МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕТУРНО - СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра строительной механики

Крекнин А.И.

Теоретическая механика.
Ч. 2 Кинематика

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

для направления подготовки 270800 – «СТРОИТЕЛЬСТВО»
Квалификация (степень) выпускника – бакалавр,
форма обучения - очная

Тюмень, 2011

УДК 531/534
К -79

Крекнин А. И. Теоретическая механика. Ч. 2. Кинематика: Методическое пособие по организации самостоятельной работы студентов для направления подготовки 270800 – «СТРОИТЕЛЬСТВО», Квалификация (степень) выпускника – бакалавр, форма обучения - очная – Тюмень: РИО ФГБОУ ВПО ТюмГАСУ, 2011. – 67 с.

Пособие разработано на основании рабочих программ ФГБОУ ВПО ТюмГаСУ дисциплины «Теоретическая механика» для направления подготовки 270800 – «СТРОИТЕЛЬСТВО», Квалификация (степень) выпускника – бакалавр, форма обучения - очная. Пособие предлагает методические указания и задания по организации самостоятельной работы студентов по двум основным направлениям: подготовка к практическим занятиям, выполнение и защита расчетно – графических работ. В целях оптимизации времени, затрачиваемого студентом на самостоятельную работу, в сборник включен справочник по основным теоретическим положениям дисциплины. Задания позволяют обеспечить дифференцированный подход к студентам в зависимости от уровня их базовой подготовки.

Рецензент: Нарута Т.А.

Тираж: 200 экз.
Заказ №

Редакционно-издательский центр ГОУ ВПО «Тюменский государственный архитектурно – строительный университет»

Содержание

1 ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1 Роль и направления самостоятельной работы студентов при изучении курса «Теоретическая механика»

При изучении дисциплины «Теоретическая механика» студенты в соответствии с ГОС и Рабочими программами помимо работы на лекциях и практических занятиях обязаны заниматься самостоятельной работой, общие направления и порядок осуществления которых определены Положением об организации внеаудиторной самостоятельной работы студентов ГОУ ВПО ТюмГАСУ, утвержденным ректором университета 28 января 2009 года.

Объемы самостоятельной работы определяются Укрупненными планами дисциплины, находящимися в составе рабочих Программ и учебными планами дисциплины (таблицы 1,2).

Таблица 1 − Укрупненный план дисциплины «Теоретическая механика» (специальность АДиА)

№ п/п	Наименование части курса	Всего часов	Количество часов		
			лекций	практических занятий	самостоятельной работы
1	Статика	67	17	17	33
2	Кинематика	68	17	17	34
3	Динамика	135	34	34	67
	Итого	270	68	68	134

Таблица 2 − Укрупненный план дисциплины «Теоретическая механика» (специальности ПГС, ВиВ, ТГВ, ЭУН)

№ п/п	Наименование части курса	Всего часов	Количество часов		
			лекций	практических занятий	самостоятельной работы
1	Статика	60	17	17	26
2	Кинематика	60	17	17	26
3	Динамика	90	17	34	39
	Итого	210	51	68	91

Как это следует из таблиц 1,2 объем часов, отводимых на самостоятельную работу студентов, составляет 43 – 50 % от общего объема часов отводимых ГОС на изучение дисциплины, в том числе по статике.

Основными направлениями самостоятельной работы студентов по дисциплине являются:

1. Подготовка к практическим занятиям;
2. Выполнение и защита расчетно – графических работ.

Подготовка к практическим занятиям в основном заключается в повторении теоретического материала по теме предстоящего занятия.

Основная часть самостоятельной работы приходится на выполнение, оформление и защиту индивидуальных расчетно – графических работ (далее по тексту – РГР). РГР выполняются по ключевым темам дисциплины. Во втором семестре изучаются две первые части дисциплины «Теоретическая механика» – «Статика» и «Кинематика». В соответствии с Рабочими программами по специальностям АДиА, ПГС, ВиВ, ТГВ, ЭУН по каждой части дисциплины выполняется одна РГР, то есть в семестре всего две РГР.

1.2 Подготовка к практическим занятиям по кинематике

Подготовка к практическим занятиям является обязательным элементом учебного процесса по дисциплине. Студент готовится к предстоящему занятию по вопросам, определенным преподавателем на предшествующем занятии (таблица 3). Для подготовки к практическому занятию достаточно материала содержащегося в справочниках настоящего сборника. Основные определения, теоремы, выводы и формулы должны быть выучены наизусть.

Полезно составлять список возникших при подготовке теории вопросов, которые можно прояснить на практическом занятии. Преподаватель на практическом занятии ведет устный или письменный опрос студентов. Результаты опросов учитываются при аттестациях студентов и их допуске к экзамену.

Таблица 3 − Примерный перечень вопросов для подготовки к практическим занятиям по кинематике

№ занятия	Тема занятия	Перечень вопросов	Номер в Справочнике
1	**2**	**3**	**4**
1	Вводное занятие	–	–
2	Кинематика точки	− основные понятия и исходные положения кинематики точки	2.1.1
		− основная задача кинематики точки	2.1.2
		− задание (описание) движения тела (точки)	2.1.3
		− способы задания движения точки	2.1.4

Продолжение таблицы 3

1	2	3	4
2	Кинематика точки	– кинематические характеристики точки при векторном способе задания движения	2.1.5
		– кинематические характеристики точки при координатном способе задания движения	
3	Кинематика точки	– способы задания движения точки	2.1.4
		– кинематические характеристики точки при координатном способе задания движения	2.1.5
		– кинематические характеристики точки при естественном способе задания движения	
		– частные случаи движения точки	2.1.6
4	Кинематика твердого тела (поступательное и вращательное движение)	– задачи кинематики твердого тела	2.3.1
		– виды движения твердого тела	2.3.2
		– поступательное движение твердого тела	2.3.3
		– определение кинематических характеристик твердого тела и его точек при поступательном движении	
		– вращательное движение твердого тела	2.3.4
		– кинематические характеристики вращающегося тела	
		– частные случаи вращения тела	
		– кинематические характеристики точек вращающегося тела	
5	Кинематика твердого тела (плоскопараллельное движение)	– плоское движение (общие определения)	2.3.5
		– кинематические характеристики плоского движения	
		– определения скоростей точек плоской фигуры через геометрическую сумму (с помощью полюса)	
		– определения скоростей точек с применением теоремы о проекциях скоростей 2 - х точек	
6	Кинематика твердого тела (плоское движение)	– Определения скоростей точек плоской фигуры с применением м.ц.с.	2.3.5
		– Случаи построения м.ц.с.(общий и частные)	
7	Кинематический анализ плоских механизмов	– определение кинематических характеристик твердого тела и его точек при поступательном движении	2.3.3
		– кинематические характеристики вращающегося тела	2.3.4
		– кинематические характеристики точек вращающегося тела	
		– определения скоростей точек при плоском движении с применением теоремы о проекциях скоростей 2-х точек	2.3.5
		– Определения скоростей точек плоской фигуры с применением м.ц.с.	
8	Определения ускорений точек плоской фигуры	– определения ускорений точек плоской фигуры через геометрическую сумму (с применением полюса)	

Продолжение таблицы 3

1	2	3	4
9	Сложное движение точки (определение скоростей)	– понятие сложного движения точки	2.2.1
		– понятие относительного движения точки	2.2.2
		– понятие переносного движения точки	2.2.3
		– понятие абсолютного движения точки	2.2.4
		– определение скорости точки при сложном движении (теорема о сложении скоростей)	2.2.5
10	Сложное движение точки (определение ускорений)	– теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса)	2.2.5
		– определение модуля и направления кориолисова ускорения	
		– случаи отсутствия кориолисова ускорения	

1.3 Общие требования, предъявляемые к выполнению, оформлению и защите РГР

К каждой задаче, входящей в состав РГР дается 10 рисунков и таблица, содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рисунок К1.4 – это рисунок 4 к задаче К1а и т. д. Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце таблицы.

Номера вариантов для выполнения РГР определяет преподаватель.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по последней цифре варианта, а номер условия в таблице – по предпоследней; например, для варианта 46 берутся рисунок 6 и условие 4 из таблицы.

Каждое задание выполняется на листах формата А4, страницы нумеруются. На обложке указывается: название дисциплины, номер РГР, фамилия и инициалы студента, вариант (учебный шифр), факультет, специальность, номер группы, номер семестра и учебный год (образец титульного листа – Приложение Г).

Решение каждой задачи обязательно начинать на новом листе. Решения оформляются на одной стороне листа.

Сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано, и что требуется определить (текст задачи не переписывается). *Чертеж выполняется с учетом условия решаемого варианта задачи*; на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение должны соответствовать этим условиям.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др. Показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы получаемых величин *нужно обязательно*. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы и теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) и *подробно излагать весь ход расчетов*.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращены для переделки.

Работа, которая выполнена и оформлена правильно, должна быть защищена. Защита проводится на консультациях, назначенных преподавателем. Во время защиты студент обязан ответить на вопросы по задачам, а также на другие вопросы по теме, к которой относится задача. Примерный перечень вопросов по темам дан в приложениях А – В. Также по усмотрению преподавателя во время защиты студенту может быть предложена для решения задача по данной теме.

Правильно выполненные и защищенные задачи в виде сшитой папки с соответствующим титульным листом (Приложение Г) предъявляются преподавателю по мере их выполнения или на экзамене (зачете).

Альтернативная форма защиты задач. По усмотрению преподавателя по каждой из основных тем курса могут проводиться аудиторные контрольные работы. Положительная оценка по контрольной работе может быть основанием для освобождения студента от защиты соответствующей задачи (задач). Кроме того, оценки «хорошо» и «отлично» по контрольным работам, с учетом активной работы в семестре и верно выполненных РГР могут быть основанием для освобождения студента от экзамена (получение автоматических оценок за экзамен).

По кинематике выполняются РГР, состоящая из перечня задач, указанных в таблице 4.

Таблица 4 − Примерный перечень задач, входящих в РГР по кинематике

№ п/п	Тема	Название задачи
1	Кинематика точки	Кинематический анализ движения точки
2	Вращательное движение тела	
3	Кинематика твердого тела	Кинематический анализ плоского четырехзвенного механизма
4	Сложное движение точки	Определение кинематических характеристик при сложном движении точки

<u>При невыполнении или отказе от защиты РГЗ студент не допускается к экзамену, как не выполнивший учебный план по дисциплине.</u>

2 КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК ПО КИНЕМАТИКЕ

Тема 2.1 Основные понятия и исходные положения кинематики точки

2.1.1 Основные понятия

Кинематика

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их инертности (массы) и действующих на них сил.

