$ острый.

5. Определим радиус кривизны траектории при $t_1 = 1$ с.

Найдем производную

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d(\sqrt{V_x^2 + V_y^2})}{dt} = \frac{2V_x a_x + 2V_y a_y}{2\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}.$$

При $t_1 = 1$ с.

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t_1=1} = \frac{V_{x1}a_{x1} + V_{y1}a_{y1}}{V_1} = \frac{1{,}05\cdot(-1{,}9) + 2{,}72\cdot 1{,}64}{2{,}92} = \frac{-1{,}995 + 4{,}4008}{2{,}92} = 0{,}84.$$

Так как

$$a_\tau = \frac{dV}{dt},$$

то $a_{\tau 1} = 0{,}84$ *см/с*^{2}.

Модуль полного ускорения точки при $t_1 = 1$с.

$$a_1 = \sqrt{a_{\tau 1}^2 + a_{n1}^2},$$

Откуда

$$a_{n1} = \sqrt{a_1^2 - a_{\tau 1}^2} = \sqrt{(2{,}51)^2 - (0{,}84)^2} = \sqrt{6{,}3 - 0{,}71} = 2{,}36 \quad см/с^2.$$

Из формулы для нормального ускорения $t_1 = 1$с

$$a_{n1} = \frac{V_1^2}{\rho_1}$$

имеем,

$$\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_{n1}} = \frac{(2{,}92)^2}{2{,}36} = 3{,}61 \quad см.$$

3.3 Задача К1б

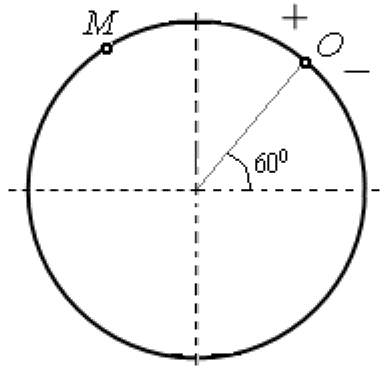
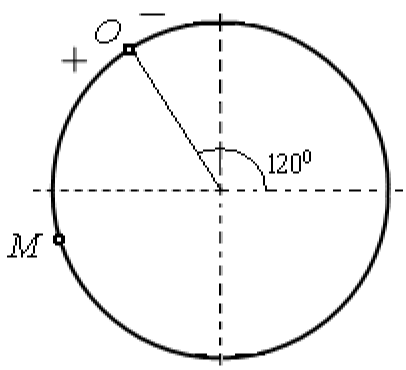
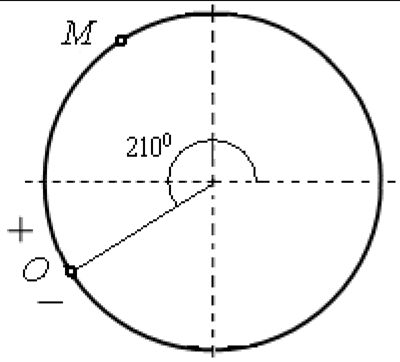
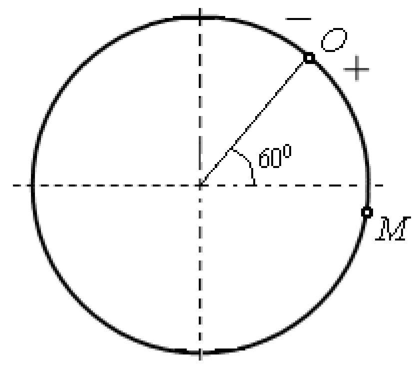
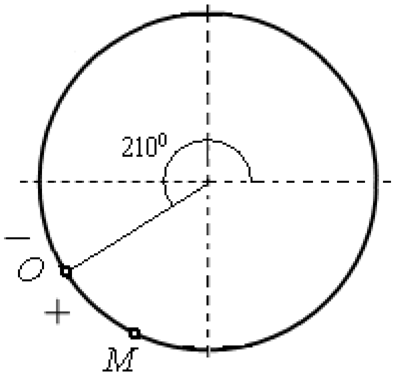
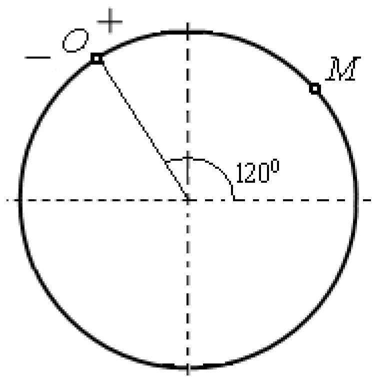
Кинематический анализ движения точки

(естественный способ задания движения)

Точка *M* движется по окружности (таблица 3, рисунки К1б.0 – К1б.9) радиуса $R = 2м$ по закону $s = f(t)$, заданному в таблице 4 (s – в метрах, t – в секундах). Отсчет дуговой координаты s начинать с точки *O*. Считать, что при $s > 0$ при движении точки от положения *O* к положению *M*.

В момент времени $t_1 = 1c$ определить положение точки на окружности, скорость, ускорение, установить вид движения и изобразить векторы $\vec{V}_1, \vec{a}_1^{\,n}, \vec{a}_1^{\,\tau}$ и $\vec{a}_1$ на рисунке.

Таблица 3 – Рисунки к задаче К1б

 **Рисунок К1б.0**	 **Рисунок К1б.1**
 **Рисунок К1б.2**	 **Рисунок К1б.3**
 **Рисунок К1б.4**	 **Рисунок К1б.5**

Продолжение таблицы 3

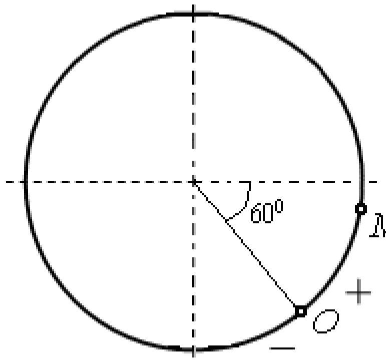
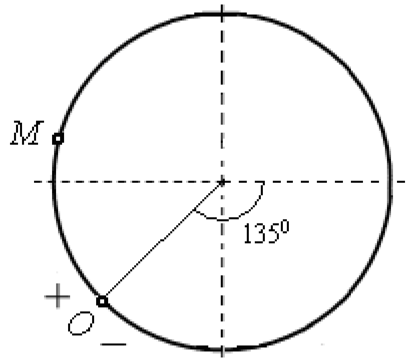
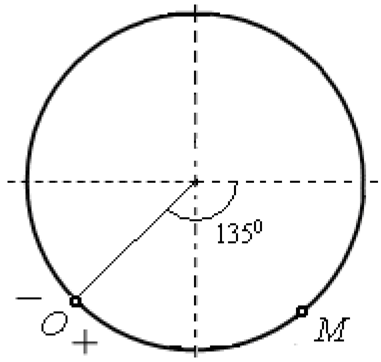
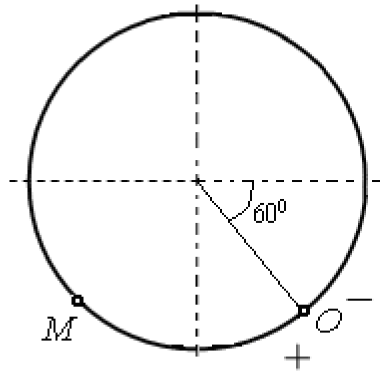
 **Рисунок К1б.6**	 **Рисунок К1б.7**
 **Рисунок К1б.8**	 **Рисунок К1б.9**

Таблица 4 – Данные к задаче К2б

Последняя цифра шифра	$s = f(t)$	Последняя цифра шифра	$s = f(t)$
0	$\frac{\pi}{4}R\cdot\ t^4-3t^2$	5	$\frac{\pi}{6}R\cdot(4t^2-t)$
1	$\frac{\pi}{6}R\cdot(3t-t^2)$	6	$\frac{3\pi}{4}R\cdot(t^3-2t^2)$
2	$\frac{\pi}{2}R\cdot(t^3-2t^2)$	7	$\frac{\pi}{8}R\cdot(t^4-3t^2)$
3	$\frac{\pi}{2}R\cdot(4t^2-2t^3)$	8	$\frac{\pi}{3}R\cdot(3t^2-t)$
4	$\frac{\pi}{3}R\cdot(t^3-2t)$	9	$\frac{\pi}{4}R\cdot(2t^2+1)$

Указание. Задача К1б относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки при естественном способе задания ее движения.

Для определения положения точки на окружности в момент времени t_1 необходимо воспользоваться известным из геометрии соотношением между дугой окружности, радиусом дуги и углом, на который опирается дуга, $\alpha_1 = \frac{s(t_1)}{R}$.

При этом необходимо учитывать знак полученного угла: «плюс» – угол откладывается в сторону положительного отсчета s, «минус» – в сторону отрицательного отсчета s.

3.4 Пример выполнения задачи К1б

Точка движется по окружности радиуса R = 2*м* по закону $s=-2\pi\sin\left(\dfrac{\pi}{6}t\right)$ *м.* Движение точки начинается из положения O, изображенного на рисунке 4.

В момент времени t_1 = 1*с* определить положение точки на траектории, ее скорость, ускорение, установить вид ее движения. Изобразить векторы $\vec{V}_1, \vec{a}_{1n}, \vec{a}_{1\tau}$ и $\vec{a}_1$ на рисунке.

Решение.

1. Определим положение точки на траектории при t_1 = 1*с*.

По формуле $\alpha_1=-\dfrac{s(t_1)}{R}=-\dfrac{2\pi\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\cdot 1\right)}{2}=-\pi\cdot\dfrac{1}{2}=-90^0$ находим угол, определяющий положение точки на траектории (рисунок 4).

Угол α_1 = 90^0 < 0, поэтому отложим его сторону отрицательного отсчета дуговой координаты s. В результате на траектории получим точку M_1 (рисунок 4).

В точке M_1 проведем к траектории касательную и нормаль (вектор нормали всегда направлен в сторону вогнутости траектории).

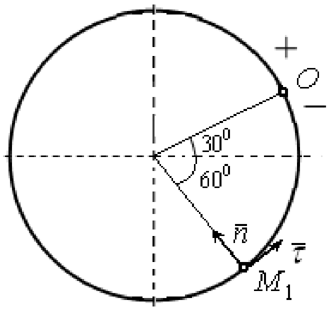


Рисунок 4

2. Определим скорость точки M_1 при t_1 = 1*с*.

Величину скорости точки найдем по формуле:

$$V=\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}\left(2\pi\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right)=-2\pi\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\cdot\frac{\pi}{6}=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\pi^2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

При t_1 = 1*с*.

$$V_1=-\frac{1}{3}\cdot\pi^2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)=-\frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\approx-2{,}8\ \ ^{м}\!/_{с}.$$

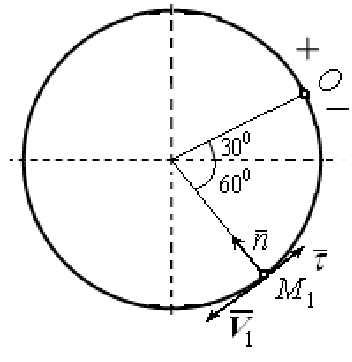


Рисунок 5

Так как $V_1 < 0$, то вектор скорости $\vec{V}_1$ направлен вдоль касательной в сторону отрицательного отсчета дуговой координаты s (рисунок 5).

3. Найдем касательное ускорение точки M.

$$a_\tau = \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{d}{dt}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right) = \frac{\pi^3}{18} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

При $t_1 = 1c$.

$$a_{\tau 1} = \frac{\pi^3}{36} = 0{,}86 \quad м/c^2 > 0.$$

Так как $a_{\tau 1} > 0$, то вектор $\vec{a}_{\tau 1}$ направлен вдоль касательной противоположно вектору скорости $\vec{V}_1$ (рисунок 6).

Вектор касательного ускорения не совпадает по направлению с вектором скорости, поэтому движение точки в данный момент времени замедленное.

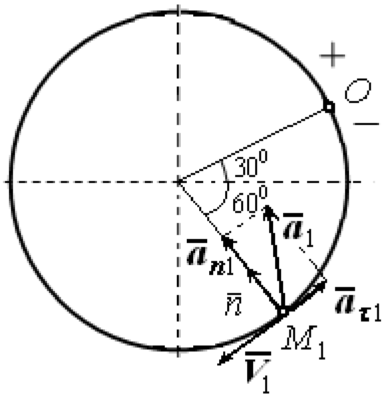


Рисунок 6

4. Найдем нормальное ускорение точки.

Модуль вектора $\vec{a}_n$ определяется по формуле $a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$.

Радиус кривизны окружности ρ в каждой точке равен радиусу окружности $R = 2$ *м*.

При $t_1 = 1c$ $\qquad a_{1n} = \dfrac{V_1^2}{\rho} = \dfrac{2{,}8^2}{2} = 3{,}92 \quad м/c^2.$

Вектор $\vec{a}_{1n}$ будет направлен от точки M_1 вдоль нормали в сторону вогнутости траектории (рисунок 6).

5. Определим полное ускорение точки.

Вектор полного ускорения $\vec{a}$ равен геометрической (векторной) сумме векторов $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$ (рисунок 6), то есть $\quad \overline{a} = \overline{a}_n + \overline{a}_\tau$,

Модуль вектора полного ускорения $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

При $t_1 = 1c$

$$a_1 = \sqrt{(0{,}86)^2 + (3{,}92)^2} = 4{,}01 \approx 4 \quad м/c^2.$$

<u>Вывод:</u> точка M совершает криволинейное, в данный момент замедленное движение, т.к. вектор скорости $\vec{V}_1$ и касательное ускорение $\vec{a}_{1\tau}$ не совпадают по направлению.

3.5 Задача К2а

Кинематический анализ системы двух вращающихся тел

Механизм состоит из колес 2,3, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, и груза 1, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес (таблицы 5,6).

Зная

$x_1 = x(t)$ – уравнение движения груза 1 (таблица 6, рисунки К2а.0 ÷ К2а.4),

$\varphi_2 = \varphi(t)$ – уравнение движения ступенчатого колеса 2 (таблица 6, рисунки К2а.5 ÷ К2а.6),

$\varphi_3 = \varphi(t)$ – уравнение движения колеса 3 (таблица 6, рисунки К2а.7 ÷ К2а.9),

найти скорости, ускорения груза 1, точки М, расположенной на одном из колес, и угловые скорости, угловые ускорения колес 2,3 в момент времени t_1 = 1с.