Система отсчета

Для определения положения движущегося тела (или точки) в разные моменты времени вводят систему отсчета (систему координат), которую жестко связывают с некоторым телом. Движение тела (точки) по отношению к системе отсчета – это движение по отношению к телу, с которым связана система отсчета. Изображают систему отсчета в виде трех координатных осей.

Пространство

Пространство в механике рассматривается как трехмерное евклидово пространство. Все измерения в нем производятся на основании методов евклидовой геометрии. За единицу длины при измерении расстояний принимается 1 м.

Время

а) свойство времени, принятое в механике

Время в механике считается универсальным, т. е. протекающим одинаково во всех рассматриваемых системах отсчета. За единицу времени принимается 1 с.

б) характеристики универсального времени

Время t – скалярная, непрерывно изменяющаяся, величина, которая принимается в кинематике за независимую переменную (аргумент). Все другие переменные величины (расстояния, скорости и т.д.) рассматриваются как функции времени.

Начальным моментом времени ($t_0 = 0$) называется установленное в каждом случае начало отсчета времени t.

Фиксированным моментом времени T (или t_1) называется неизменяемая величина, определяемая числом секунд, прошедших от начального до фиксированного момента времени.

Данным (текущим) моментом времени t, называется величина, определяемая числом секунд, прошедших от начального до данного (текущего) времени. Промежутком времени Δt называется разность между какими – нибудь последовательными моментами времени: $\Delta t = t_2 - t_1$.

2.1.2 Основная задача кинематики точки

Состоит в том, чтобы, зная закон движения точки (тела), установить методы определения всех кинематических величин, характеризующих данное движение.

2.1.3 Задание (описание) движения тела (точки)

Задания (описания) движения

Кинематически задать (описать) движение тела (точки) – значит, задать положение этого тела (точки) в любой момент времени.

Траектория точки

Непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно данной системы отсчета, называется траекторией точки.

Виды движения (траектории) точки

Движение точки называется прямолинейным, если ее траекторией является прямая линия, а если кривая – криволинейным.

2.1.4 Способы задания движения точки

Различают три способа задания движения точки:

а) векторный,

б) координатный,

в) естественный.

Векторный способ задания движения точки

Для того чтобы задать движение точки векторным способом необходимо знать зависимость радиус-вектора $\vec{r}$ от времени, то есть $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Это равенство определяет *закон движения точки* в векторной форме.

Геометрическое место концов вектора $\vec{r}$, то есть *годограф* этого вектора (рисунок 1), определяет траекторию точки *M*. Если ввести единичные векторы (орты) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k},$ то для $\vec{r}$ имеет место выражение $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где x, y, z – координаты точки *M* (рисунок 1).

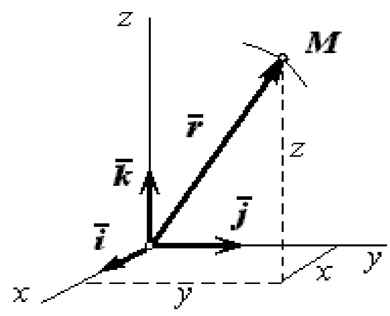


Рисунок 1

Координатный способ задания движения точки

Для того, чтобы задать движение точки координатным способом необходимо знать значения координат точки (рисунок 1) для каждого момента времени, то есть знать зависимости:

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \qquad z = f_3(t).$$

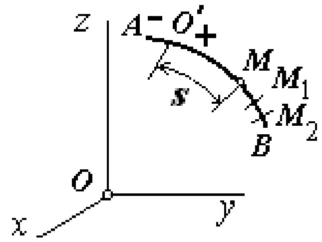
Эти уравнения называются *уравнениями движения точки в прямоугольных декартовых координатах*.

При движении точки в плоскости уравнения движения будут иметь вид:

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t).$$

При прямолинейном движении точки имеет место одно уравнение движения (закон прямолинейного движения точки) $x = f(t)$.

Естественный способ задания движения точки



Для того чтобы задать движение точки естественным способом, надо знать (рисунок 2):

а) траекторию точки,

б) начало отсчета дуговой координаты s с указанием положительного и отрицательного направления ее отсчета s,

Рисунок 2

в) закон движения точки по траектории в виде $s = s\ (t)$.

<u>Примечание.</u> $O'M = s$ (рисунок 2) не является путем, пройденным точкой, а определяет положение точки на траектории, поэтому s называют *дуговой координатой*.

2.1.5 Кинематические характеристики (скорость и ускорение) точки

При векторном способе задания движения

<u>а) вектор скорости точки:</u>

Вектор скорости точки в данный момент времени равен первой производной от радиус-вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$ точки по времени, то есть:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

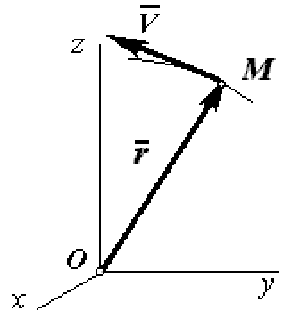


Рисунок 3

Вектор скорости $\vec{V}$ в данный момент времени направлен по касательной к траектории точки в сторону движения (рисунок 3).

б) вектор ускорения точки:

Вектор ускорения точки $\vec{a}$ в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости точки или второй производной от радиус-вектора точки, т. е.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

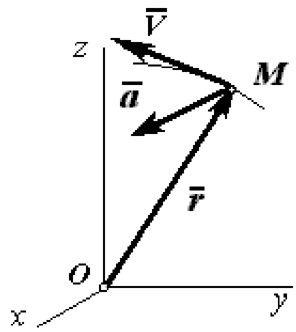


Рисунок 4

Вектор ускорения $\vec{a}$ лежит в соприкасающейся плоскости и *направлен в сторону вогнутости* кривой, по которой движется точка (рисунок 4).

Примечание. Соприкасающаяся плоскость – плоскость, в которой происходит бесконечно малый поворот касательной к траектории при элементарном перемещении движущейся точки. Для плоской кривой соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью этой кривой и является общей для всех ее точек.

При координатном способе задания движения

а) определение скорости точки:

Проекции скорости точки на координатные оси равны первым производным от соответствующих координат точки по времени, то есть

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x},$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y},$$

$$V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Модуль и направление скорости точки определяются по формулам:

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^2 + V_z^{\,2}},$$

$$\cos\alpha = V_x / |\vec{V}|, \quad \cos\beta = V_y / |\vec{V}|, \quad \cos\gamma = V_z / |\vec{V}|.$$

Здесь α, β, γ - углы, которые составляет вектор скорости $\vec{V}$ с единичными векторами (ортами) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ координатных осей.

б) определение ускорения точки:

Проекции ускорения точки на координатные оси равны первым производным от соответствующих проекций скорости точки или вторым производным от соответствующих координат точки, то есть

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = \frac{dV_x}{dt} = \dot{V}_x,$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} = \frac{dV_y}{dt} = \dot{V}_{\ddot{y}},$$

$$a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} = \frac{dV_z}{dt} = \dot{V}_z.$$

Модуль и направление ускорения точки определяются по формулам:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$cos\ \alpha_1 = a_x / |\vec{a}|, \quad cos \beta_1 = a_y / |\vec{a}|, \quad cos \gamma_1 = a_z / |\vec{a}|.$$

Здесь α_1, β_1, γ_1 - углы, которые составляет вектор ускорения $\vec{a}$ с единичными векторами (ортами) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ координатных осей.

При естественном способе задания ее движения

Оси естественного трехгранника

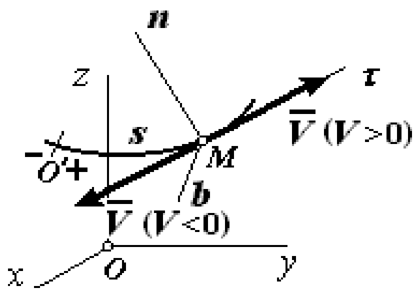


Рисунок 5

Осями естественного трехгранника (или скоростными осями) называются подвижные оси $M\tau nb$, имеющие начало в точке M и движущиеся вместе с ней (рисунок 5).

Эти оси направлены:

<u>ось $M\tau$</u> - по касательной к траектории в сторону положительного отсчета координаты s;

<u>ось Mn</u> (главная нормаль) – по нормали к траектории, лежащей в соприкасающейся плоскости и направленной в сторону вогнутости траектории;

<u>ось Mb</u> (бинормаль) – перпендикулярно к первым двум осям так, чтобы она образовывала с ними правую систему координат.

а) определение скорости точки:

Вектор скорости точки $\vec{V}$ направлен по касательной к ее траектории. Он проектируется только на ось $M\tau$, то есть $|\vec{V}| = |V_\tau|$. Алгебраическое значение скорости точки (проекция вектора скорости точки на касательную $M\tau$) $V = V_\tau$ в данный момент времени равно первой производной от координаты s этой точки по времени, то есть

$$V = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$

Если $V > 0$, то скорость направлена в сторону возрастания s (рисунок 5), если $V < 0$ (рисунок 5), то в сторону убывания.

б) Определение ускорения точки

Ускорение точки равно геометрической сумме двух векторов (рисунок 6), один из которых направлен по главной нормали и называется *нормальным ускорением* $\vec{a}_n$, а другой направлен по касательной и называется *касательным ускорением* $\vec{a}_\tau$, то есть

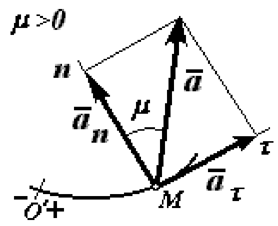


Рисунок 6

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau.$$

Модуль нормального ускорения определяется по формуле

$$a_n = V^2/\rho,$$

где ρ - радиус кривизны кривой в данной точке M.

Алгебраическая величина $\vec{a}_\tau$ определяется по формуле

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Проекция ускорения на бинормаль $a_b = 0$.

Модуль полного ускорения определяется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2},$$

а угол отклонения его от главной нормали μ – по формуле tg $\mu = a_\tau/a_n$, где $-\pi/2 \le \mu \le \pi/2$; при $\mu > 0$ вектор отклонен от нормали Mn в сторону оси $M\tau$ (рисунок 6), а при $\mu < 0$ – в противоположную сторону (рисунок 7).