Таблица 5 – Рисунки к вариантам задачи К2а

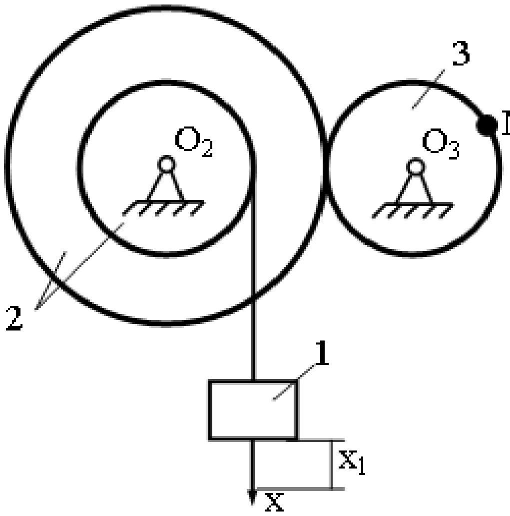


Рисунок К2а.0

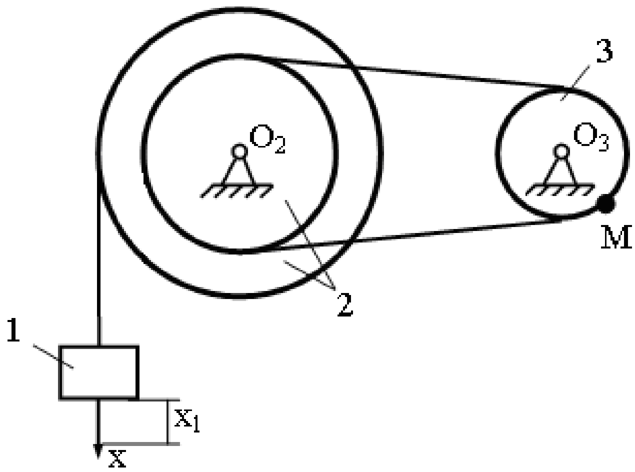


Рисунок К2а.1

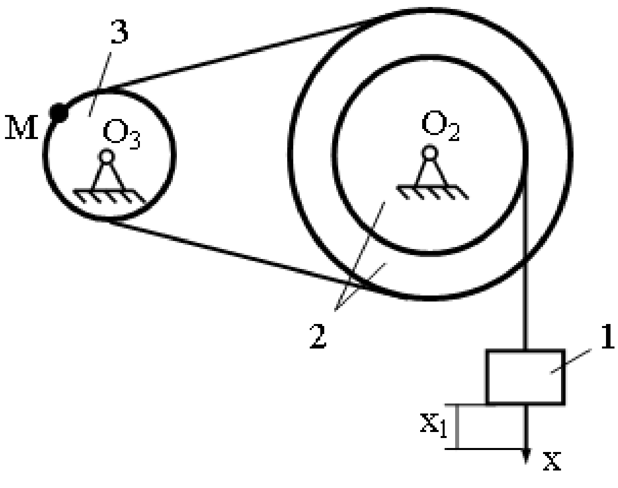


Рисунок К2а.2

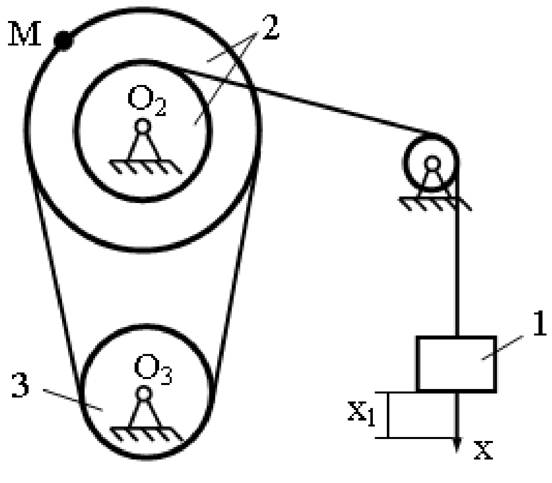


Рисунок К2а.3

Продолжение таблицы 5

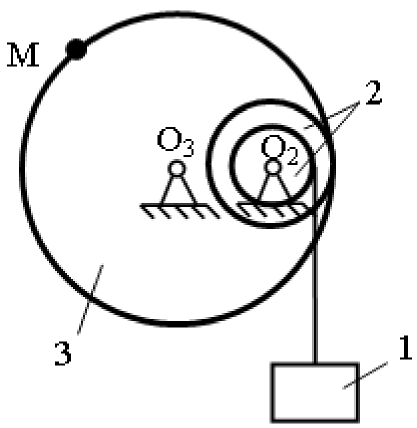


Рисунок К2а.4

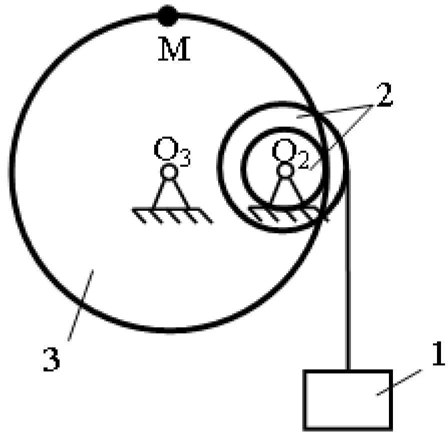


Рисунок К2а.5

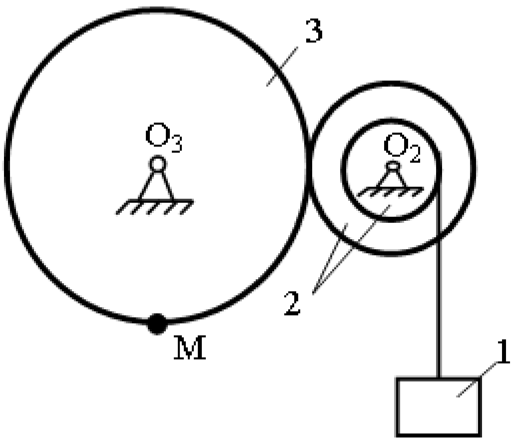


Рисунок К2а.6

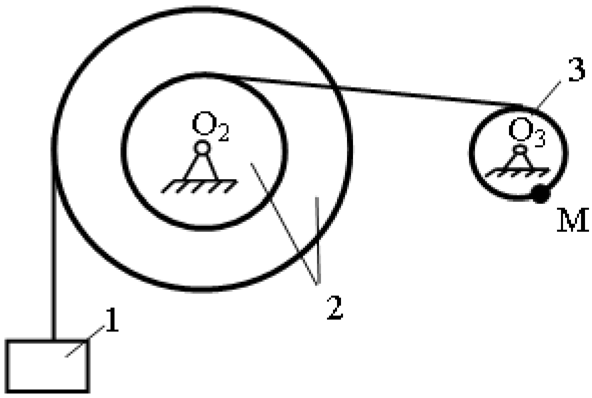


Рисунок К2а.7

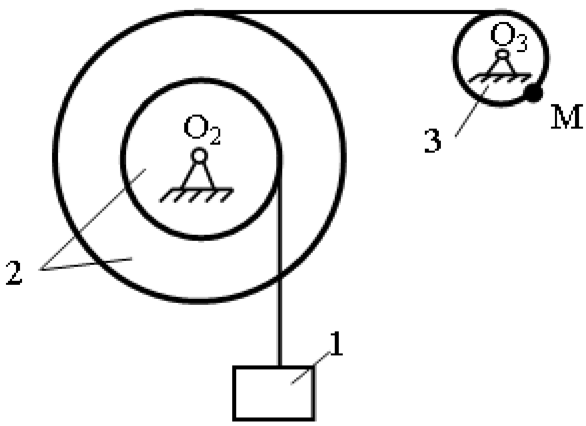


Рисунок К2а.8

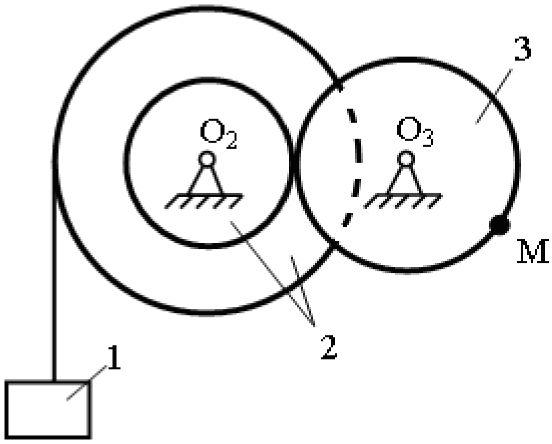


Рисунок К2а.9

Таблица 6 – Данные к задаче К2а

Последняя цифра шифра	Номера рисунков (определяются по предпоследней цифре шифра)					
	К2а.0 ÷ К2а.3 $x_1 = x(t)$, *см*	К2а.5, К2а.6 $\varphi_2 = \varphi(t)$, *рад*	К2а.5 ÷ К2а.6 $\varphi_3 = \varphi(t)$, *рад*	К2а.0 ÷ К2а.9		
				r_2, *см*	R_2, *см*	R_3, *см*
0	$25t^2 + 10t + 5$	$t^2 - t$	$2t^2 - 5t$	10	20	50
1	$50t^2 + 20t + 10$	$2t^2 - 5t$	$t^2 + t$	20	40	90
2	$75t^2 + 30t + 9$	$2t - t^3$	$3t - t^2$	15	30	70
3	$100t^2 + 40t + 6$	$0{,}5t^2 - 2t$	$t^3 - 5t$	20	25	60
4	$120t^2 + 60t + 8$	$t^3 - t$	$t^3 + t$	10	30	80
5	$20t^2 + 50t + 8$	$4t - t^2$	$0{,}5t^2$	15	20	50
6	$30t^2 + 90t + 10$	$t + 2t^2$	$4t - t^2$	10	25	60
7	$65t^2 + 80t + 7$	$1{,}5t^2 - 2t$	$2t - 2t^2$	10	40	90
8	$100t^2 + 70t + 5$	$2t^2 - t$	$-2t^2$	15	25	60
9	$80t^2 + 200t + 4$	$t^3 - t$	$3t - 0{,}5t^2$	20	30	70

3.6 Задача К2б
Кинематический анализ системы трех вращающихся тел

Механизм состоит из ступенчатых колес 1 – 3, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки 4 и груза 5, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес (таблицы 7,8). Радиусы ступеней колеса равны соответственно: колеса 1 – $r_1 = 2$*см*, $R_1 = 4$*см*, у колеса 2 – $r_2 = 6$ *см*, $R_2 = 8$ *см*, у колеса 3 – $r_3 = 12$ *см*, $R_3 = 12$ *см*. На ободьях колес расположены точки *A, B, C*.

В столбце «Дано» таблицы 8 указан закон движения или закон изменения скорости ведущего колеса механизма, где $\varphi_1(t)$ – закон вращения колеса 1, $s_4(t)$– закон движения рейки 4, $\omega_2(t)$– закон изменения угловой скорости груза 2, $V_5(t)$ – закон изменения скорости груза 5 и т. д.(везде φ выражено в радианах), s – в сантиметрах, t – в секундах. Положительное направление для φ и ω против хода часовой стрелки, для s_4, s_5, и V_4, V_5 – вниз.

Определить в момент времени $t_1 = 2$ с указанные в таблице 8 в столбцах «Найти» скорости (V – линейные, ω – угловые) и ускорения (a – линейные, ε – угловые) соответствующих точек или тел (V_5 – скорость груза 5 и т.д.).

Таблица 7 – Рисунки к задаче К2б

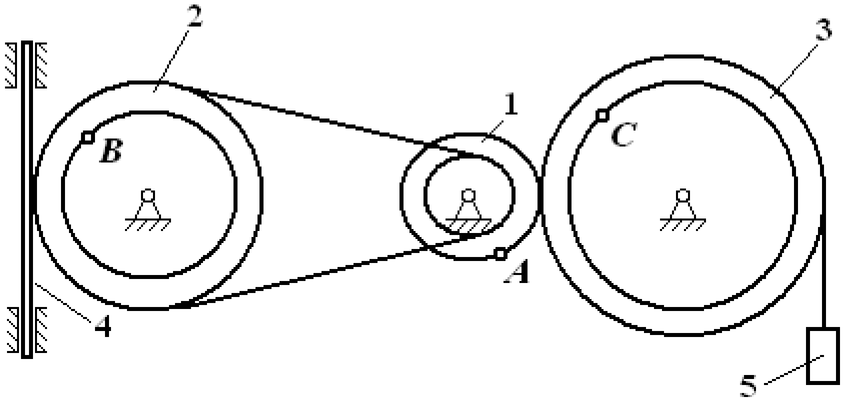


Рисунок К2б.0

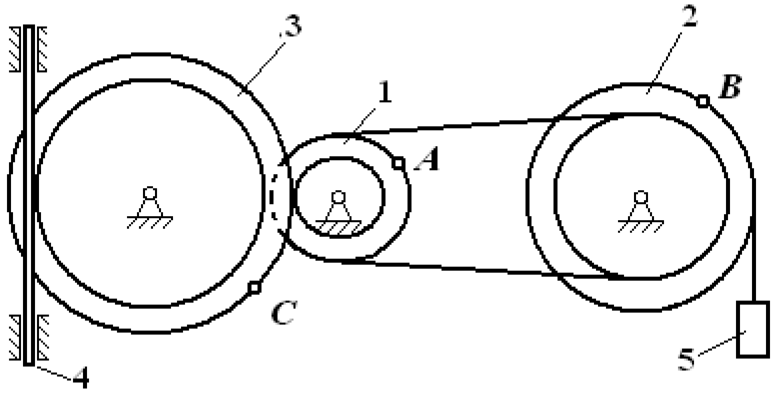


Рисунок К2б.1

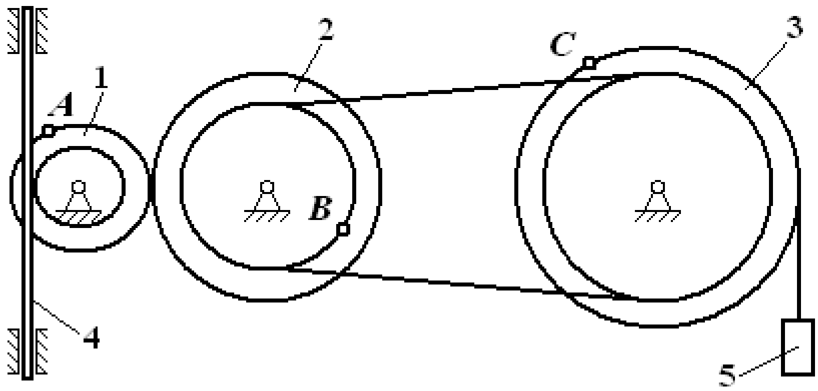


Рисунок К2б.2

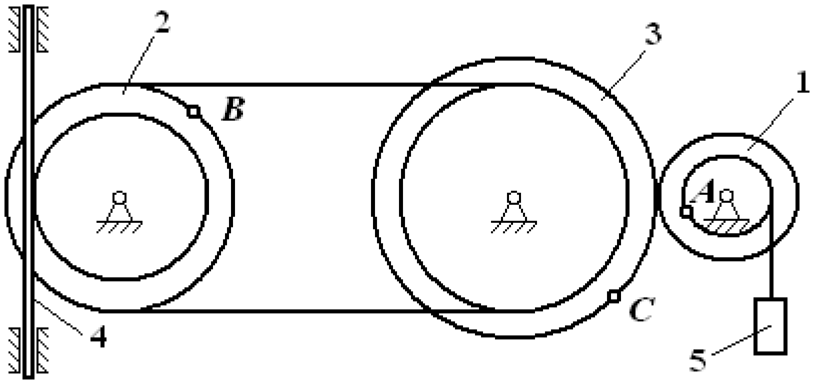


Рисунок К2б.3

Продолжение таблицы 7

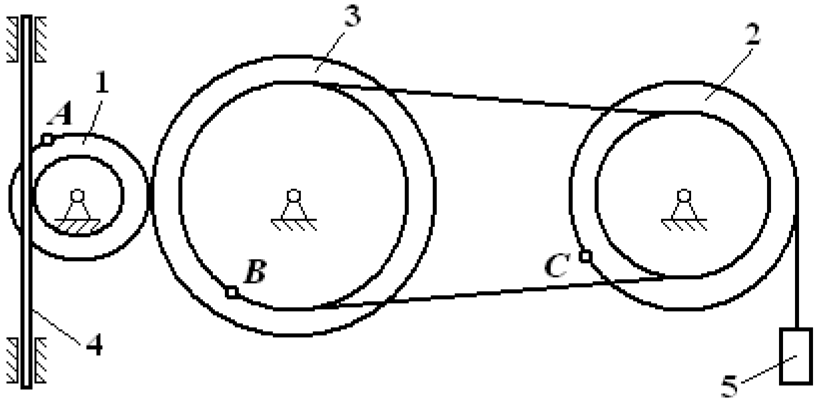


Рисунок К2б.4

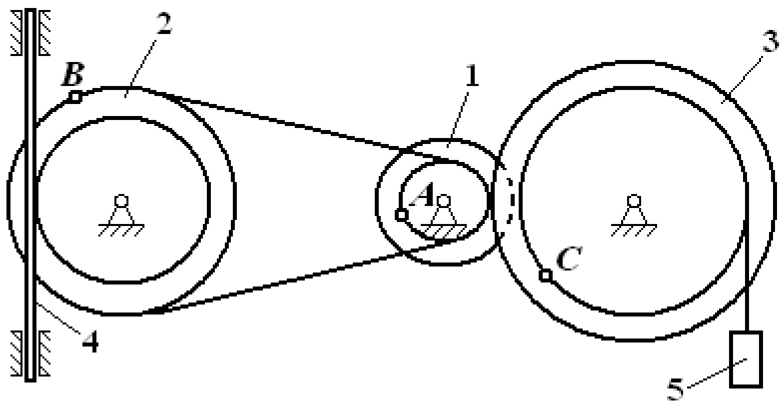


Рисунок К2б.5

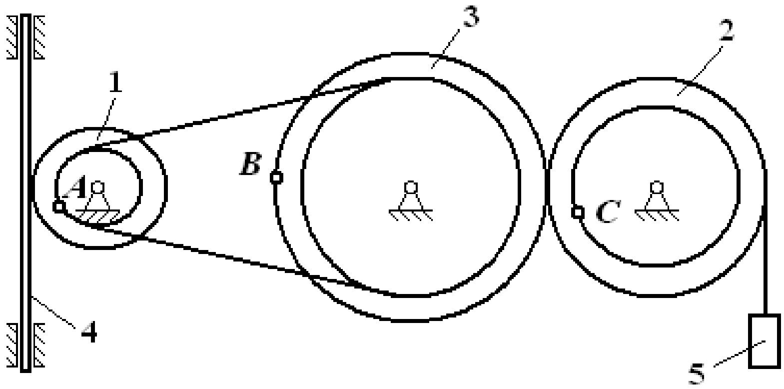


Рисунок К2б.6

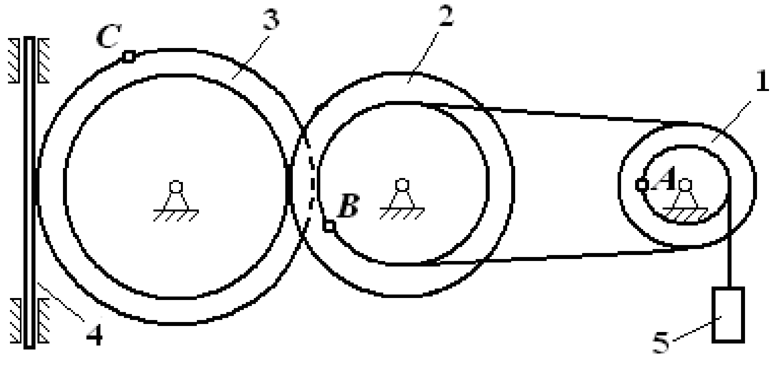


Рисунок К2б.7

Продолжение таблицы 7

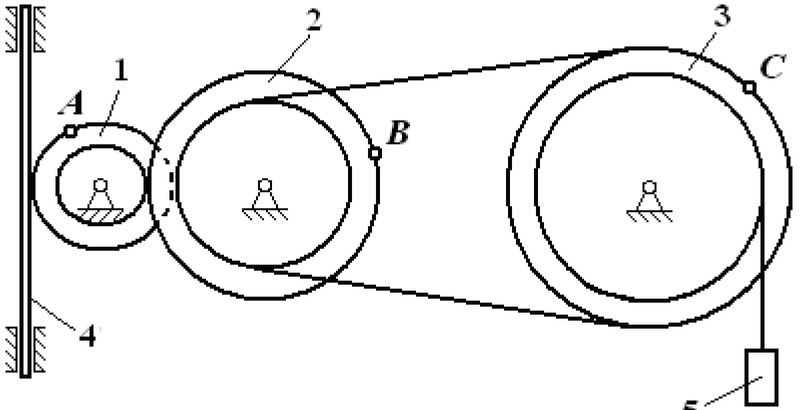


Рисунок К2б.8

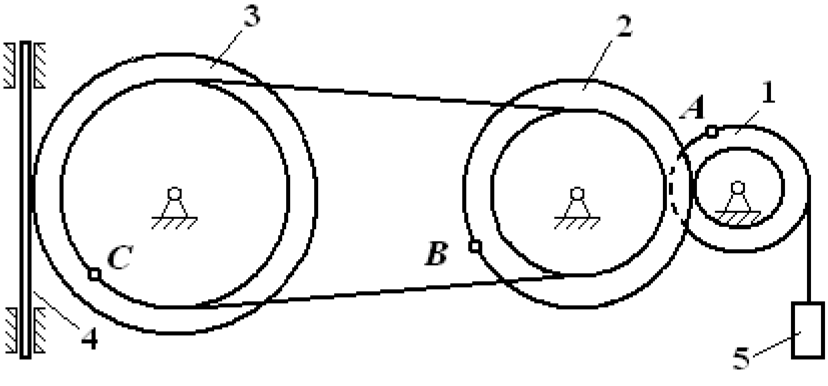


Рисунок К2б.9

Таблица 8 – Варианты условия задачи К2б

Последняя цифра шрифта	Дано	Найти	
		скорости	ускорения
0	$s_4 = 4\,(7t - t^2)$	V_B, V_C	ε_2, a_A, a_5
1	$V_5 = 2(t^2 - 3)$	V_A, V_C	ε_3, a_B, a_4
2	$\varphi_1 = 2\,t^2 - 9$	V_4, ω_2	ε_2, a_C, a_5
3	$\omega_2 = 7\,t - 3\,t^2$	V_5, ω_3	ε_2, a_A, a_4
4	$\varphi_3 = 3\,t - t^2$	V_4, ω_1	ε_1, a_B, a_5
5	$\omega_1 = 5\,t - 2\,t^2$	V_5, V_B	ε_2, a_C, a_4
6	$\omega_2 = 2(t^2 - 3t)$	V_4, ω_1	ε_1, a_C, a_5
7	$V_4 = 3t^2 - 8$	V_A, ω_3	ε_3, a_B, a_5
8	$s_5 = 2\,t^2 - 5t$	V_4, ω_2	ε_1, a_C, a_4
9	$\omega_3 = 8\,t - 3\,t^2$	V_5, V_B	ε_2, a_A, a_4

Указание. Задачи К2а и К2б – на исследование вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. При решении задач учесть, что когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же, а когда два колеса связанны ременной передачей, то скорости всех точек ремня и, следовательно, точек, лежащих на ободе каждого из этих колес, в данный момент времени численно одинаковы; при этом считается, что ремень по ободу колеса не скользит.

3.7 Пример выполнения задач К2а и К2б

Механизм (рисунок 7) состоит из ступенчатых колес 2 – 4, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки 1 и груза 5, привязанного к концу нити, намотанной на малую ступень колеса 4. Радиусы ступеней колеса равны соответственно: колеса 2 – r_2 = 6 *см*, R_2 = 8 *см*, у колеса 3 – r_3 = 4 *см*, R_3 = 6 *см*, у колеса 4 – r_4 = 2 *см*, R_4 = 8 *см*. Рейка движется по закону $s_1 = 3t^3$ (s – в сантиметрах, t – в секундах). t_1 = 3 с.

Определить: ω_4, V_5, ε_4, a_A в момент времени $t = t_1$.

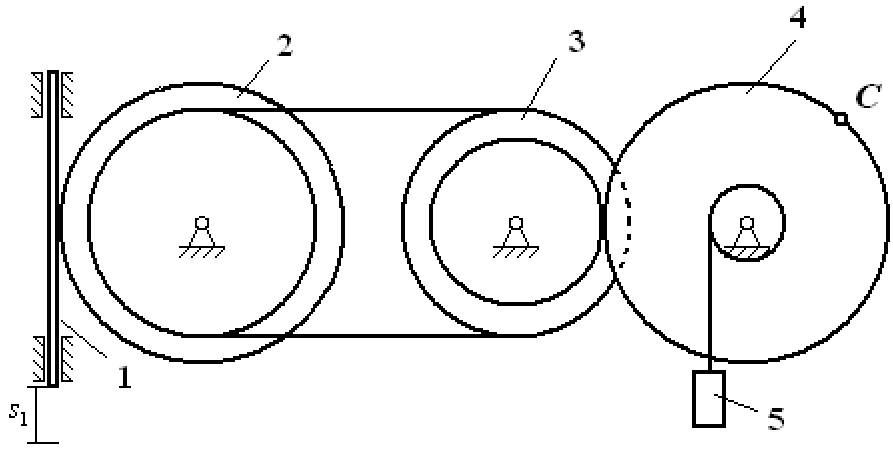


Рисунок 7

Решение.

1. Определим угловые скорости всех колес как функции времени t.

Зная закон движения рейки 1, находим ее скорость:

$$V_1 = \dot{s}_1 = 9t^2.$$

Рейка находится в поступательном движении, поэтому скорости всех ее точек, в том числе точки зацепления рейки с большой ступенью колеса 2 – K, равны по величине и по направлению $(\vec{V}_1 = \vec{V}_K)$ (рисунок 8), то есть $V_K = 9t^2$.

Тогда угловая скорость колеса 2

$$\omega_2 = \frac{V_K}{R_2} = \frac{9}{8}t^2.$$

Скорость V_{M} (рисунок 8) точки схода ремня с малого вала колеса 2 – M определим в виде

$$V_{\text{M}} = \omega_2 \cdot r_2 = \frac{9}{8}t^2 \cdot 6 = \frac{27}{4}t^2.$$

Часть ремня MN находится в поступательном движении, поэтому скорости точек M и N будут равны по величине и по направлению (рисунок 8), т. е. $\vec{V}_N = \vec{V}_M$. Следовательно,

$$V_N = \frac{27}{4}t^2.$$

Угловая скорость колеса 3 (рисунок 8)

$$\omega_3 = \frac{V_N}{R_3} = \frac{27}{4 \cdot 6}t^2 = \frac{9}{8}t^2.$$

Скорость точки L

$$V_L = \omega_3 \cdot r_3 = \frac{9}{8}t^2 \cdot 4 = \frac{9}{2}t^2.$$

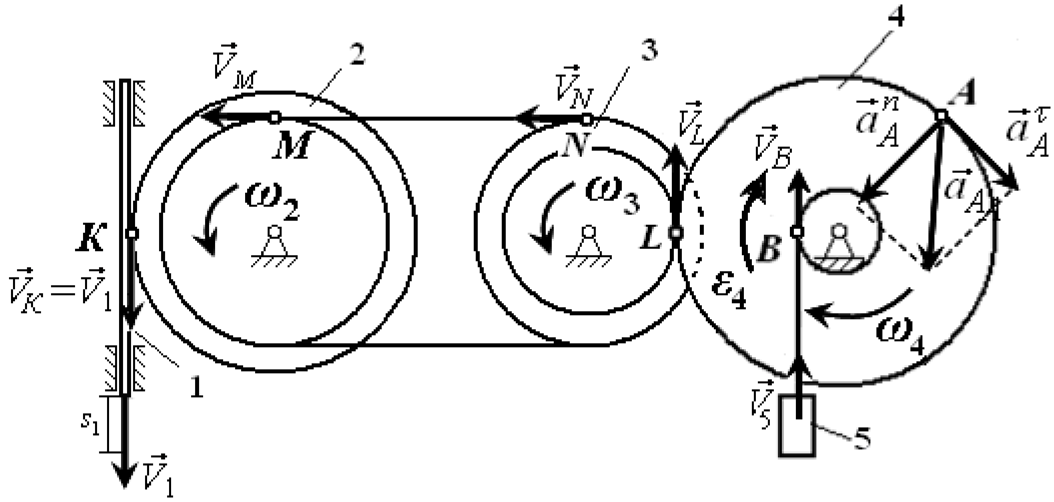


Рисунок 8

Угловая скорость колеса 4 (рисунок 8)

$$\omega_4 = \frac{V_L}{R_4} = \frac{9}{8 \cdot 8}t^2 = \frac{9}{64}t^2.$$

Угловое ускорение колеса 4 (рисунок 8)

$$\varepsilon_4 = \frac{d\omega_4}{dt} = \frac{9}{32}t.$$

2. Определим искомые кинематические характеристики при $t_1 = 3$ с.