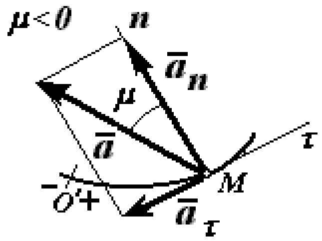


Рисунок 7

2.1.6 Частные случаи движения точки

Прямолинейное движение

Если траектория точки – прямая линия, то $\rho = \infty$ и $a_n = V^2/\infty = 0$, то есть ускорение точки равно только одному касательному ускорению: $\vec{a} = \vec{a}_\tau$.

<u>Физический смысл нормального ускорения.</u>

Нормальное ускорение характеризует изменение направления скорости точки.

Равномерное криволинейное движение

Равномерным называется такое криволинейное движение точки, в котором числовое значение скорости все время остается постоянным:

$$V = const.$$

Так как $a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0$, то ускорение точки равно только $\vec{a} = \vec{a}_n$

Закон движения точки в этом случае имеет вид: $s = s_O + V \cdot t$.

Физический смысл касательного ускорения.

Касательное ускорение характеризует изменение скорости точки по величине.

Равномерное прямолинейное движение

Так как движение прямолинейное, то $a_n = V^2/\infty = 0$ $(\rho = \infty)$.

Так как движение равномерное ($V = const$), то $a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0$.

Вывод. Это единственное движение, в котором ускорение все время равно нулю.

Равнопеременное криволинейное движение

Равнопеременным называется такое криволинейное движение точки, в котором касательное ускорение всё время остается постоянным: $a_\tau = const$.

При этом виде движения точки ее скорость изменяется по закону:

$$V = V_O + a_\tau \cdot t.$$

Закон движения точки имеет вид:

$$s = s_0 + V_0 \cdot t + a_\tau \cdot t^2/2.$$

Ускоренное и замедленное движение

Движение точки называется *ускоренным*, если модуль скорости возрастает, и *замедленным*, если убывает.

Движение будет ускоренным, если знаки V и a_τ совпадают, и замедленным, если знаки противоположные.

Ускоренное равнопеременное криволинейное движение точки называется *равноускоренным*, а замедленное – *равнозамедленным*.

Гармонические колебания

Движения точки, происходящие по закону:

$$x = A \cdot \cos(kt),$$

называются *гармоническими колебаниями*.

Величина A, равная наибольшему отклонению точки от центра колебаний O, называется *амплитудой* колебаний.

Промежуток $T = 2\pi / k$, в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется *периодом колебаний*.

Скорость и ускорение точки при гармонических колебаниях изменяются по гармоническим законам:

$$V = V_x = -A \cdot k \cdot \sin(kt), \quad a = a_x = -A \cdot k^2 \cdot \cos(kt).$$

Тема 2.2 Сложное движение точки

2.2.1 Понятие сложного движения точки

Сложным называется движение точки, происходящее одновременно по отношению к двум системам отсчета, из которых одна $O_1x_1y_1z_1$ считается основной (или условно неподвижной), а другая $Oxyz$ движется по отношению к первой (рисунок 8).

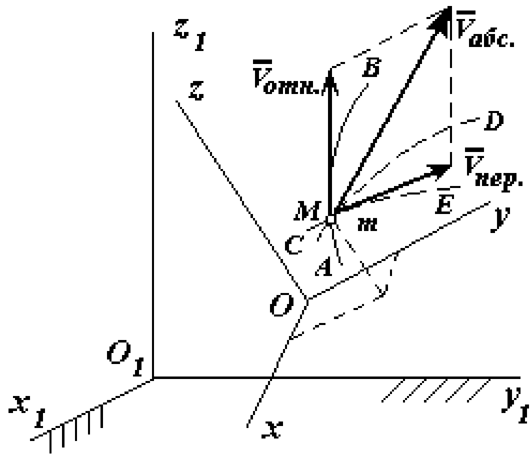


Рисунок 8

Сложное движение точки (траектория CD) разлагается на два более простых (рисунок 8): движение по отношению к подвижной системе отсчета (траектория AB) и движение вместе с подвижной системой по отношению к неподвижной (траектория ME).

2.2.2 Понятие относительного движения точки

Относительное движение

Движение, совершаемое точкой M по отношению к подвижной системой отсчета $Oxyz$, называется *относительным движением* (рисунок 8).

Относительная траектория

Траектория AB, описываемая точкой в относительном движении (по отношению к подвижной системе отсчета $Oxyz$), называется *относительной траекторией* (рисунок 8).

Относительная скорость

Скорость точки M по отношению к осям $Oxyz$ (рисунок 8) называется *относительной скоростью* (обозначается $\vec{V}_{отн.}$ или $\vec{V}_r$).

Относительное ускорение

Ускорение точки M по отношению к осям $Oxyz$ называется относительным ускорением (обозначается $\vec{a}_{отн}$. или $\vec{a}_r$).

2.2.3 Понятие переносного движения точки

Переносное движение

Движение, совершаемое точкой M вместе с подвижной системе отсчета $Oxyz$ по отношению к неподвижной $Ox_1y_1z_1$, называется (рисунок 8).

Переносная траектория

Траектория MD, описываемая точкой в переносном движении, называется *переносной траекторией* (рисунок 8).

Переносная скорость

Скорость точки m подвижной системы отсчета (рисунок 8), совпадающей с движущейся точкой M, называется *переносной скоростью* (обозначается $\vec{V}_{пер.}$ или $\vec{V}_e$).

Переносное ускорение

Ускорение точки m подвижной системы отсчета, совпадающей с движущейся точкой M, называется *переносным ускорением* (обозначается $\vec{a}_{пер}$. или $\vec{a}_e$).

2.2.4 Понятие абсолютного движения точки

Абсолютное движение

Движение, совершаемое точкой M по отношению к неподвижной системе отсчета $Ox_1y_1z_1$, называется *абсолютным движением* (рисунок 8).

Абсолютная траектория

Траектория CD (рисунок 8), описываемая точкой в абсолютном движении, называется *абсолютной траекторией.*

Абсолютная скорость

Скорость точки M в абсолютном движении называется *абсолютной скоростью* (обозначается $\vec{V}_{абс.}$ или $\vec{V}$).

Абсолютное ускорение

Ускорение точки M - в абсолютном движении называется *абсолютным ускорением* (обозначается $\vec{a}_{абс}$. или $\vec{a}$).

2.2.5 Определение кинематических характеристик точки при сложном движении точки

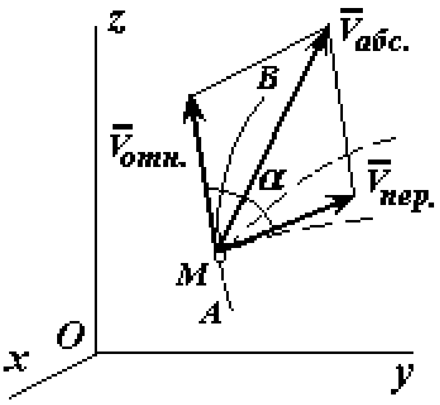


Рисунок 9

Определение скорости точки (теорема о сложении скоростей)

Теорема. При сложном движении абсолютная скорость точки $\vec{V}_{абс.}$ равна геометрической сумме относительной $\vec{V}_{отн.}$ и переносной $\vec{V}_{пер.}$ скоростей (рисунок 9), то есть:

$$\vec{V}_{абс.} = \vec{V}_{отн.} + \vec{V}_{пер.}.$$

Если угол между $\vec{V}_{отн.}$ и $\vec{V}_{пер.}$ $-\ \alpha$, то

$$|\vec{V}_{абс.}| = \sqrt{V^2_{отн.} + V^2_{пер.} + 2V_{отн.}V_{пер}\cos\alpha}.$$

Определение ускорения точки. Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса)

Теорема. При сложном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, переносного и поворотного, или кориолисова.

$$\vec{a}_{абс.} = \vec{a}_{отн.} + \vec{a}_{пер.} + \vec{a}_{кор.}$$

где:

$\vec{a}_{отн.}$ – относительное ускорение, характеризующее изменение относительной скорости только при относительном движении;

$\vec{a}_{пер.}$ – переносное ускорение, характеризующее изменение переносной скорости только при переносном движении;

$\vec{a}_{кор.} = 2\vec{\omega}_{пер.} \times \vec{V}_{отн.}$ – кориолисово (поворотное) ускорение, характеризующее изменение относительной скорости при переносном движении и переносной скорости точки при ее относительном движении.

Теорема о сложении ускорений в случае поступательного переносного движения

Теорема. При поступательном переносном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного и переносного ускорений.

$$\vec{a}_{абс.} = \vec{a}_{отн.} + \vec{a}_{пер.}.$$

Определение модуля кориолисова ускорения

Модуля Кориолисова ускорения определится по формуле:

$$a_{\text{кор}} = |2\vec{\omega}_{пер.} \times \vec{V}_{отн.}| = 2 \cdot |\vec{\omega}_{пер.}| \cdot |\vec{V}_{отн.}| \cdot \sin\alpha.$$

Случаи отсутствия кориолисова ускорения

а) $a_{\text{кор}} = 0$, если $\omega_{пер.} = 0$ (нет переносного вращения);

б) $a_{\text{кор}} = 0$, если вектор относительной скорости $V_{отн.}$ параллелен оси переносного вращения ($\alpha = 0$ или $\alpha = 90^0$);

в) $a_{\text{кор}} = 0$, или если $V_{отн.} = 0$.

Определение направления кориолисова ускорения

а) по правилу векторного произведения (рисунок 10);

Рисунок 10

б) по правилу Жуковского

Чтобы найти направление кориолисового ускорения, следует спроектировать относительную скорость точки на плоскость, перпендикулярную к оси переносного вращения, и повернуть эту проекцию в той же плоскости на угол 90^0 в сторону переносного вращения (рисунок 11).