Угловая скорость ω_4 при $t = t_1$

$$\omega_4 \Big|_{t_1=3} = \frac{9}{64} t^2 \Big|_{t_1=3} = 1{,}26 \quad c^{-1}.$$

Угловая скорость ε_4 при $t = t_1$

$$\varepsilon_4 \Big|_{t_1=3} = \frac{9}{32} t \Big|_{t_1=3} = 0{,}84 \quad c^{-2}.$$

Скорость точки B при $t = t_1$

$$V_B = \omega_4 \cdot r_4 = 1{,}26 \cdot 2 = 2{,}52 \ см/с.$$

Скорость тела 5 при $t = t_1$**.**

Так как нить, соединяющая точку В и тело 4, находится в поступательном движении, то

$$V_4 = V_B = 2{,}52 \ см/с.$$

Ускорение точки A при $t = t_1$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^{n}.$$

Касательное ускорение

$$a_A^{\tau} = \varepsilon_4 \cdot R_4 = 0{,}84 \cdot 8 = 6{,}72 \ см/с^2.$$

Нормальное ускорение

$$a_A^{n} = \omega_4^2 \cdot R_4 = (1{,}26)^2 \cdot 8 = 12{,}7 \ см/с^2.$$

Полное ускорение

$$|\vec{a}_A| = \sqrt{(a_A^{\tau})^2 + (a_A^{n})^2} = \sqrt{(6{,}72)^2 + (12{,}7)^2} = 14{,}37 \quad см/с^2.$$

Направления искомых скоростей и ускорений показано на рисунке 8.

3.8 Задача К3а.

Кинематический анализ плоского четырехзвенного механизма

Плоский механизм состоит из стержней 1 – 3 и диска 4, соединенных друг с другом, с неподвижной опорой O и с ползунком B шарнирами (таблица 9). Диск 4 катится по неподвижной поверхности без скольжения. Ползунок B движется вдоль неподвижной направляющей ab.

Длины стержней: $l_1 = 0{,}4$м, $l_2 = 1{,}2$м, $l_3 = 1{,}4$м. Радиус диска 4 – $R = 0{,}2$м. Положение механизма определяется углами $\alpha, \beta, \gamma, \theta, \varphi$; положение точки K на диске 4 – углом ψ (таблица 10). Точка $Д$ на всех рисунках, кроме рисунков 1,3,4 (таблица 9) находится в середине соответствующего стержня.

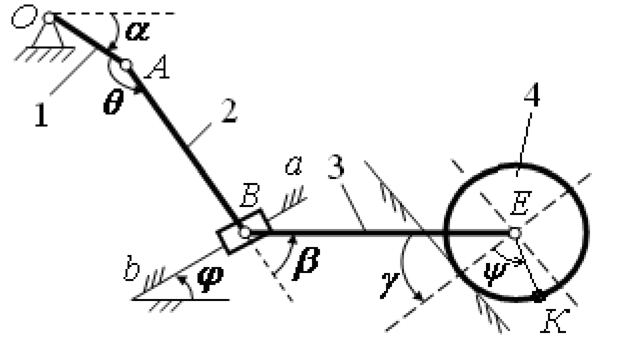
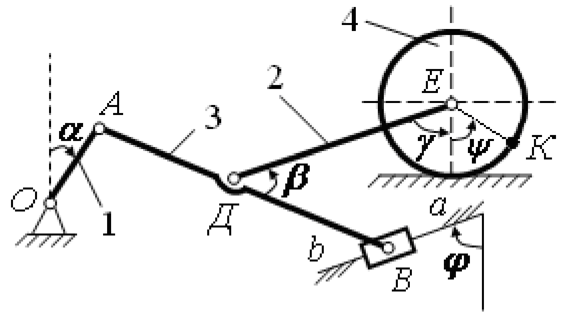
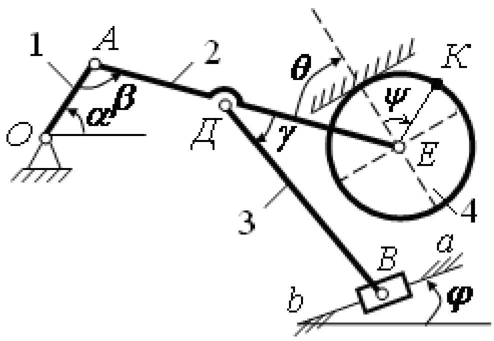
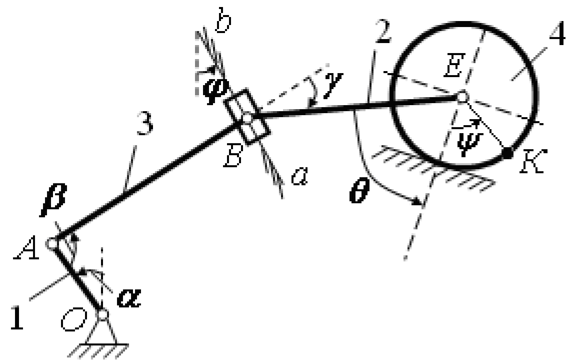
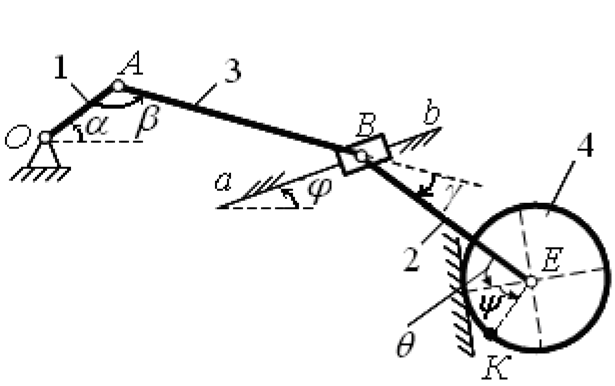
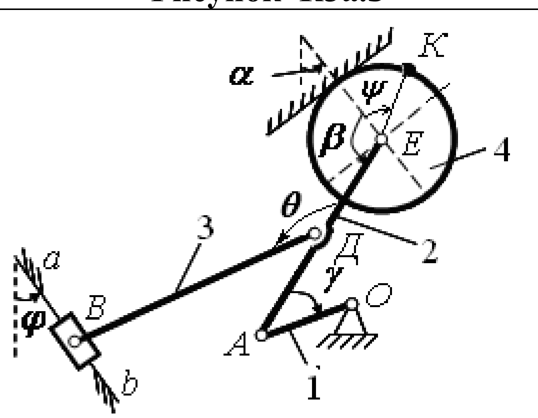
Найти скорости A, B, $Д$, E, K, угловые скорости стержней и диска в заданном положении механизма, а также ускорение точки A, если стержень 1 в данный момент времени имеет угловое ускорение $\varepsilon_1 = 10\ {}^{1}\!/_{c^2}$.

Замечания:

1. Дуговые стрелки на рисунках (таблица 9) показывают направления, в которых должны быть при построении чертежа отложены соответствующие углы, т.е. по ходу или против хода часовой стрелки.

2. Заданную угловую скорость считать направленной против хода часовой стрелки, а заданную скорость $\vec{V}_B$ ползунка – вдоль линии ab (в направлении от a к b).

Таблица 9 – Рисунки к задаче К3а

 Рисунок К3а.0	 Рисунок К3а.1
 Рисунок К3а.2	 Рисунок К3а.3
 Рисунок К3а.4	 Рисунок К3а.5

Продолжение таблицы 9

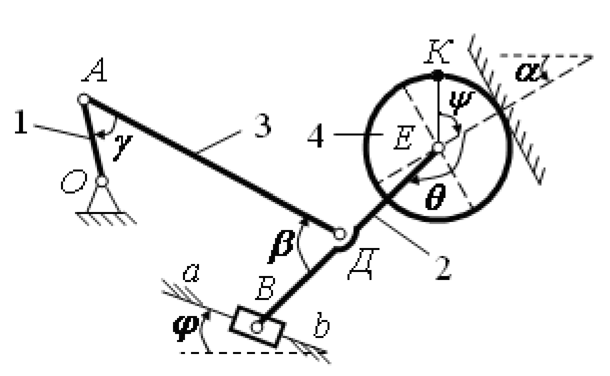


Рисунок К3а.6

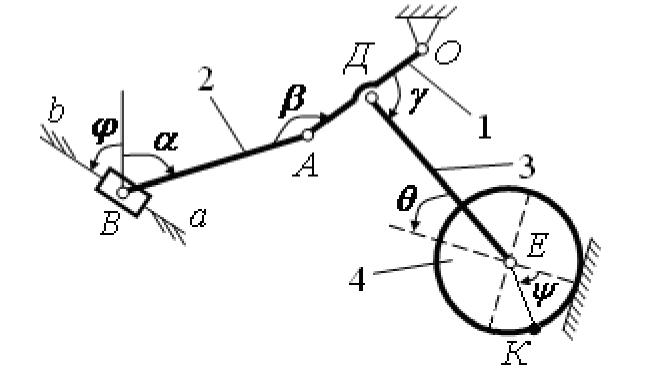


Рисунок К3а.7

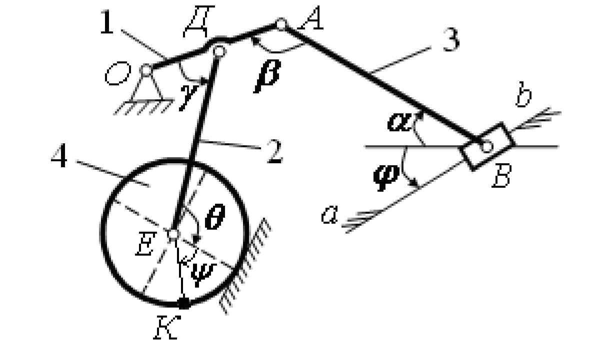


Рисунок К3а.8

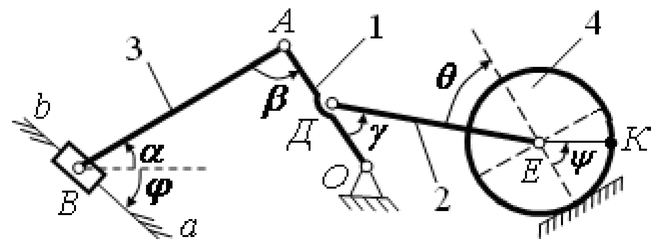


Рисунок К3а.9

Таблица 10 – Варианты условия задачи К3а

Последняя цифра шифра	Углы						Дано		
	α^o	β^o	γ^o	φ^o	θ^o	ψ^o	ω_1, с $^{-1}$	ω_4, с $^{-1}$	V_B, м/с
0	30	150	120	0	60	225	2	–	–
1	60	60	60	90	120	30	–	3	–
2	0	120	120	0	60	45	–	–	10
3	90	120	90	90	60	60	3	–	–
4	0	150	30	0	60	30	–	4	–
5	60	150	120	90	30	120	–	–	8
6	30	120	30	0	60	135	5	–	–
7	90	150	120	90	30	150	–	5	–
8	0	60	30	0	120	240	–	–	6
9	30	120	120	0	60	210	4	–	–

Указание. Задача К3а иллюстрирует методы нахождения кинематических характеристик твердых тел и их точек, то есть решение основных задач кинематики твердого тела, для случая, когда механизм состоит, в основном, из стержней, находящихся в поступательном, вращательном и плоскопараллельном движениях. Кинематический анализ движения звеньев механизма осуществляется последовательно, начиная со звена, для которого в графах «Дано» таблицы 10 задана угловая (ω) или линейная (V) кинематическая характеристика.

Переход от одного звена механизма к другому осуществляется через их общие точки. Скорости точек при плоском движении находятся с помощью мгновенного центра скоростей. Построение чертежа следует начинать со стержня, положение которого определяется углом α.

3.9 Пример выполнения задачи К3а

Плоский механизм состоит из стержней 1 – 3 и диска 4, соединенных друг с другом, с неподвижной опорой O и с ползунком B шарнирами (рисунок 9). Диск 4 катится по неподвижной поверхности без скольжения. Ползунок B движется вдоль неподвижной направляющей ab.

Длины стержней: l_1 = 0,4м, l_2 = 1,2м, l_3 = 1,4м. Радиус диска 4 – R = 0,2м. Положение механизма определяется углами $\alpha = 60^0$, $\beta = 30^0$, $\gamma = 60^0$, $\theta = 30^0$, $\varphi = 90^0$. Положение точки K на диске 4 – углом $\psi = 150^0$.

Точка $Д$ находится в середине стержня 1.

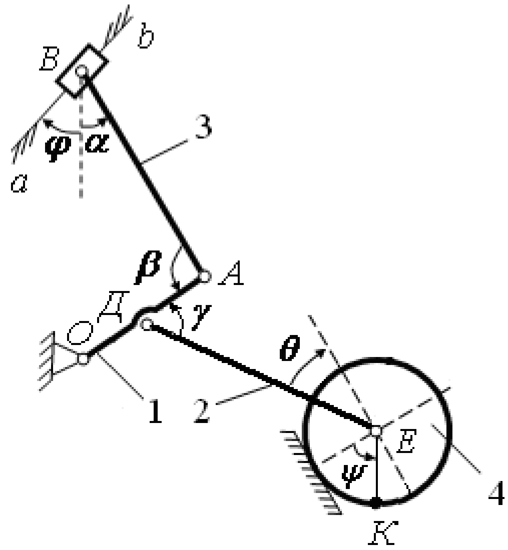


Рисунок 9

Найти скорости A, B, $Д$, E, K, угловые скорости стержней и диска в заданном положении механизма, если скорость ползунка B V_B = 2 м/с , а также ускорение точки A, если стержень 1 в данный момент времени имеет угловое ускорение $\varepsilon_1 = 10\ с^{-2}$.

Решение.

1. Изобразим механизм в положении, соответствующем заданным углам α, β, γ, θ, φ, ψ. Построение чертежа начнем со стержня 3, положение которого определяется углом α (рисунок 10). Заданную скорость ползунка B $\vec{V}_B$ изобразим в направлении от a к b.

2. Определим скорость точки A и угловую скорость звена AB.

Так как задана скорость ползунка B, начнем определение кинематических характеристик точек и звеньев механизм со стержня 3 (рисунок 11).

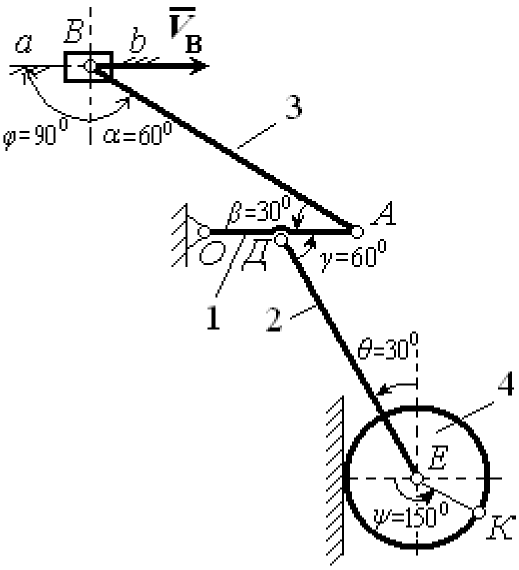


Рисунок 10

Для определения скорости точки A V_A и угловой скорости звена 3 механизма ω_3 построим мгновенный центр скоростей (м. ц. с.) данного звена. Для построения м. ц. с. необходимо знать направления скоростей двух точек тела (или направление скорости одной точки и траекторию другой). В данном случае известно направление скорости точки B $\vec{V}_B$ (рисунок 11) и траектория точки A (окружность, так как звено 1 находится во вращательном движении).

Скорость точки A будет направлена по касательной к окружности.

Восстанавливаем из точек A и B перпендикуляры к их скоростям (в точке A – к касательной, по которой должен быть направлен вектор скорости $\vec{V}_A$). М. ц. с. звена AB будет находиться в точке P_{AB} (рисунок 11).

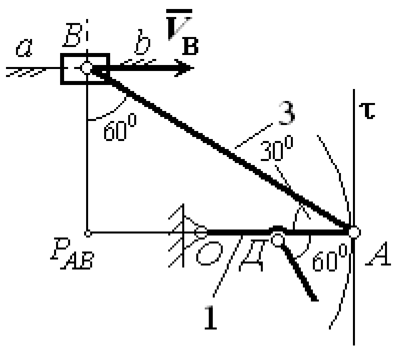


Рисунок 11

По направлению скорости точки B $\vec{V}_B$ определяем направление вращения звена AB вокруг м. ц. с. (рисунок 12) и направление скорости точки A $\vec{V}_A$.

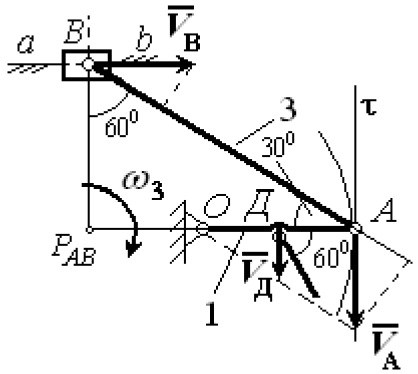


Рисунок 12

Скорость точки A находим по теореме о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры, приравнивая проекции скоростей точек $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ на прямую AB, соединяющую эти точки (рисунок 12).

$$V_B \cos 30^0 = V_A \cos 60^0.$$

Откуда

$$V_A = \frac{V_B \cos 30^0}{\cos 60^0} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} = 0{,}87 \quad \text{м/с}.$$

Угловая скорость звена AB

$$\omega_3 = \frac{V_B}{BP_{AB}} = \frac{V_A}{AP_{AB}} = \frac{2}{0{,}7} = 2{,}86 \quad \text{с}^{-1}.$$

3. Определим скорость точки *Д* и угловую скорость звена 1.

Точка *Д* принадлежит звену, находящемуся во вращательном движении. При вращательном движении скорости точек пропорциональны расстоянию до оси вращения. Точка *Д* по условиям задачи находится в два раза ближе к оси вращения O, чем точка A, следовательно её скорость в два раза меньше скорости точки A, то есть $V_Д = V_A / 2 = 0{,}44$ м/с.

Вектор скорости *Д* $\vec{V}_Д$ будет направлен в туже сторону, что и вектор скорости $\vec{V}_A$ (рисунок 12).

Угловая скорость звена 1

$$\omega_1 = \frac{V_A}{l_1} = \frac{0,87}{0,4} = 2,18 \ \ \text{с}^{-1}.$$

4. Определим скорость точки E и угловую ско.

Рассмотрим звено *ДЕ* и построим для него м. ц. с. Примем во внимание, что траекторией точки E является прямая линия, параллельная вертикальной неподвижной плоскости, по которой перемещается колесо 4 (рисунок 13). Перпендикуляр, проведенный к этой линии из точки E (к скорости точки E, которая должна быть направлена вдоль этой линии) и перпендикуляр, проведенный из точки *Д* к её скорости, будут параллельными линиями, то есть м. ц. с. звена *ДЕ* будет находится в бесконечности (рисунок 13). Это означает, что звено *ДЕ* совершает в данном положении механизма мгновенно поступательное движение. По теореме о скоростях и ускорениях точек тела, совершающего поступательное движение, скорости всех точек тела в данный момент времени равны по величине и направлению, т. е.

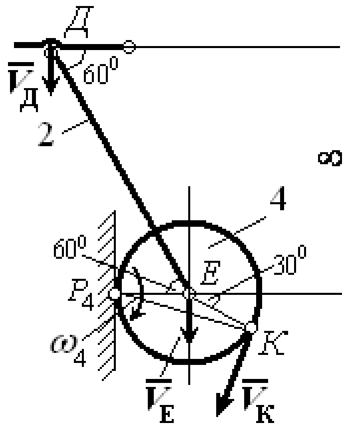


Рисунок 13

$$V_E = V_Д = 0,44 \text{ м/с}.$$

Угловая скорость звена 2

$$\omega_2 = \frac{V_Д}{\infty} = 0.$$

4. Определим скорость точки K.

М. ц. с. колеса 4 находится в точке P_4, так как качение колеса происходит без скольжения (рисунок 13).

Угловая скорость колеса 4

$$\omega_4 = \frac{V_E}{R} = \frac{0,44}{0,2} = 2,2 \ \ \text{с}^{-1}.$$

Скорость точки K

$$V_K = \omega_4 \cdot KP_4 = 2,2 \cdot \sqrt{R^2 + R^2 + 2R^2 \cos 30^0} = 2,2 \cdot 0,2 \cdot 1,93 = 0,85 \text{ м/с}.$$

Вектор скорости точки K будет направлен перпендикулярно отрезку, соединяющему точку K и м. ц. с. P_4, в сторону вращения колеса вокруг м. ц. с. (рисунок 13).

4. Определим ускорение точки A.

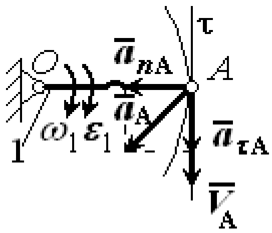


Рисунок 14

Точка A движется по окружности радиуса l_1 (рисунок 14).

При криволинейном движении полное ускорение точки равно геометрической сумме двух ускорений (рисунок 14)

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau.$$

Модуль нормального ускорения

$$a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_1 = (2{,}18)^2 \cdot 0{,}4 = 1{,}9 \text{ м/с}^2.$$

Вектор нормального ускорения направлен к оси вращения (рисунок 14).

Модуль касательного ускорения

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot l_1 = 10 \cdot 0{,}4 = 4 \text{ м/с}^2.$$

Вектор касательного ускорения совпадать по направлению с вектором скорости точки A, так как знаки ω_1 и ε_1 совпадают (рисунок 14).

Модуль полного ускорения

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2} = \sqrt{(1{,}9)^2 + (4)^2} = 4{,}43 \text{ м/с}^2.$$

3.10 Задача К3б
Кинематический анализ плоского пятизвенного механизма

Механизм (таблица 11) состоит из грузов 1 и 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней R_3 = 0,6м и r_3 = 0,2м, блока 4 радиуса R_4 = 0,4 м и ступенчатого катка (или ступенчатого подвижного блока) 5 с радиусами ступеней R_5 = 0,4 м и r_5 = 0,2 м. Груз 1 движется по закону $s = s(t)$ (таблица 12). Положение точки A на диске 5 определяется углом γ, значения которого заданы в таблице 12. Положительное значение угла откладывается в направлении стрелки, отрицательное – в противоположном направлении.

Определить угловые скорости ступенчатого шкива 3, блока 4, ступенчатого катка (или подвижного блока) 5, скорости груза 2, точек A и C, а также ускорение точки B в момент времени t_1 = 1 с.