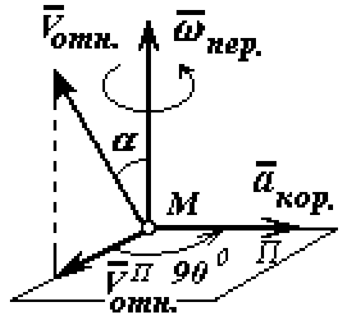


Рисунок 11

Определение модуля и направления абсолютного ускорения точки

Модуль и направление абсолютного ускорения точки определяются по методу проекций:

$$a_{абсX} = a_{отнX} + a_{перX} + a_{корX},$$

$$a_{абсУ} = a_{отнУ} + a_{перУ} + a_{корУ},$$

$$a_{абсZ} = a_{отнZ} + a_{перZ} + a_{корZ},$$

тогда модуль и направление вектора $\vec{a}_{абс.}$ определются по формулам:

$$|\vec{a}_{абс}| = \sqrt{a^2_{абсX} + a^2_{абсУ} + a^2_{абсZ}},$$

$$cos\alpha = a_{абсX} / |\vec{a}_{абс.}|, \quad cos\beta = a_{абсУ} / \vec{a}_{абс.}|, \quad cos\gamma = a_{абсZ} / |\vec{a}_{абс.}|.$$

Тема 2.3 Кинематика твердого тела

2.3.1. Задачи кинематики твердого тела

В кинематике твердого тела рассматриваются две основные задачи:

1) задание движения и определение кинематических характеристик тела в целом;

2) определение кинематических характеристик движения отдельных точек тела.

2.3.2 Виды движения твердого тела

Различают следующие виды движения твердого тела:

а) поступательное,

б) вращательное,

в) плоскопараллельное (плоское),

г) сферическое (движение тела с одной неподвижной точкой),

д) движение свободного твердого тела.

Замечание. Поступательное и вращательное движения тела называют *простейшими*.

2.3.3 Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению (рисунок 12).

Замечание. Поступательное движение не следует путать с прямолинейным движением.

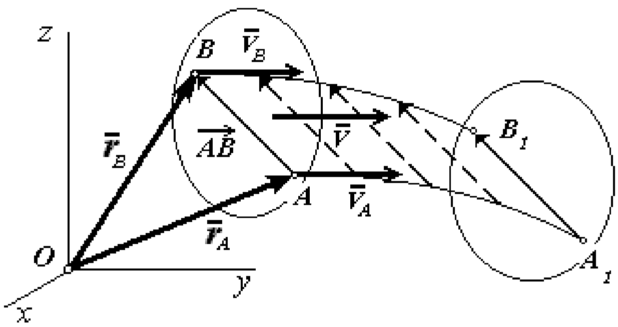


Рисунок 12

Определение кинематических характеристик твердого тела и его точек при поступательном движении

Теорема. При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости (рисунок 12) и ускорения (рисунок 13) , то есть: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{const}$, $\vec{V}_A=\vec{V}_A=\vec{V}$, $\vec{a}_A=\vec{a}_A=\vec{a}$.

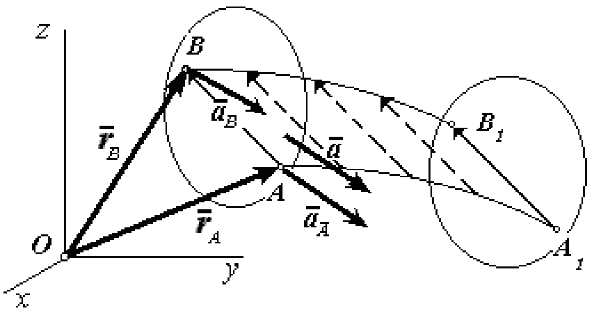


Рисунок 13

<u>Вывод.</u> Поступательное движение твердого тела определяется движением какой-нибудь одной его точки. Следовательно, *изучение поступательного движения тела сводится к задаче кинематики точки*.

При поступательном движении общую для всех точек тела скорость $\vec{V}$ называют *скоростью поступательного движения тела*, а ускорение $\vec{a}$ – *ускорением поступательного движения тела*.

2.3.4 Вращательное движение твердого тела

Определение и закон вращательного движения твердого тела

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во время движения неподвижными (рисунок 14).

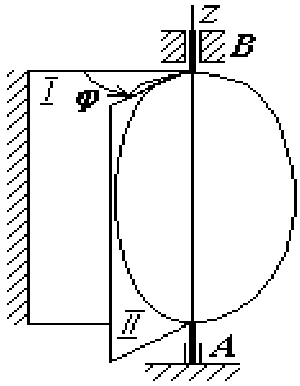


Рисунок 14

Прямая *AB,* проходящая через неподвижные точки *A* и *B*, называется *осью вращения*.

Угол φ между полуплоскостями *I* и *II*, определяющий положение тела, называется *углом поворота.*

Угол φ измеряется *в радианах,* и считается положительным, если он отложен от неподвижной плоскости в направлении против хода часовой стрелки (для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси *Az*) и отрицательным, если по ходу часовой стрелки.

Закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$\varphi = \varphi(t).$$

Кинематические характеристики вращающегося тела

Угловая скорость

Величина, характеризующая быстроту изменения угла поворота тела φ, называется *угловой скоростью* ω *тела*.

Угловая скорость ω определяется по формуле

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

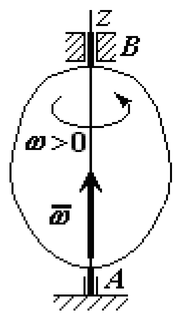


Рисунок 15

Если вращение происходит против хода часовой стрелки, то $\omega > 0$ (рисунок 15), если по ходу часовой стрелки, то $\omega < 0$ (рисунок 16).

Размерность $[\omega] = 1/с = с^{-1}$.

Угловую скорость можно *изобразить в виде вектора* $\vec{\omega}$, модуль которого равен $|\vec{\omega}|$ и который направлен (рисунки 15, 16) вдоль оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение тела видно происходящим против хода часовой стрелки.

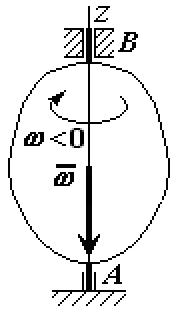


Рисунок 16

Угловое ускорение

Величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости, называется угловым ускорением ε тела.

Угловое ускорение определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}.$$

Размерность $[\varepsilon] = 1/\text{с}^2 = \text{с}^{-2}$.

Если величины ω и ε имеют одинаковые знаки, то вращение называется ускоренным (модуль $\vec{\omega}$ возрастает), если знаки разные, то – замедленным (модуль $\vec{\omega}$ убывает).

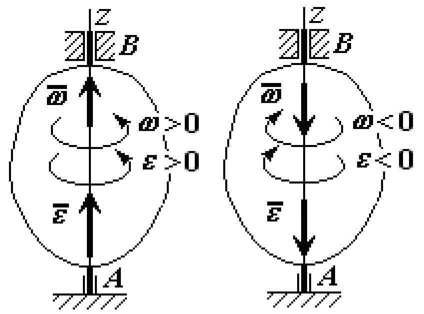


Рисунок 17

Угловое ускорение можно *изобразить в виде вектора* $\vec{\varepsilon}$, модуль которого равен $|\vec{\varepsilon}|$ и который направлен вдоль оси вращения тела (рисунки 17, 18).

Если вращение ускоренное, то векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ направлены в одну сторону (рисунок 17), если замедленное, то – в противоположные стороны (рисунок 18).

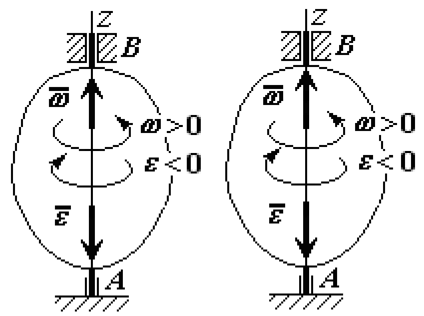


Рисунок 18

Частные случаи вращения тела

Равномерное вращение

Вращение тела называется равномерным, если угловая скорость тела остается во все время движения постоянной ($\omega = const$).

Закон равномерного вращения имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t,$$

а при $\varphi_0 = 0$ вид:

$$\varphi = \omega t \quad \text{и} \quad \omega = \varphi / t.$$

В технике скорость равномерного вращения часто определяют числом оборотов в минуту - n об/мин. Связь между ω и n вытекает из закона равномерного вращения и имеет вид: $\omega = \pi \cdot n/30 \approx 0{,}1 \cdot n$.

Равнопеременное вращение

Вращение тела называется равнопеременным, если угловое ускорение тела остается во все время движения постоянным ($\varepsilon = const$).

Закон равнопеременного вращения имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t + \varepsilon \cdot t^2/2,$$

а закон изменения угловой скорости вид:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t.$$

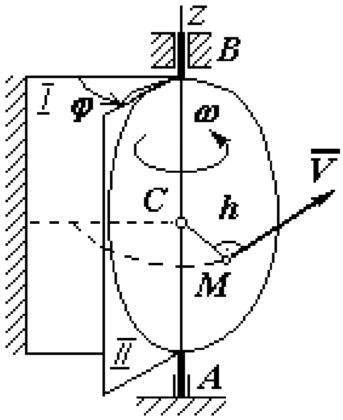
Если величины ω и ε имеют одинаковые знаки, вращение будет равноускоренным, а если разные – равнозамедленным.

Кинематические характеристики точек вращающегося тела

Скорости точек вращающегося тела

Скорость точки вращающегося тела в отличие от угловой скорости называется линейной (или окружной) скоростью.

Численное значение скорости точки M вращающегося тела равно произведению угловой скорости ω тела на расстояние от этой точки до оси вращения h (рисунок 19), то есть:



$$\underline{V_M = \omega \cdot CM = \omega \cdot h.}$$

Рисунок 19

Вектор скорости точки M вращающегося тела *направлен* по касательной к описываемой точкой окружности в сторону вращения тела и перпендикулярно отрезку CM, соединяющему ось вращения и точку M (рисунок 19).

<u>Свойство линейных скоростей точек вращающегося тела.</u>

Скорости точек вращающегося тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения, то есть, чем дальше точка находится от оси, тем больше ее скорость (поле скоростей точек, расположенных на прямой, проходящей через ось вращения, изображено на рисунке 20).

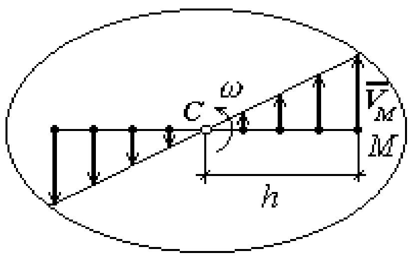


Рисунок 20

Ускорения точек вращающегося тела

Полное ускорение точки вращающегося тела $\vec{a}$ равно геометрической сумме касательного $\vec{a}_\tau$ и нормального $\vec{a}_n$ ускорений (рисунок 21), то есть:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \,.$$

Модули составляющих векторов определяются по формулам:

$$a_\tau = \varepsilon \cdot h, \quad a_n = \omega^2 \cdot h.$$

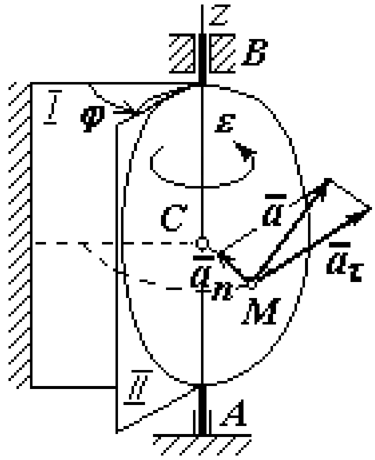


Рисунок 21

Касательное ускорение $\vec{a}_\tau$ направлено по касательной к траектории (в сторону ε), а нормальное $\vec{a}_n$ – по радиусу MC к оси вращения (рисунок 22).