Таблица 11 – Рисунки к Задаче К2б

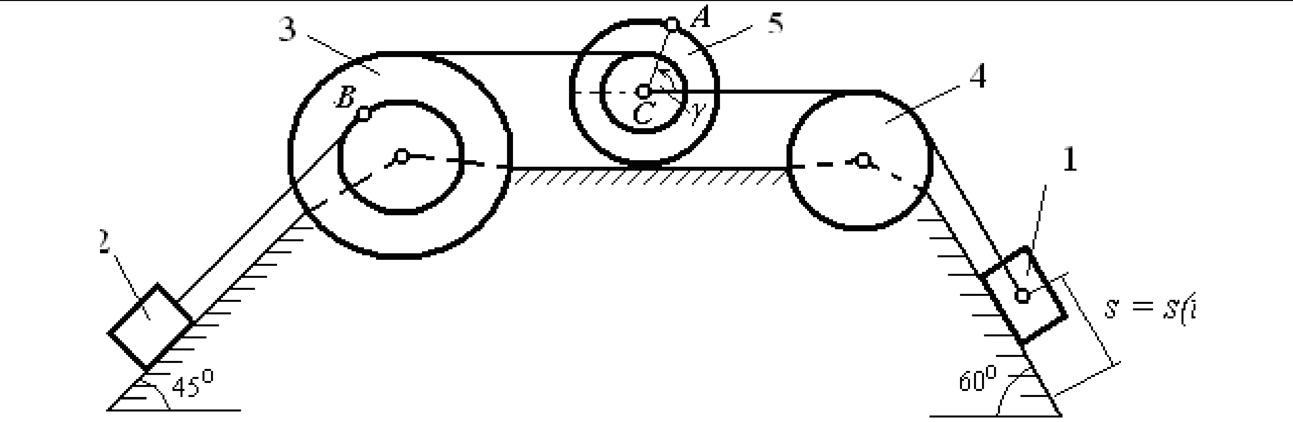


Рисунок К3б.0

Продолжение таблицы 11

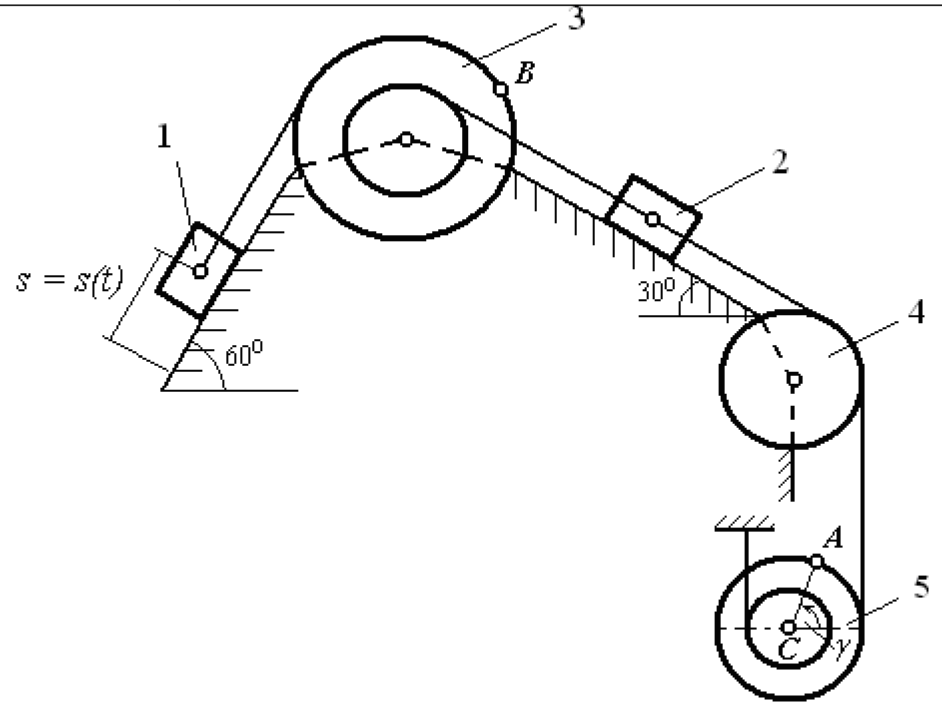


Рисунок К3б.1

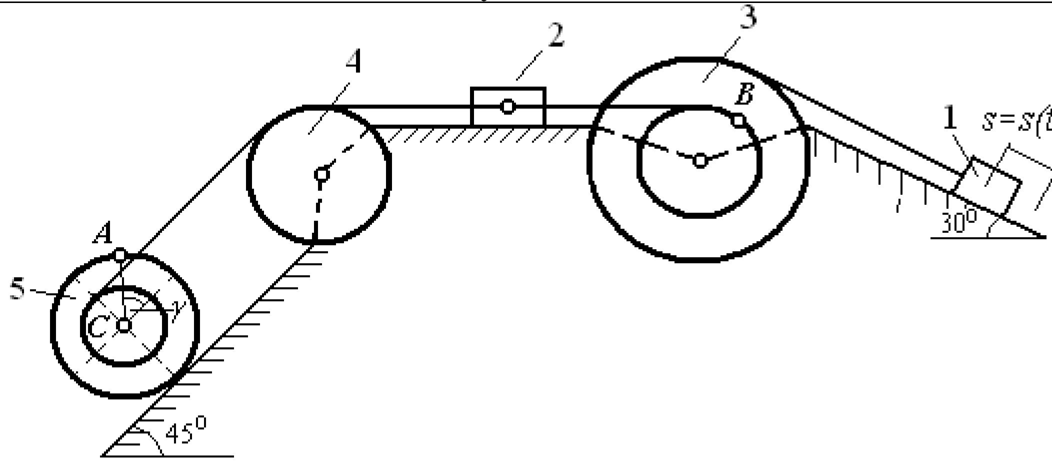


Рисунок К3б.2

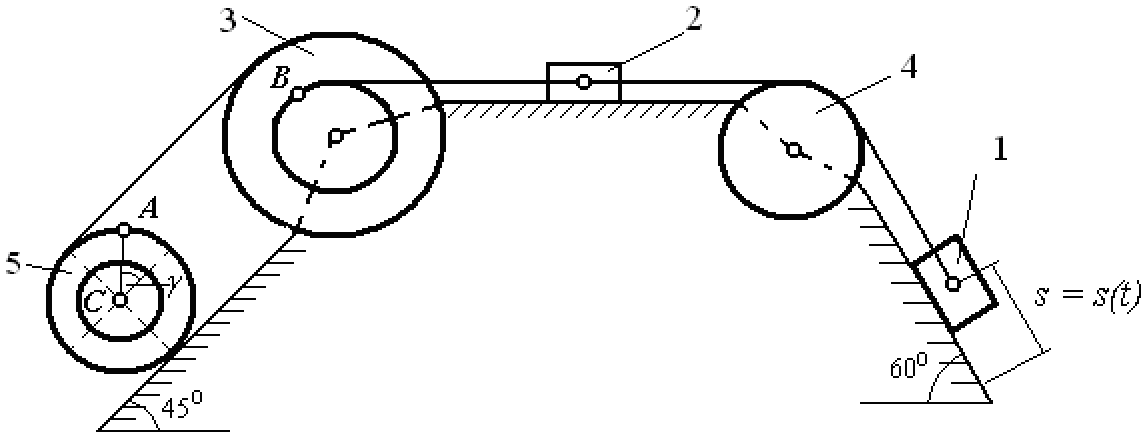


Рисунок К3б.3

Продолжение таблицы 11

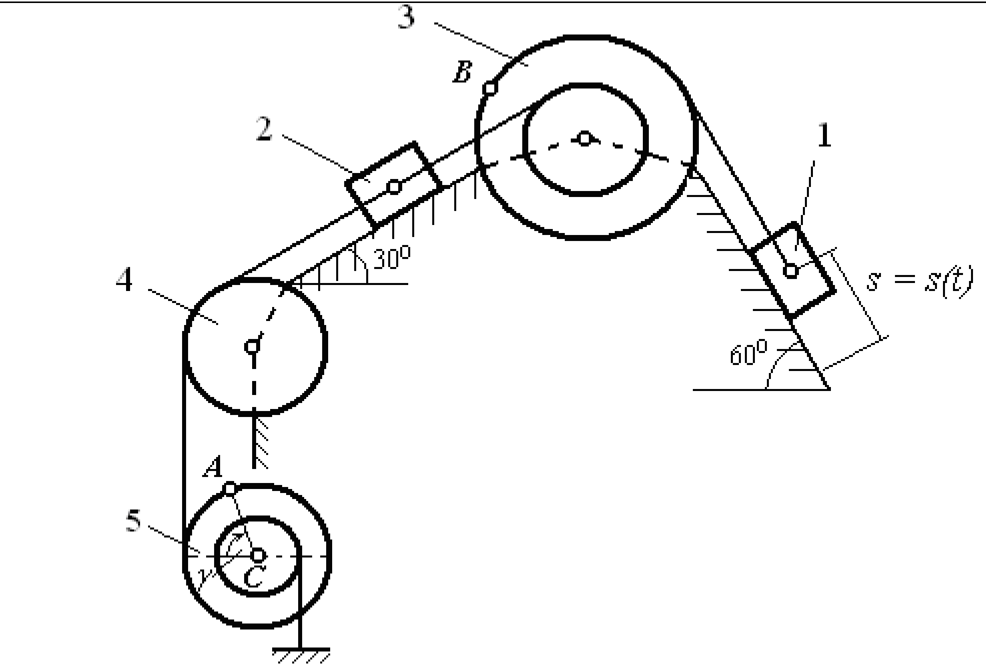


Рисунок К3б.4

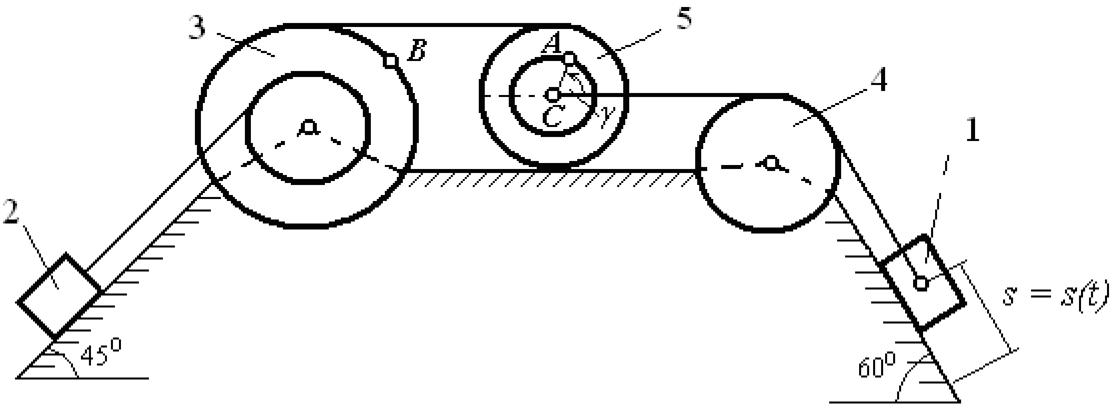


Рисунок К3б.5

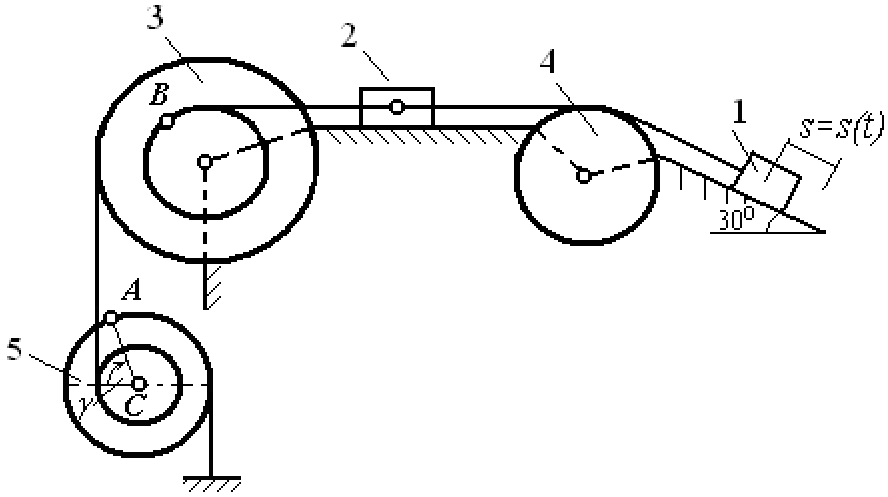


Рисунок К3б.6

Продолжение таблицы 11

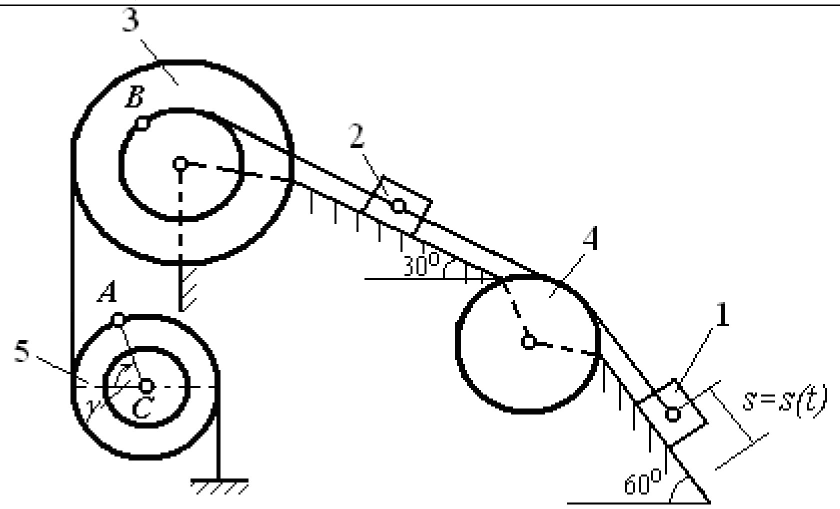


Рисунок К3б.7

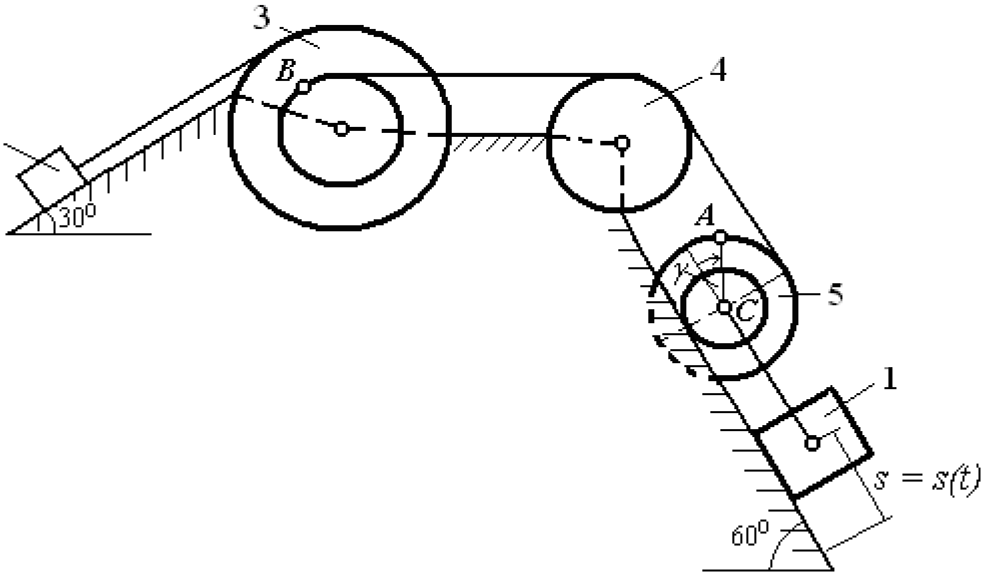


Рисунок К3б.8

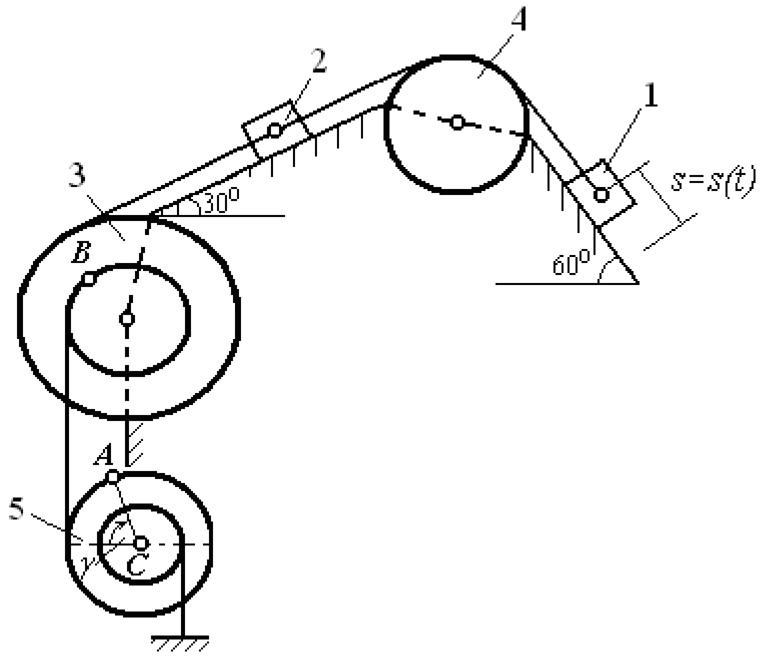


Рисунок К3б.9

Таблица 12 – Данные к задачам К3б

Номер условия	$s = s(t)$, м	γ, град
0	$-4t + 5t^2$	– 45
1	$4t^2 + 3t$	30
2	$-5t + 2t^3$	60
3	$-5t + 6t^3$	– 60
4	$2t^3 - 4t$	45
5	$-7t + 8t^2$	– 30
6	$-8t + 9t^2$	60
7	$8t^2 - 5t$	– 45
8	$9t - 2t^2$	30
9	$-6t + 4t^3$	– 60

3.11 Пример выполнения задачи К3б

Механизм (рисунок 15) состоит из грузов 1 и 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней $R_3 = 0{,}6$ м и $r_3 = 0{,}2$ м, блока 4 радиуса $R_4 = 0{,}4$ м и ступенчатого катка (или ступенчатого подвижного блока) 5 с радиусами ступеней $R_5 = 0{,}4$ м и $r_5 = 0{,}2$ м. Груз 1 движется по закону $s = -2t + 3t^3$. Положение точки A на диске 5 определяется углом $\gamma = -30^0$.

Определить угловые скорости ступенчатого шкива 3, блока 4, ступенчатого катка (или подвижного блока) 5, скорости груза 2, точек A и C, а также ускорение точки B в момент времени $t_1 = 1$ с.

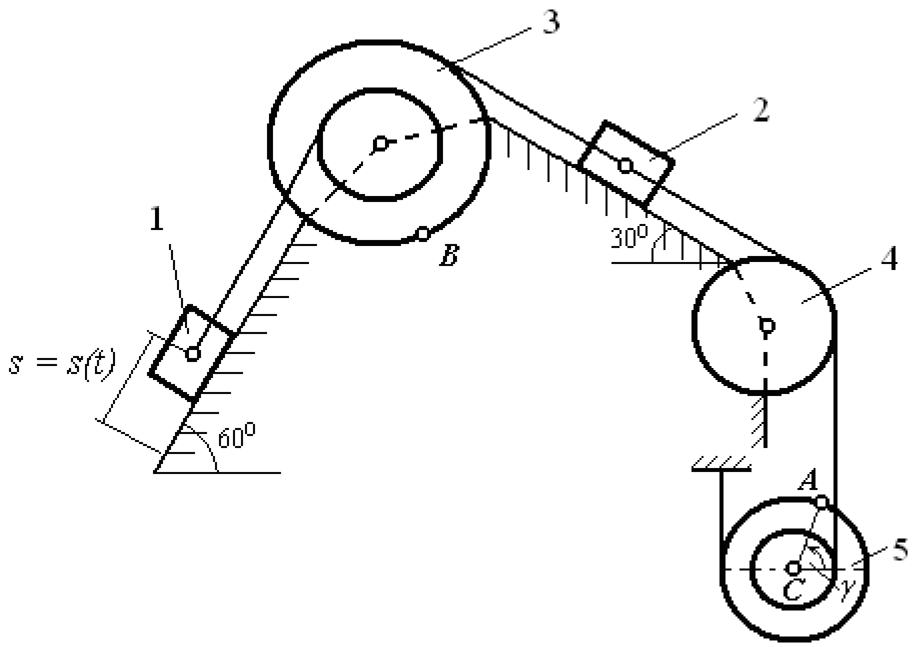


Рисунок 15

Решение.

При угле $\gamma = -30^0$ точка A будет занимать положение, изображенное на рисунке 16 (знак «–» означает, что γ угол откладывается по часовой стрелке).

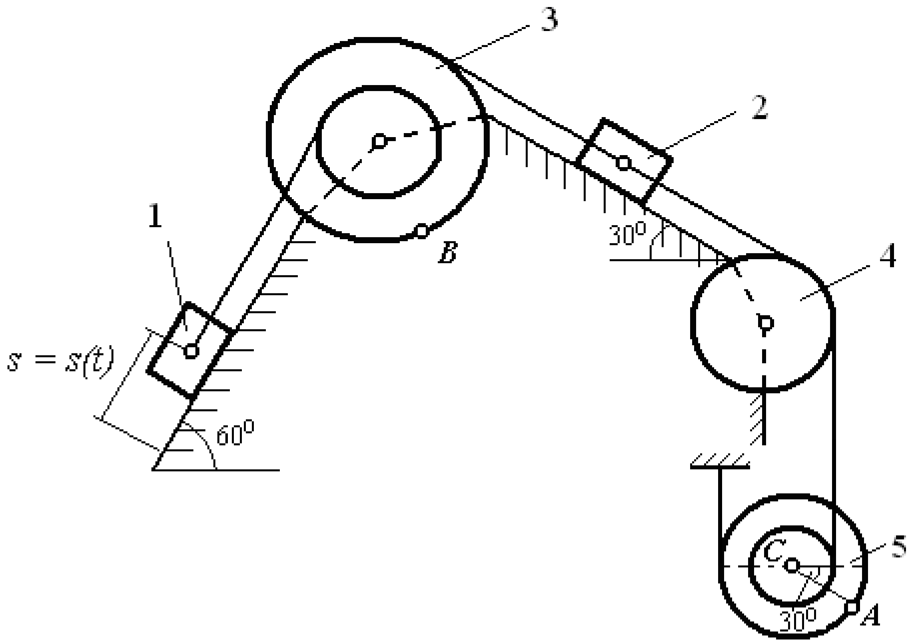


Рисунок 16

1. Определим скорость тела 1.

$$V_1 = \frac{ds}{dt} = -2 + 9\ t^2.$$

При t_1 = 1 с. получим

$$V_1\Big|_{t_1=1} = V_{11} = 7 \text{ м/с.}$$

Так как $V_{11} > 0$, то вектор скорости тела 1 будет направлен в сторону возрастания s, то есть вниз по наклонной плоскости (рисунок 17).

2. Определим угловую скорость тела 3 и скорости точек K, L, и B механизма.

Угловая скорость тела 3.

Так как нить, соединяющая тела 1 и 3 находится в поступательном движении (рисунок 17), то скорости тела 1 и точки К тела 3 будут равны по величине и по направлению, т.е.

$$V_K = V_1 = -2 + 9\ t^2.$$

При t_1 = 1 с.

$$V_K\Big|_{t_1=1} = V_{K1} = 7 \text{ м/с.}$$

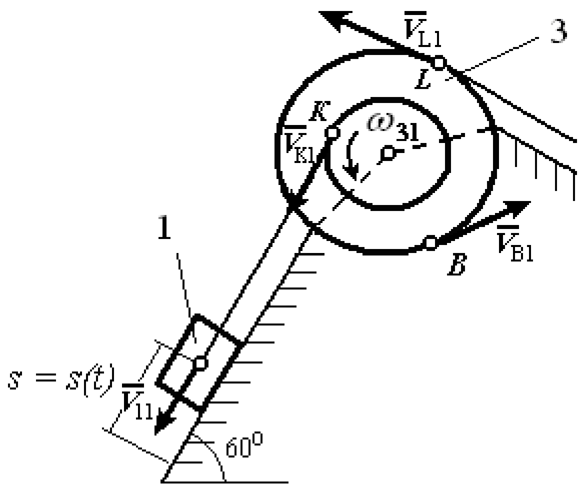


Рисунок 17

Так как тело 3 находится во вращательном движении, то

$$\omega_3 = \frac{V_K}{r_3} = \frac{-2 + 9t^2}{0{,}2} = -10 + 45t^2.$$

При t_1 = 1 с.

$$\omega_{31} = \frac{V_{K1}}{r_3} = 35 \quad c^{-1}.$$

Направление угловой скорости ω_{31} определим по направлению скорости точки K (рисунок 17).

Скорости точек B и L равны по модулю, так как точки находятся на одинаковом расстоянии от оси вращения тела 3 (рисунок 17).

$$V_L = V_B = \omega_3 \cdot R_3 = (-10 + 45t^2) \cdot 0{,}6 = -6 + 27t^2.$$

При t_1 = 1 с.

$$V_L\big|_{t_1=1} = V_{L1} = V_B\big|_{t_1=1} = V_{B1} = \omega_3 \cdot R_3 = 35 \cdot 0{,}6 = 18 \quad \text{м/с}.$$

Векторы скоростей $\vec{V}_{L1}$ и $\vec{V}_{B1}$ направлены по касательным к траекториям соответствующих точек в сторону вращения тела 3 (рисунок 17).

2. Определим ускорение точки В.

Так как точка В движется по окружности, вектор её полного ускорения будет равен геометрической сумме двух ускорений (рисунок 18)

$$\vec{a}_{B1} = \vec{a}_{B1}^{\,n} + \vec{a}_{B1}^{\,\tau}.$$

Модуль нормального ускорения точки B при t_1 = 1 с.

$$a^{n}_{B1} = \omega^2_{31} \cdot R_3 = (35)^2 \cdot 0{,}6 = 735 \text{ м/с}^2.$$

Вектор нормального ускорения будет направлен к центру колеса 3 (рисунок 18).

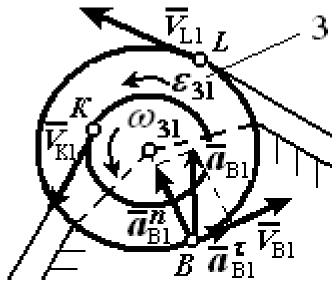


Рисунок 18

Угловое ускорение колеса 3

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = 90 \quad t.$$

При t_1 = 1 сек $\varepsilon_{31} = 90$ с $^{-2}$.

Алгебраическое значение касательного ускорения

$$a^{\tau}_{B1} = \varepsilon_{31} \cdot R_3 = 90 \cdot 0{,}6 = 54 \text{ м/с}^2.$$

Так как скорость точки B и её касательное ускорение в данный момент времени имеют одинаковые знаки, то вектор касательного ускорения по направлению будет совпадать с вектором скорости (рисунок 18).

Модуль полного ускорения точки B при t_1 = 1 сек

$$a_{B1} = \sqrt{(a^n_{B1})^2 + (a^\tau_{B1})^2} = \sqrt{(735)^2 + (54)^2} = 736{,}98 \text{ м/с}^2.$$

3. Определим угловую скорость тела 4, скорость тела 2 и скорость точки *M* механизма.

Нить, соединяющая колеса 3 и 4, груз 2, находится в поступательном движении (рисунок 19), поэтому скорости точек *L*, *M* и груза 2 равны по величине и по направлению, то есть

$$V_L = V_M = V_2 = -6 + 27\,t^2.$$

При $t_1 = 1$ с.

$$V_{L1} = V_{M1} = V_{21} = 16 \text{ м/с}.$$

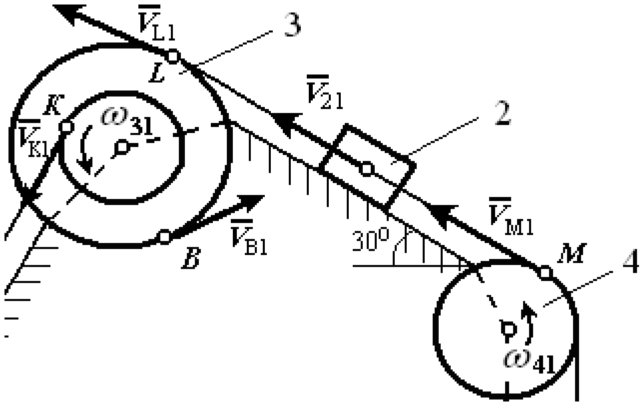


Рисунок 19

Угловая скорость блока 4

$$\omega_4 = \frac{V_M}{R_4} = \frac{-6 + 27t^2}{0{,}4} = -1{,}5 + 67{,}5t^2.$$

При $t_1 = 1$ сек $\omega_{41} = 66$ с $^{-1}$.

Направление вращения блока 4 определяем по направлению скорости точки *M* (рисунок 19).

4. Определим угловую скорость блока 5 и скорости точек *A* и *C*.

Скорости точек *M* и *S* по модулю равны, так как эти точки находятся на одинаковом расстоянии от оси вращения (рисунок 20), то есть

$$V_{S1} = V_{M1} = 16 \text{ м/с}.$$

Нить, соединяющая тела 4 и 5 находится в поступательном движении (рисунок 20), поэтому

$$V_{N1} = V_{S1} = 16 \text{ м/с}.$$

Подвижный блок 5 находится в плоскопараллельном (плоском) движении. Мгновенный центр скоростей (м. ц. с.)

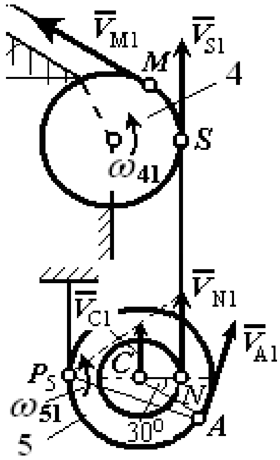


Рисунок 20

блока находится в точке P_5 (рисунок 20). Направление вращения блока вокруг м. ц. с. определим по направлению скорости точки *N*. Вращение будет происходить с угловой скоростью

$$\omega_{51} = \frac{V_{N1}}{R_5 + r_5} = \frac{16}{0{,}4 + 0{,}2} = 26{,}67 \quad \text{с}^{-1}$$

Скорость точки *C* $V_{C1} = \omega_{51} \cdot R_5 = 26{,}67 \cdot 0{,}4 = 10{,}67$ см/с.

Скорость точки *A* определим по формуле

$$V_{A1} = \omega_{51} \cdot P_5A = \omega_{51} \cdot \sqrt{R_5^2 + R_5^2 + 2R_5^2 \cos 30^0} = 26{,}67 \cdot 0{,}4 \cdot 1{,}93 = 20{,}55 \quad \text{м/с}.$$

Вектор скорости точки A будет направлен перпендикулярно отрезку P_5A, так как блок 5 в данный момент времени совершает мгновенный поворот вокруг мгновенного центра скоростей.

3.12 Задача К4
Определение кинематических характеристик при сложном движении точки

Прямоугольная или круглая пластина радиуса R = 60 см (таблица 13) вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью ω, заданной в таблице 14 (при знаке минус направление ω противоположно показанному на рисунке). Ось вращения на рисунках К4.0 – К4.3 и К4.8, К4.9 (таблица 13) перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O (пластина вращается в своей плоскости); на рисунках К4.4 – К4.7 (таблица 13) ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой BD (рисунки К4.0 – К4.5, таблица 13) или по окружности радиуса R, т.е. по ободу пластины (рисунки – К4.6 – К4.9, таблица 13), движется точка M. Закон ее относительного движения, выражаемый уравнением $s = \overset{\frown}{AM} = f(t)$ (s – в сантиметрах, t – в секундах), задан в таблице 14 отдельно для рисунков К4.0 – К4.5 и для рисунков К4.6 – К4.9, при этом на рисунке К4.6 – К4.9 $s = AM$ и отсчитывается по дуге окружности; там же даны размеры b и l. На всех рисунках точка M показана в положении, при котором $s = AM > 0$ (при $s < 0$ точка M находится по другую сторону от точки A).

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени t_1 = 1с.

Указания. Задача К3 – на сложное движение точки. При ее решении движение точки по пластине считать относительным, а вращательное движение самой пластины – переносным и воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Прежде чем производить расчеты, следует изобразить точку M на пластине в том положении, в котором нужно определить ее абсолютную скорость (или ускорение), а не в произвольном положении, показанном на рисунках к задаче.

В случаях, относящихся к рисункам К4.6 – К4.9, при решении задачи не подставлять числового значения R, пока не будут определены положение точки M в момент времени t_1 = 1с и угол между радиусами CM и CA в этот момент.

Таблица 13 – рисунки к задаче К4

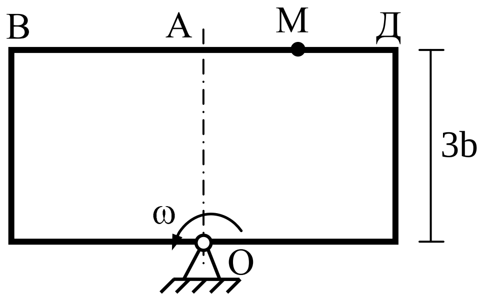


Рисунок К4.0

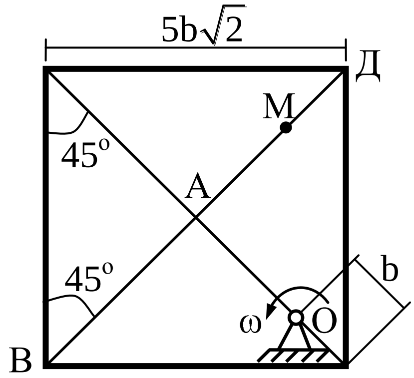


Рисунок К4.1

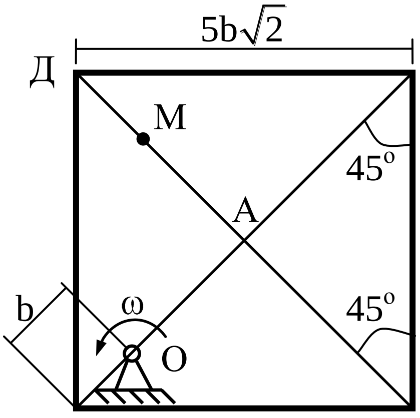


Рисунок К4.2

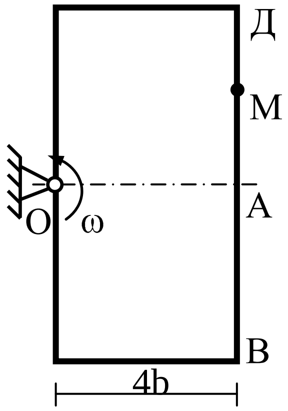


Рисунок К4.3

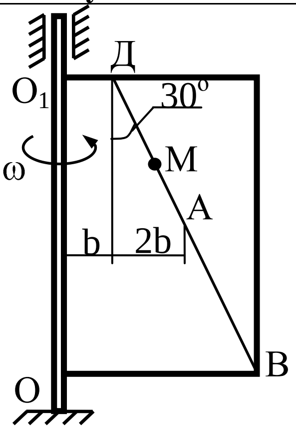


Рисунок К4.4

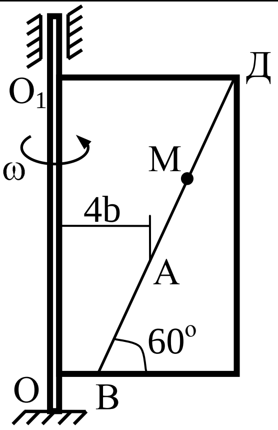


Рисунок К4.5

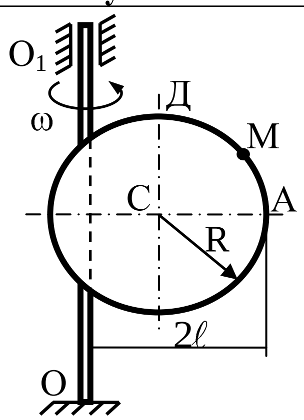


Рисунок К4.6

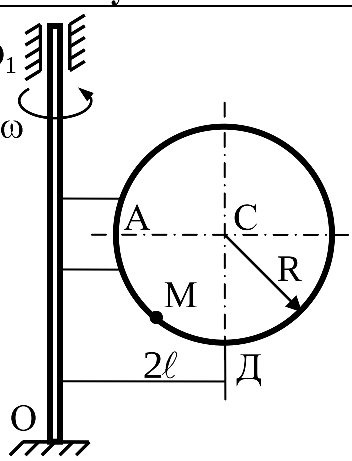


Рисунок К4.7

Продолжение таблицы 13

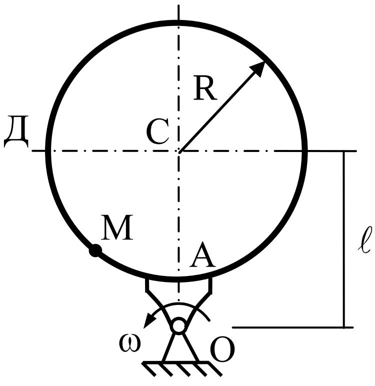
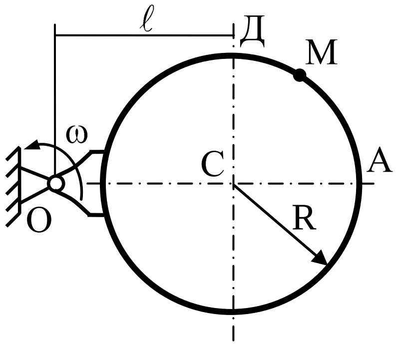
 **Рисунок К4.8**	 **Рисунок К4.9**