Модуль полного ускорения точки M:

$$a = \sqrt{a_n{}^2 + a_\tau{}^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \,.$$

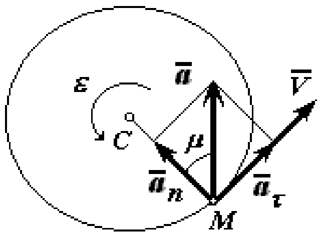


Рисунок 22

Модуль полного ускорения $\vec{a}$ пропорционален расстоянию h от вращающейся точки до оси вращения, то есть чем дальше точка от оси вращения, тем больше ее полное ускорение (рисунок 23).

Отклонение вектора полного ускорения $\vec{a}$ от радиуса окружности определяется углом μ, при этом

$$tg\,\mu = a_\tau / a_n = \varepsilon / \omega^2.$$

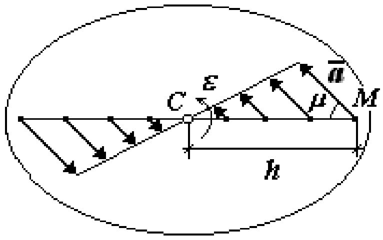


Рисунок 23

Угол μ не зависит от расстояния h (рисунок 23).

Представление векторов скорости и ускорения точки в виде векторного произведения

Вектор скорости любой точки вращающегося тела равен векторному произведению угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки (рисунок 24), то есть:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

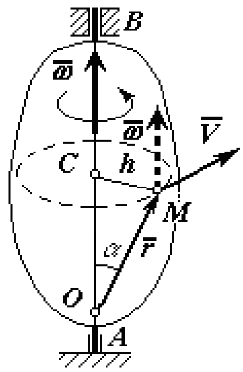


Рисунок 24

Касательное ускорение представляется в виде векторного произведения (рисунок 25)

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \quad x \quad \vec{r},$$

нормальное ускорение – в виде векторного произведения (рисунок 25)

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \quad x \quad \vec{V}.$$

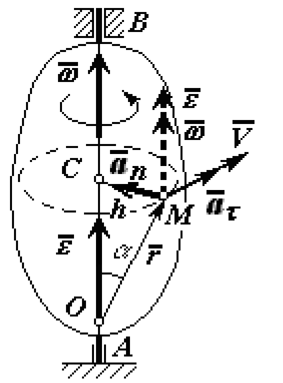


Рисунок 25

2.3.5 Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела

Плоское движение (общие определения)

Плоскопараллельным (плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются *в плоскости, параллельной некоторой фиксированной плоскости П* (рисунок 26).

Все точки тела, лежащие на прямой $MM^{/}$ (рисунок 26) движутся тождественно, то есть, нет необходимости изучать движение всего тела, а *достаточно изучить движение сечение S* этого тела в плоскости *Oxy* (рисунок 26).

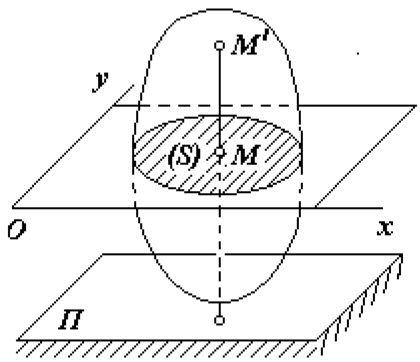


Рисунок 26

Плоской фигурой называется сечение *(S)* тела параллельное плоскости *П*, по отношению к которой движется тело.

Произвольная точка *A*, выбранная для определения положения плоской фигуры *(S)*, называется *полюсом* (рисунок 27).

В качестве *полюса* может быть выбрана *любая точка* плоской фигуры (рисунок 27).

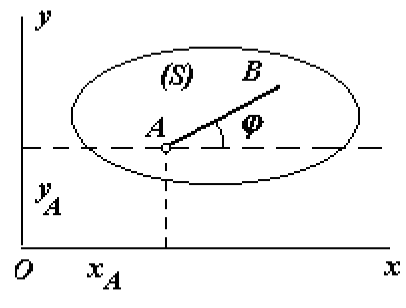


Рисунок 27

Уравнения плоского движения твердого тела

Так как тело абсолютно твердое, то положение плоской фигуры в любой момент времени определится любым отрезком *AB* (рисунок 27), проведенным из полюса *A*. Положение отрезка *AB* можно определить, зная координаты полюса x_A, y_A и угол φ, который отрезок *AB* образует с осью *Ox* (рисунок 27).

Положение плоской фигуры в ее плоскости в любой момент времени определяется зависимостями $x_A = f_1(t)$, $y_A = f_2(t)$, $\varphi = f_3(t)$, которые называются *уравнениями движения плоской фигуры* или *уравнениями плоского движения твердого тела*.

Разложение плоского движения

Плоское движение твердого тела можно рассматривать как *слагающееся из поступательного движения вместе с полюсом А и вращательного* вокруг оси, перпендикулярной плоскости *П* (рисунок 26) и проходящей через полюс *А*.

Кинематические характеристики плоского движения

Поскольку плоское движение раскладывается на простейшие движения: поступательное вместе с полюсом и вращательное вокруг полюса, то кинематическими характеристиками плоского движения будут: скорость $\vec{V}_A$ ускорение $\vec{a}_A$ полюса, а также угловая скорость ω и угловое ускорение ε вращательного движения вокруг полюса**.**

Вращательная часть движения (ω и ε) от выбора полюса не зависит.

Кинематические характеристики (скорость и ускорение) точки при плоском движении тела

Скорости точек тела при его плоском движении определяются тремя способами:

а) через геометрическую сумму (с помощью полюса);

б) с применением теоремы о проекциях скоростей двух точек тела;

в) с помощью мгновенного центра скоростей (м. ц. с.).

Ускорение точки плоской фигуры определяют с помощью полюса.

Определения скоростей точек плоской фигуры через геометрическую сумму (с помощью полюса)

Исходя из разложения плоского движения на простейшие (поступательное вместе м полюсом и вращательное вокруг полюса) скорость любой точки плоской фигуры будет геометрически складываться из скорости какой-нибудь другой точки, принятой за полюс, и скорости, которую точка *М* получает при вращении фигуры вокруг полюса (рисунок 28), то есть:

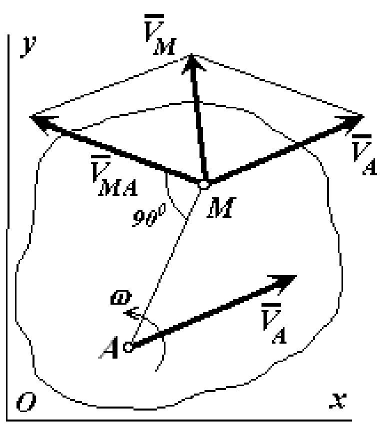


Рисунок 28

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA},$$

где $V_{MA} = \omega \cdot MA$.

Вектор скорости $\vec{V}_{MA}$ направлен перпендикулярно к отрезку MA и в сторону вращения плоской фигуры вокруг полюса (рисунок 28).

Модуль вектора скорости произвольной точки M определяется по методу проекций.

$$V_{Mx} = V_{Ax} + V_{MAx},$$
$$V_{My} = V_{Ay} + V_{MAy}.$$

Тогда модуль скорости

$$\vec{V}_M = \sqrt{V_{Mx}^2 + V_{My}^2},$$

Направление вектора скорости находится с помощью направляющего косинуса

$$\cos(\alpha) = V_{Mx} / |\vec{V}_M|,$$

где α - угол между вектором скорости точки и осью Оx.

Определения скоростей точек с применением теоремы о проекциях скоростей 2 - х точек

Проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки (рисунок 29), равны друг другу, то есть:

$$\text{пр.}_{AB}(\vec{V}_A) = \text{пр.}_{AB}(\vec{V}_B)$$

или

$$V_A\cos(\alpha) = V_B\cos(\beta). \text{ Откуда } V_B = V_A\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}.$$

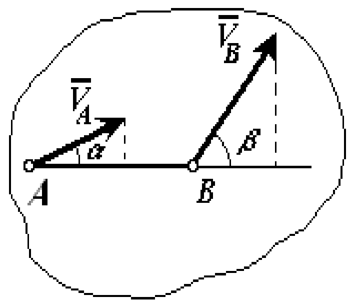


Рисунок 29

Определения скоростей точек плоской фигуры с применением м.ц.с.

Мгновенным центром скоростей (м.ц.с.) называется точка плоской фигуры, *скорость которой* в данный момент времени *равна нулю*.

Выводы:

1) плоская фигура в данный момент времени совершает *мгновенный поворот вокруг м.ц.с.* (рисунок 30), поэтому скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг м.ц.с. т.е. величина скорости произвольной точки M плоской фигуры определится по формуле (рисунок 30):

$$V_M = \omega \cdot MP.$$

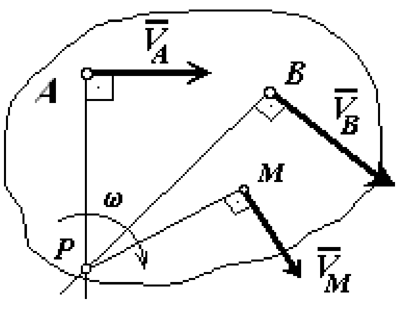


Рисунок 30

Вектор скорости $\vec{V}_M$ направлен в сторону вращения плоской фигуры перпендикулярно к отрезку, соединяющему эту точку с м.ц.с.(рисунок 30).

2) скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от м.ц.с., т.е.: $\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}$.

3) угловая скорость ω плоской фигуры в каждый данный момент времени равна отношению скорости какой-нибудь точки плоской фигуры (например точки B) к расстоянию от этой точки до м.ц.с., то есть: $\omega = \frac{V_B}{PB}$

Случаи построения м.ц.с.

Общий случай

Для определения м.ц.с. необходимо знать только направление скоростей двух точек A и B плоской фигуры (или траектории этих точек), так как м.ц.с. находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек A и B к скоростям этих точек (или к касательным к траекториям) (рисунок 30).

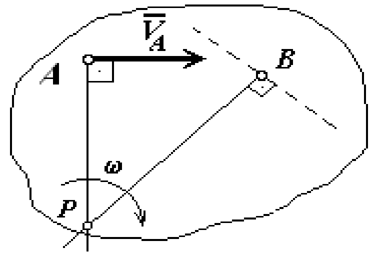


Рисунок 30

Частные случаи

1) качение без скольжения одного цилиндрического тела по поверхности другого неподвижного (рисунок 31).

М.ц.с. находится в точке касания тел P, так как $V_P = 0$.

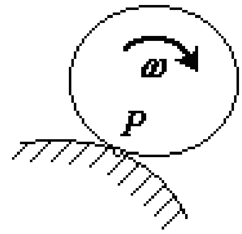


Рисунок 31

2) мгновенно поступательное движение тела (рисунок 32).

Скорости двух точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу и линия AB, соединяющая точки, не перпендикулярна векторам скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ (рисунок 32).

М.ц.с. лежит в бесконечности (рисунок 32); скорости всех точек плоской фигуры равны по величине и по направлению

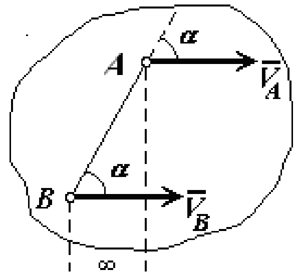


Рисунок 32

3) Скорости точек плоской фигуры A и B параллельны друг другу, направлены в одну сторону и не равны по модулю, при этом прямая AB перпендикулярна к скоростям этих точек фигуры (рисунок 33).

М.ц.с. определяется построением, как на рисунке 33.

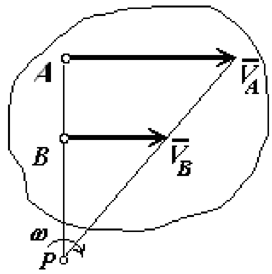


Рисунок 33

4) Скорости точек плоской фигуры A и B параллельны друг другу, направлены в разные стороны, при этом прямая AB перпендикулярна к скоростям этих точек фигуры (рисунок 34).

М.ц.с. определяется построением, как на рисунке 34.

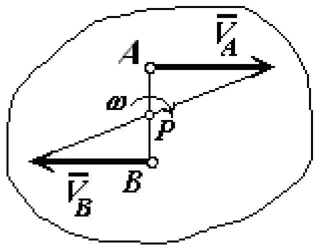
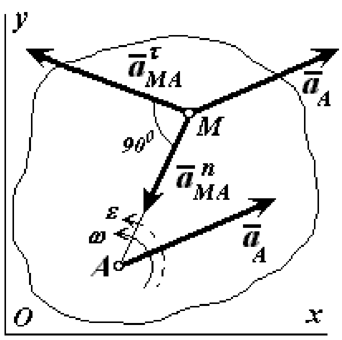


Рисунок 34

Определения ускорений точек плоской фигуры через геометрическую сумму (с применением полюса)

Ускорение любой точки плоской фигуры M - $\vec{a}_M$ геометрически складывается из ускорения $\vec{a}_A$ какой-нибудь другой точки A, принятой за полюс, и ускорения $\vec{a}_{MA}$, которое возникает при вращении фигуры вокруг полюса, то есть

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}.$$



Ускорение $\vec{a}_{MA}$ раскладывается на касательное $\vec{a}^{\tau}_{MA}$ и нормальное $\vec{a}^{n}_{MA}$ ускорения (рисунок 35), то есть

Рисунок 35

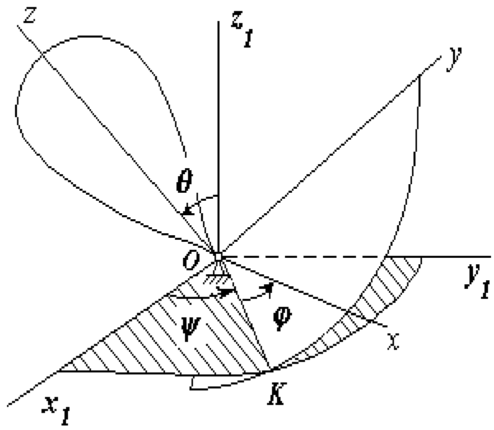
$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{MA} + \vec{a}^{n}_{MA}.$$

Вектор ускорения $\vec{a}^{\tau}_{MA}$ направлен перпендикулярно отрезку MA в сторону ε, а его величина определяется по формуле $a^{\tau}_{MA} = \varepsilon \cdot MA$ (рисунок 35).

Вектор ускорения $\vec{a}^{n}_{MA}$ направлен к полюсу A, а его величина находится по формуле $a^{n}_{MA} = \omega^2 \cdot MA$ (рисунок 35).

2.3.6 Сферическое движение твердого тела

Движение тела, когда одна его точка остается в любой момент времени неподвижной (рисунок 36) называется *сферическим.*



Линия OK называется линией узлов.

Углы φ, ψ, θ, определяющие положение тела, называются углами Эйлера (рисунок 36):

Рисунок 36

φ - угол собственного вращения (угол между линией узлов и осью Ox подвижной системы координат);

ψ - угол прецессии (угол между осью Ox_1 и линией узлов);

θ - угол нутации (угол между осями Oz_1 и Oz).

<u>Уравнения сферического движения тела :</u> $\varphi = f_1(t), \quad \psi = f_2(t), \quad \theta = f_3(t).$

2.3.7 Движение свободного твердого тела (общий случай)

Свободным называется движение твердого тела, когда оно может перемещаться как угодно по отношению к неподвижной системе отсчета $Oxyz$.

Движение свободного твердого тела раскладывается на поступательное движение вместе с полюсом A (произвольная точка тела) и сферическое вокруг полюса (рисунок 37).

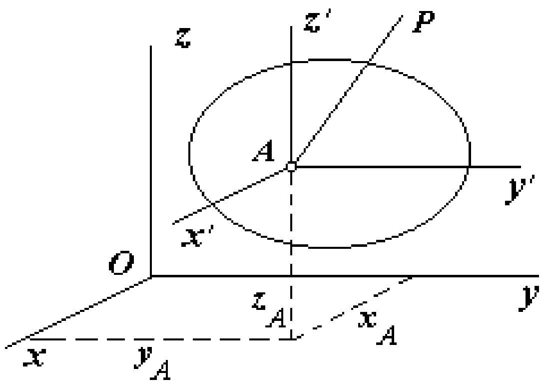


Рисунок 37

Уравнения движения, позволяющие найти положение тела в любой момент времени будут иметь вид:

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad z_A = f_3(t),$$
$$\varphi = f_4(t), \quad \psi = f_5(t), \quad \theta = f_6(t),$$

где

x_A, y_A, z_A - координаты полюса A,

φ, ψ, θ - углы Эйлера, определяющие сферическое движение тела вокруг полюса.

3 РАСЧЕТНО – ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ПО КИНЕМАТИКЕ

3.1 Задача К1

Кинематический анализ движения точки

Точка M движется в плоскости xy (таблица 5; траектория точки на рисунках показана условно). Даны уравнения движения точки $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, где x, y выражены в сантиметрах, t – в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1$ с определить скорость, ускорение и радиус кривизны траектории.

Зависимость $x = f_1(t)$ указана непосредственно на рисунках, а зависимость $y = f_2(t)$ дана в таблице 6 (для рисунков 0 – 2 в столбце 2, для рисунков 3 – 6 в столбце 3, для рисунков 7 – 9 в столбце 4).

Указание. Задача К1 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки).

В данной задаче все искомые величины нужно определить для момента времени $t_1 = 1$ с.

Таблица 5– Рисунки к вариантам задачи К1

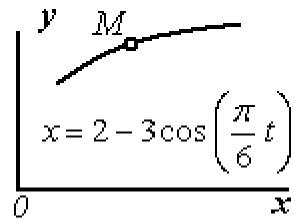


Рисунок К1.0

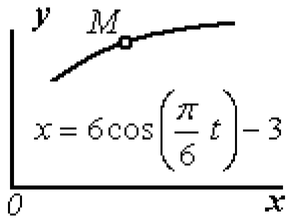


Рисунок К1.1

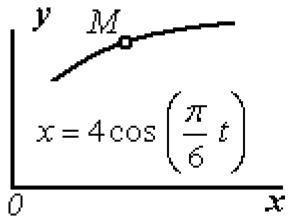


Рисунок К1.2

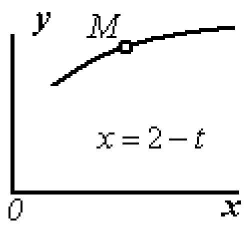


Рисунок К1.3

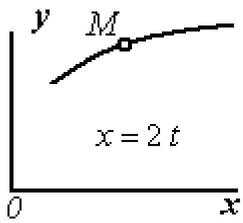


Рисунок К1.4

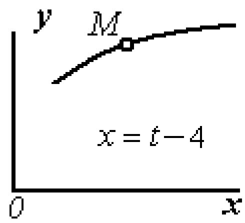


Рисунок К1.5

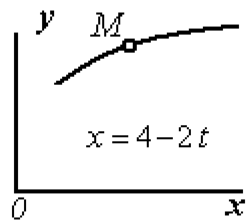


Рисунок К1.6

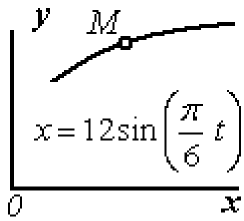


Рисунок К1.7

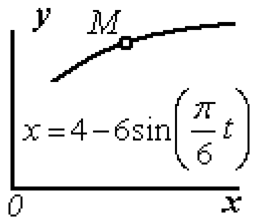


Рисунок К1.8

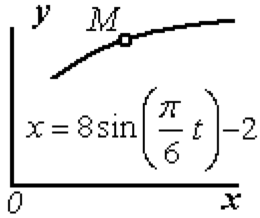


Рисунок К1.9

Таблица 6 − Условия к вариантам задач К1

Номер условия	Уравнение движения точки $y = f_2(t)$		
	Рисунки 0 – 2	Рисунки 3 – 6	Рисунки 7 – 9
1	**2**	**3**	**4**
0	$12\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^2+2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)-2$
1	$-4-6\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3-2t^3$	$14-16\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
2	$-3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(2+t)^2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
3	$9\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)-4$	$2t^3$	$-10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
4	$3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)-2$	$(5+2t)^2$	$-4\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
5	$-10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2-3t^2$	$8-12\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
6	$2-6\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$1-3t^2$	$3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
7	$2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)-2$	$(t+1)^3$	$6-8\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
8	$9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)+5$	$2-t^3$	$9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)-3$
9	$3-8\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3t^2+1$	$-6\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

3.2 Пример решения задачи К1

Точка M движется в плоскости xy. Даны уравнения движения точки

$$x = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right), \qquad (a)$$

$$y = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 4, \qquad (b)$$

где x, y выражены в сантиметрах, t – в секундах.