Таблица 14 − Данные к задаче К4

№ условия	ω, с $^{-1}$	Рис.0-5		Рис.6-9	
		b, см	$s = AM = f(t)$, см	l	$s = AM = f(t)$, см
0	− 2	16	$60(t^4 - 3t^2) + 56$	R	$\frac{\pi}{3}R(t^4 - 3t^2)$
1	4	20	$60(t^3 - 2t^2)$	R	$\frac{\pi}{3}R(t^3 - 2t)$
2	3	8	$80(2t^2 - t^3) - 48$	R	$\frac{\pi}{6}R(3t - t^2)$
3	− 4	12	$40(t^2 - 3t) + 32$	$\frac{3}{4}R$	$\frac{\pi}{2}R(t^3 - 2t^2)$
4	− 3	10	$50(t^3 - t) - 30$	R	$\frac{\pi}{3}R(3t^2 - t)$
5	2	12	$50(3t - t^2) - 64$	R	$\frac{\pi}{3}R(4t^2 - 2t^3)$
6	4	20	$40(t - 2t^3) - 40$	$\frac{3}{4}R$	$\frac{\pi}{2}R(t - 2t^3)$
7	− 5	10	$80(t^2 - t) + 40$	R	$\frac{\pi}{3}R(2t^3 - 1)$
8	2	8	$60(t - t^3) + 24$	R	$\frac{\pi}{6}R(t - 5t^2)$
9	− 5	16	$40(3t^2 - t^4) - 32$	$\frac{3}{4}R$	$\frac{\pi}{2}R(2t^2 - t^3)$

3.13 Пример выполнения задачи К4

Шар радиуса R= 0,5 м вращается вокруг своего диаметра AB (рисунок 21) по закону $\varphi = -2t$ (φ – в радианах, t – в сек). По дуге большого круга $АДВ$ («меридиану») движется точка M по закон $s = \overset{\smile}{AM} = \dfrac{\pi}{6}R(7t - 2t^2)$ (s – в метрах, t – в сек).

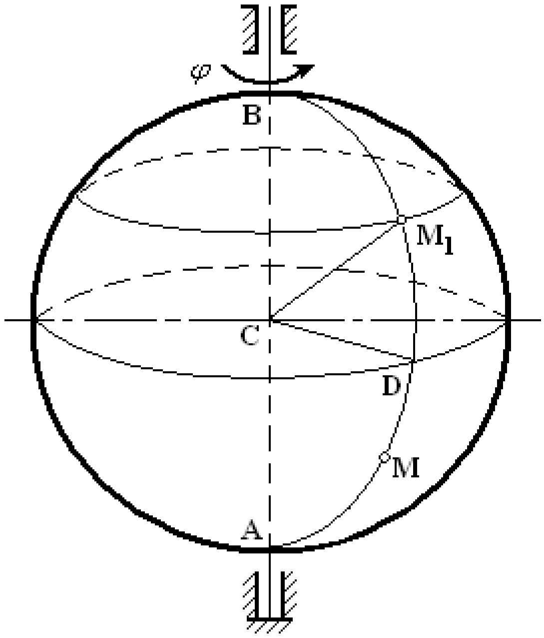


Рисунок 21

<u>Определить</u>: абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени t_1= 1 с.

Решение.

1. Определим абсолютную скорость точки M при t_1= 1 с.

По теореме о сложении скоростей абсолютная скорость точки $\vec{V}_{абс}$ равна геометрической сумме относительной $\vec{V}_{отн}$ и переносной $\vec{V}_{пер}$ скоростям точки, т. е.

$$\vec{V}_{абс} = \vec{V}_{отн} + \vec{V}_{пер}.$$

Относительное движение точки М происходит по дуге окружности AMB (рисунок 22), которое в момент времени t_1 =1 с. занимает положение M_1, определяемое углом $\alpha_1 = s_1 / R = (\pi R/6)(7t_1 - 2t_1^2)/R = 5\pi/6 = 150^0$.

Относительная скорость

$$V_{отн} = \dot{s} = (\pi R/6)\cdot(7 - 4t)|_{t=1} = \pi R/2 = \pi/4 \text{ м/с}.$$

Вектор скорости точки будет направлен по касательной к «меридиану» в сторону возрастания дуги AM_1, так как $V_{отн}$> 0 (рисунок 22).

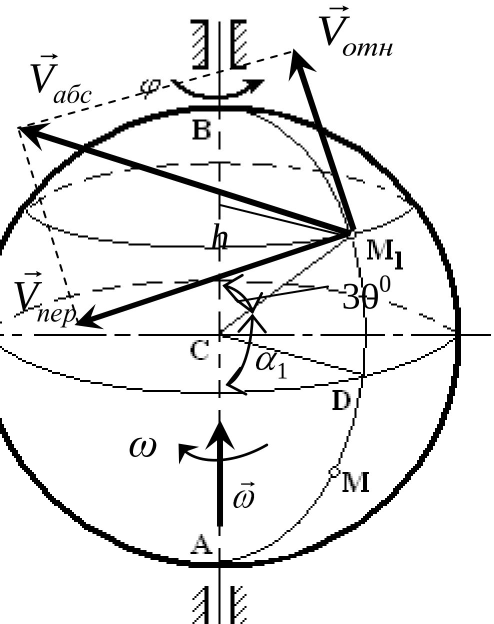


Рисунок 22

Переносное движение точки M_1 – вращательное вместе с шаром.

Шар вращается с угловой скоростью

$$\omega = \dot{\varphi} = -2c^{-1}.$$

Переносная скорость

$V_{пер} = \omega\, h = \omega\, R \sin 30^0 = 0{,}5$ м/с.

Вектор переносной скорости $\vec{V}_{пер}$ точки M_1 будет направлен по касательной к ее переносной траектории (окружность радиуса h) в сторону вращения шара (рисунок 22). Вращение шара будет происходить по часовой скорости (в сторону убывания угла φ) , так как его угловая скорость отрицательная.

Если угол между скоростями $\vec{V}_{отн}$ и $\vec{V}_{пер}$ $-\beta$, то по теореме косинусов

$$\left|\vec{V}_{абс}\right| = \sqrt{V_{отн}^2 + V_{отн}^2 + 2V_{отн}V_{пер}\cos\beta}.$$

В данном случае $\beta = 90^0$, поэтому

$$\left|\vec{V}_{абс}\right| = \sqrt{V_{отн}^2 + V_{отн}^2} = \sqrt{(\pi/4)^2 + (0{,}6)^2} = 0{,}93 \text{ м/с}.$$

Направление вектора $\vec{V}_{абс}$ указано на рисунке 22.

2. Определим векторы, входящие в выражение для абсолютного ускорения точки M при t_1= 1 с.

По теореме Кориолиса абсолютное ускорение точки

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор},$$

где

$$\vec{a}_{отн} = \vec{a}_{отн}^{\tau} + \vec{a}_{отн}^{n},$$

$$\vec{a}_{пер} = \vec{a}_{пер}^{\tau} + \vec{a}_{пер}^{n}.$$

То есть

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{отн}^{\tau} + \vec{a}_{отн}^{n} + \vec{a}_{пер}^{\tau} + \vec{a}_{пер}^{n} + \vec{a}_{кор}. \qquad (a)$$

Найдем каждое из ускорений, входящих в это выражение.

$$a_{отн}^{\tau} = \ddot{s} = -2\pi R/3 = -\pi R/3.$$

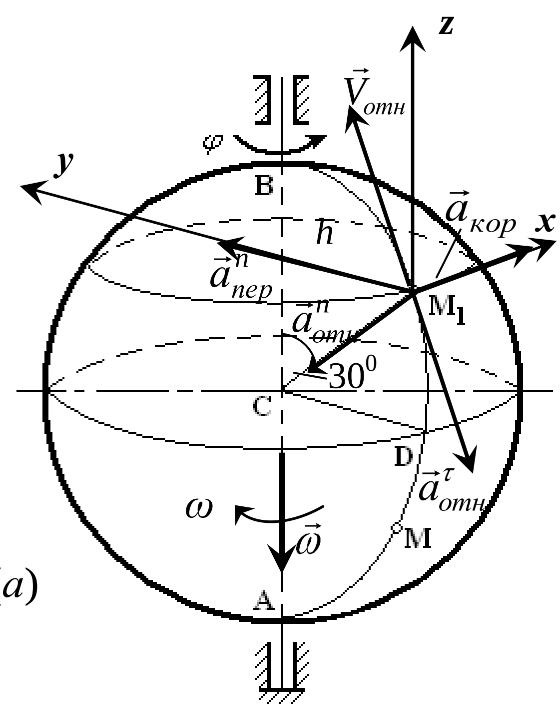


Рисунок 23

Вектор ускорения $\vec{a}_{отн}^{\tau}$ направлен по касательной к «меридиану» в сторону уменьшения дуговой координаты s (рисунок 23).

$$a_{отн}^{n} = V_{отн}^2/\rho_{отн} = \pi^2/(16 \cdot 0{,}5) = \pi^2/8 \quad м/с.$$

Вектор ускорения $\vec{a}_{отн}^{n}$ направлен к центру шара (рисунок 23).

$$a_{пер}^{n} = \omega^2 h = (-2)^2 \cdot 0{,}25 = 1 \quad м/с.$$

Вектор ускорения $\vec{a}_{пер}^{n}$ направлен к оси вращения шара (рисунок 23).

$$a_{пер}^{\tau} = 0, \quad \text{так как} \quad \varepsilon = \dot{\omega} = 0.$$

3. Определим ускорение Кориолиса.

Ускорение Кориолиса равно векторному произведению

$$\vec{a}_{кор} = 2 \ \vec{\omega} \times \vec{V}_{отн}.$$

Модуль Кориолисова ускорения

$$|\vec{a}_{кор}| = 2 \ |\vec{\omega}| \cdot |\vec{V}_{отн}| \cdot \sin 60^0 = 2{,}72 \ \ м/с.$$

Направление Кориолисова ускорения определяется по правилу векторного произведения (рисунок 24), то есть перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{V}_{отн}$, в ту сторону, откуда наименьший поворот от вектора $\vec{\omega}$ к вектору $\vec{V}_{отн}$ виден происходящим против хода часовой стрелки.

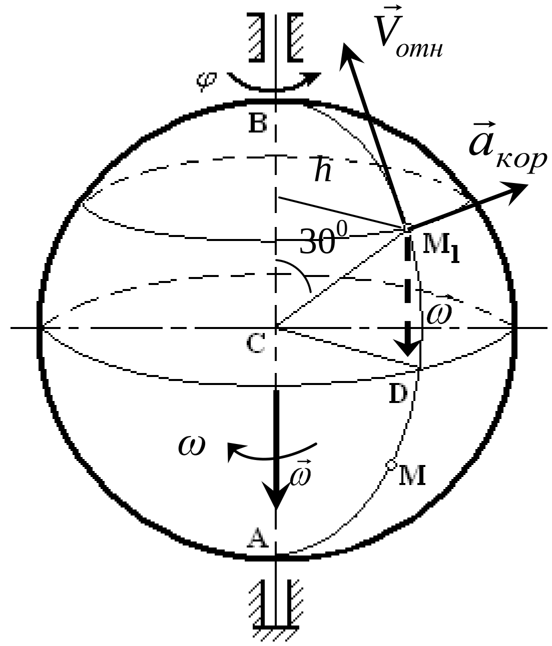


Рисунок 23

4. Определим модуль полного ускорения.

Спроектируем равенство (а) на оси координат (рисунок 22).

$$a_{абсX} = a_{кор} = 2{,}72;$$

$$a_{абсY} = a^n_{пер} + a^n_{отн}\cos 60^0 - |a^\tau_{отн}|\cos 30^0 = 0{,}71;$$

$$a_{абсZ} = -\, a^n_{отн}\cos 30^0 - |a^\tau_{отн}|\cos 60^0 = -\,1{,}59.$$

Модуль полного ускорения

$$|\vec{a}_{абс}| = \sqrt{a^2_{абсX} + a^2_{абсY} + a^2_{абсZ}} = \sqrt{(2{,}72)^2 + (0{,}71)^2 + (-1{,}59)^2} = 3{,}22\,\text{м/с}^2.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

При подготовке Методических указаний были использованы материалы следующих работ:

Цывильский В. Л. Теоретическая механика М., 2001г.

Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов / С.М.Тарг. - 15-е изд., стер. - М.: Высш. шк., 2005. - 415 с.

Яблонский А.А., В.М. Никифорова. Курс теоретической механики. Учеб. пособие для вузов: 13-е изд., исправ. - М.: Интеграл-Пресс, 2006. - 603с.

Курс теоретической механики: Учебник для вузов по направлению подгот. дипломир. специалистов в области техники и технологии/ [В.И.Дронг, В.В.Дубинин, М.М., Ильин и др.]; Под ред.К.С.Колесникова. -3-е изд., стер. М. : Изд- во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. -735 с.- (Механика в техническом университете: В 8 т.; Т.1).

Теоретическая механика. Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников машиностроительных, строительных и др. спец. М., 1989г.