Определить уравнение траектории точки, для момента времени t_1 = 1c найти положение точки на траектории, скорость, ускорение, радиус кривизны траектории и установить вид движения точки.

Решение.

1. Определим вид траектории.

Движение точки M заданы координатным способом (уравнения (а) и (b)).

Используя известную из тригонометрии формулу $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, можно время t исключить из уравнений движения точки. Преобразуя уравнения, возводя обе их части в квадрат и складывая, получим

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{4-y}{3}\right)^2 = \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\ t\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\ t\right)\right)^2 = 1.$$

Это уравнение эллипса, то есть, траекторией движения точки M является эллипс (рисунок 38). Так как при различных значениях t x пробегает все значения интервала [– 2, 2], а y – все значения интервала [1, 7], то весь эллипс является траекторией точки (рисунок 38).

Центр эллипса имеет координаты: $x_C = 0$, $y_C = 4$. Полуоси эллипса a =2 см, b = 3 см.

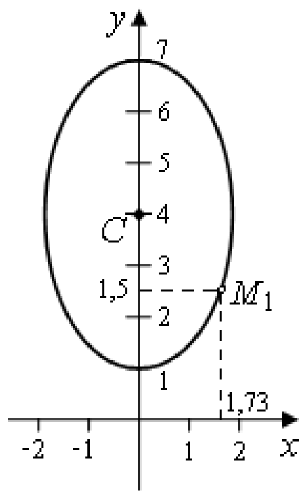


Рисунок 38

2. Определим положение точки на траектории.

Подставляя время t_1 = 1c в уравнения (а) и (b), получим:

$$x_1 = 2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot 1}{3}\right) = 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = 1{,}73 \quad см.$$

$$y_1 = -3\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot 1}{3}\right) + 4 = -3\cdot\cos in\left(\frac{\pi}{3}\right) + 4 = 2{,}5 \quad см.$$

Точку с координатами x_1, y_1 обозначим на траектории M_1 (рисунок 38).

3. Определим скорость точки.

Скорость $\overline{V}$ точки M определяем через ее проекции V_x, V_y.

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)\right) = 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)\cdot\frac{\pi}{3};$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-3\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 4\right) = 3\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)\cdot\frac{\pi}{3}.$$

Тогда модуль скорости определится по формуле $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$.

При $t_1 = 1$ c

$$V_{x1} = 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3} = 1{,}05 \quad {}^{см}\!/_{c};$$

$$V_{y1} = 3\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{\pi}{3} = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{3} = 2{,}72 \quad {}^{см}\!/_{c}.$$

Величина скорости

$$V_1 = \sqrt{(1{,}05)^2 + (2{,}72)^2} = 2{,}92 \quad {}^{см}\!/_{c}.$$

Построим вектор скорости $\vec{V_1}$ в точке M_1 (рисунок 39) по проекциям V_{1x} и V_{1y}. Отложим в точке M_1 проекции вектора скорости $\vec{V_1}$ в выбранном масштабе (рисунок 39) с учетом их знаков.

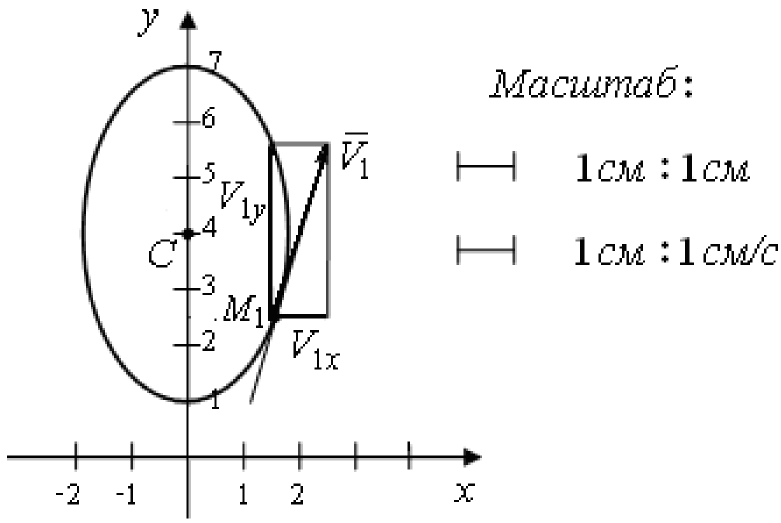


Рисунок 39

Вектор $\vec{V}_1$ − диагональ прямоугольника, сторонами которого являются проекции V_{1x} и V_{1y}.

Правильность построения вектора скорости $\vec{V}_1$ проверяется проведением касательной к эллипсу в точке M_1, вдоль которой он должен быть направлен.

4. Определим ускорение точки.

Вектор ускорения $\vec{a}$ точки M_1 находим аналогично, т.е. через его проекции на оси координат a_x и a_y.

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)\cdot\frac{\pi}{3}\right) = -2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^2;$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d}{dt}\left(3\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)\cdot\frac{\pi}{3}\right) = 3\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^2.$$

Тогда модуль ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

В момент времени t_1 = 1 *с*

$$a_{x1} = -2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 = -1{,}9 \ \ см/с^2;$$

$$a_{y1} = 3\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 = 1{,}64 \ \ см/с^2.$$

Величина ускорения

$$a_1 = \sqrt{(-1{,}9)^2 + (1{,}64)^2} = 2{,}51 \ \ см/с^2.$$

Построим вектор ускорения $\vec{a}_1$ в точке M_1 по его проекциям. Отложим в точке M_1 параллельно осям x, y в выбранном масштабе проекции a_{x1} и a_{y1} с учетом их знаков (рисунок 40)

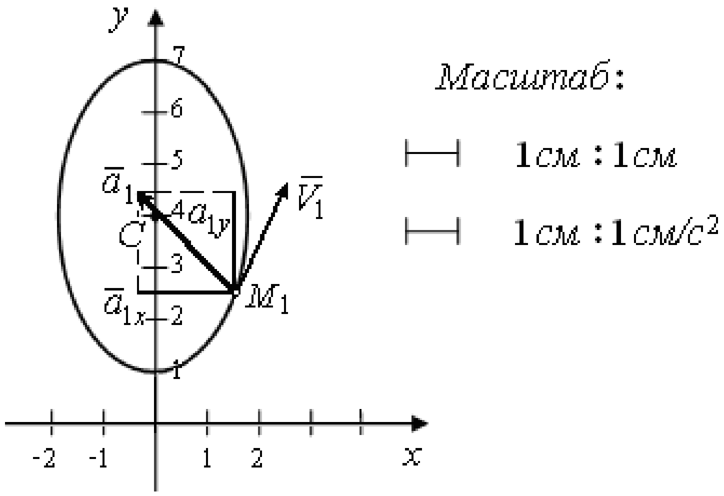


Рисунок 40

Вектор $\vec{a}_1$ – диагональ прямоугольника, сторонами которого являются проекции a_{x1} и a_{y1}. Верность построения вектора ускорения $\vec{a}_1$ проверяется его направленностью в сторону вогнутости траектории.

Найденные векторы скорости и ускорения точки позволяют сделать вывод: точка M совершает в данный момент t_1 *криволинейное ускоренное движение*, т.к. угол между векторами $\vec{V}_1$ и $\vec{a}_1$ острый.

5. Определим радиус кривизны траектории при $t_1 = 1$ с.

Найдем производную

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d(\sqrt{V_x^2 + V_y^2})}{dt} = \frac{2V_x a_x + 2V_y a_y}{2\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}.$$

При $t_1 = 1$ с.

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t_1=1} = \frac{V_{x1}a_{x1} + V_{y1}a_{y1}}{V_1} = \frac{1{,}05 \cdot (-1{,}9) + 2{,}72 \cdot 1{,}64}{2{,}92} = \frac{-1{,}995 + 4{,}4008}{2{,}92} = 0{,}84.$$

Так как

$$a_\tau = \frac{dV}{dt},$$

то $a_{\tau 1} = 0{,}84$ *см/с*^{2}.

Модуль полного ускорения точки при $t_1 = 1$с.

$$a_1 = \sqrt{a_{\tau 1}^2 + a_{n1}^2},$$

Откуда

$$a_{n1} = \sqrt{a_1^2 - a_{\tau 1}^2} = \sqrt{(2{,}51)^2 - (0{,}84)^2} = \sqrt{6{,}3 - 0{,}71} = 2{,}36 \quad см/с^2.$$

Из формулы для нормального ускорения

$$a_{n1} = \frac{V_1^2}{\rho_1}$$

при t_1 = 1с имеем,

$$\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_{n1}} = \frac{(2{,}92)^2}{2{,}36} = 3{,}61 \quad см.$$

3.3. Контрольная работы к РГР К1 и пример ее выполнения

Образец контрольной работы к РГР К1

Контрольная работа к РГР К1 состоит из трех заданий:

1) определить кинематические характеристики точки при координатном способе задания ее движения;

2) определить кинематические характеристики точки при естественном способе задания ее движения;

3) ответить на 2 вопроса из Приложения А.

Таблица 7 − Образец варианта контрольной работы по теме «Кинематика точки»

Задание 1	Задание 2
Даны уравнения движения точки $x = \cos(\pi t)$ *см;* $y = \sin(\pi t)$ *см.* Определить уравнение траектории, модуль скорости и ускорения точки, а также положение точки на траектории в момент времени t_1 = 1*с*.	Задано уравнение движения точки по криволинейной траектории: $s = -0{,}2t^2 + 0{,}3t$ м. Определить скорость и полное ускорение точки в момент времени t_1 = 3*с*., если радиус кривизны траектории в данный момент ρ = 1,5 м. Также определить вид движения точки (равномерное, равнопеременное, криволинейное, прямолинейное и т.д.)
Задание 3 1. Раскрыть физический смысл нормального ускорения. 2. Дать определение кинематики.	

Выполнение заданий из образца контрольной работы по теме «Кинематика точки»

Задание 1.

1. Для определения уравнения траектории в обычной координатной форме, исключим время t из уравнений движения. Возведем уравнения в квадрат и сложим:

$$x^2 + y^2 = \cos^2(\pi t) + \sin^2(\pi t).$$

Так как $\cos^2(\pi t) + \sin^2(\pi t) = 1$, то получим:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Это выражение есть уравнение окружности радиуса один сантиметр.

Положение точки на траектории при $t_1 = 1c$ определяется координатами:

$$x_1 = \cos(\pi t)\,|_{t=1} = \cos\pi = -1\ \textit{см}; \qquad y_1 = \sin(\pi t)\,|_{t=1} = \sin\pi = 0.$$

2. Определим модуль скорости точки.

Проекции скорости на оси координат найдем по формулам:

$$V_x = \dot{x} = -\pi\sin(\pi t); \qquad V_y = \dot{y} = \pi\cos(\pi t).$$

Тогда модуль скорости точки

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(\sin^2(\pi t) + \cos^2(\pi t))\cdot\pi^2} = \pi \text{ см/с}.$$

3. Определим модуль ускорения точки.

Проекции ускорения на оси координат:

$$a_x = \ddot{x} = -\pi^2\cos(\pi t); \qquad a_y = \ddot{y} = -\pi^2\sin(\pi t).$$

Модуль ускорения

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Задание 2.

Для выполнения задания воспользуемся выводами и формулами из пунктов 2.1.5 Справочника.

1. Скорость точки $V = \dfrac{ds}{dt} = \dot{s} = -0{,}2\cdot 2\cdot t + 0{,}3.$

При $t_1 = 3$ *сек* найдем:

$$V_1 = (-0{,}2\cdot 2\cdot t + 0{,}3)|_{t=3} = -0{,}9 \text{ см/с}.$$

2. Ускорение точки.

Касательное ускорение $a_\tau = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2} = -0{,}2\cdot 2 = -0{,}4$ см/с^2 = const.

Знаки скорости и касательного ускорения совпадают, поэтому движение точки будет ускоренным. Более того, движение является равноускоренным, так как a_τ = const.

Нормальное ускорение точки при $t = t_1$: $a_{n1} = V_1^2/\rho ==$ 0,54 см/с^2.

Модуль полного ускорения точки при $t = t_1$

$$|\vec{a}_1| = \sqrt{(-0{,}4)^2 + 0{,}54^2} = \sqrt{0{,}16 + 0{,}29} = 0{,}67 \text{ см/с}^2.$$

Задание 3.

При подготовке к выполнению задания необходимо выучить теоретические положения по вопросам Приложения А.

Ответ на первый вопросы Задания дан в Справочника.

3.4 Задача К1

Кинематический анализ системы трех вращающихся тел

Механизм состоит из ступенчатых колес 1 – 3, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки 4 и груза 5, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес (таблицы 8,9). Радиусы ступеней колес равны соответственно: колеса 1 – r_1 = 2*см*, R_1 = 4*см*, у колеса 2 – r_2 = 6 *см*, R_2 = 8 *см*, у колеса 3 – r_3 = 12 *см*, R_3 = 12 *см*. На ободьях колес расположены точки *A, B, C*.

В столбце «Дано» таблицы 9 указан закон движения рейки или закон изменения угловой скорости ведущего колеса механизма, где $\varphi_1(t)$ – закон вращения колеса 1, $s_4(t)$ – закон движения рейки 4, $\omega_2(t)$ – закон изменения угловой скорости груза 2, $V_5(t)$ – закон изменения скорости груза 5 и т. д.(везде φ выражено в радианах), s – в сантиметрах, t – в секундах. Положительное направление для φ и ω против хода часовой стрелки, для s_4, s_5, и V_4, V_5 – вниз.

Определить в момент времени t_1 = 2 с указанные в таблице 9 в столбцах «Найти» скорости (V – линейные, ω – угловые) и ускорения (a – линейные, ε – угловые) соответствующих точек или тел (V_5 – скорость груза 5 и т.д.).

Таблица 8 – Рисунки к задаче К2

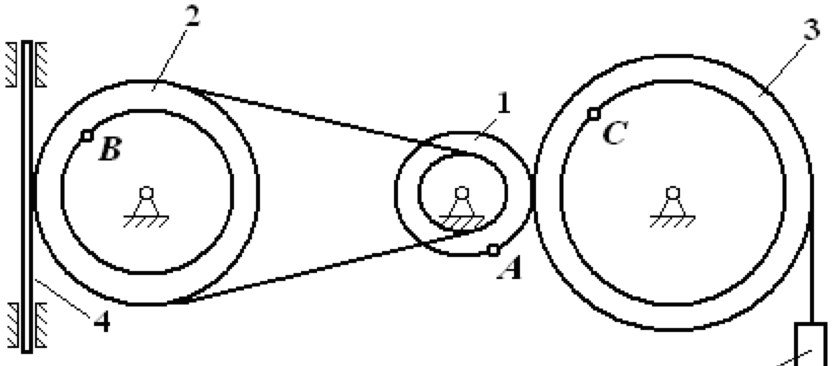


Рисунок К2 .0

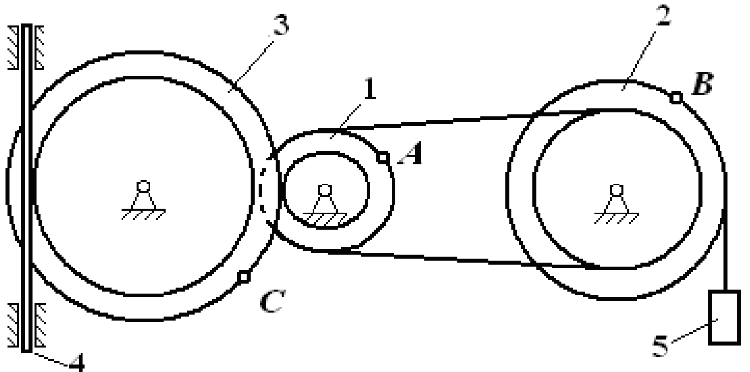


Рисунок К2 .1

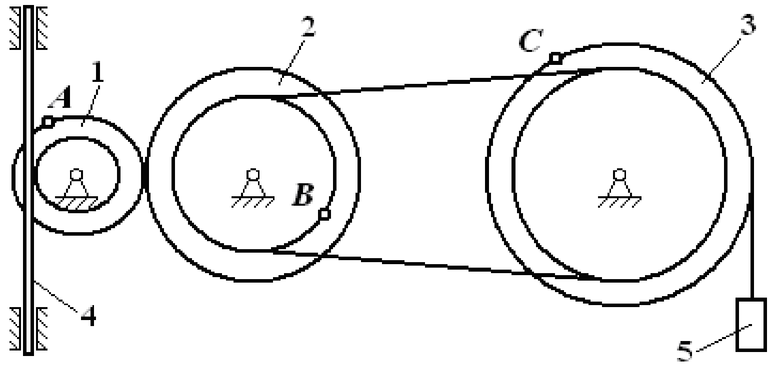


Рисунок К2.2

Продолжение таблицы 8

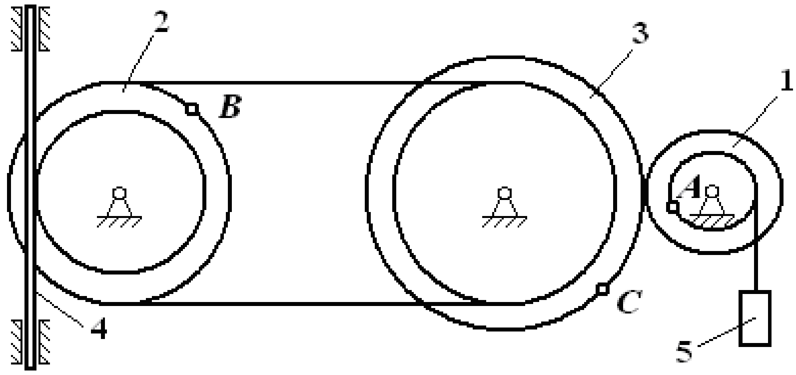


Рисунок К2.3

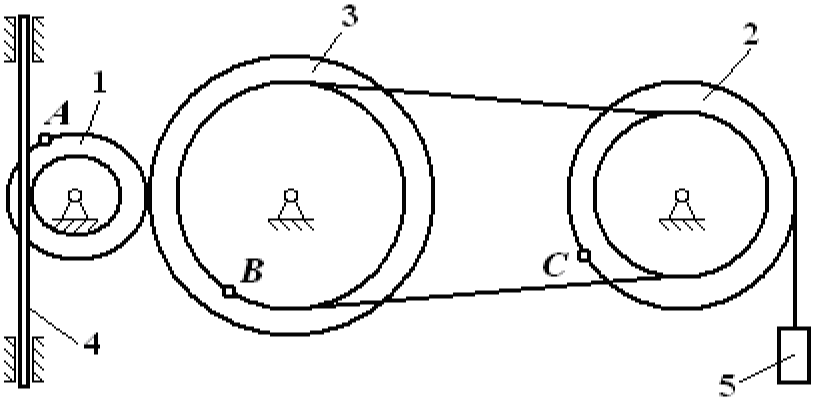


Рисунок К2.4

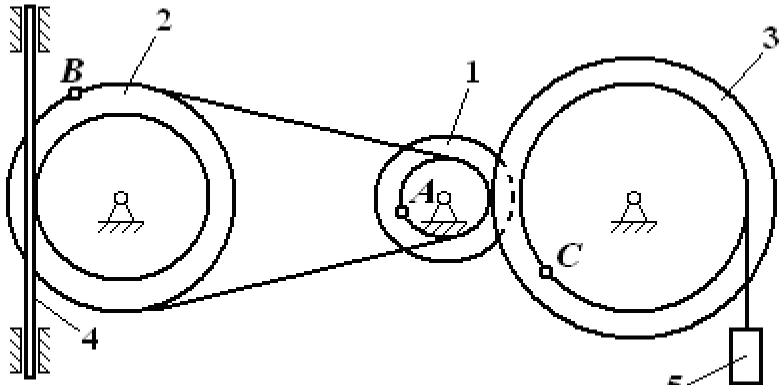


Рисунок К2.5

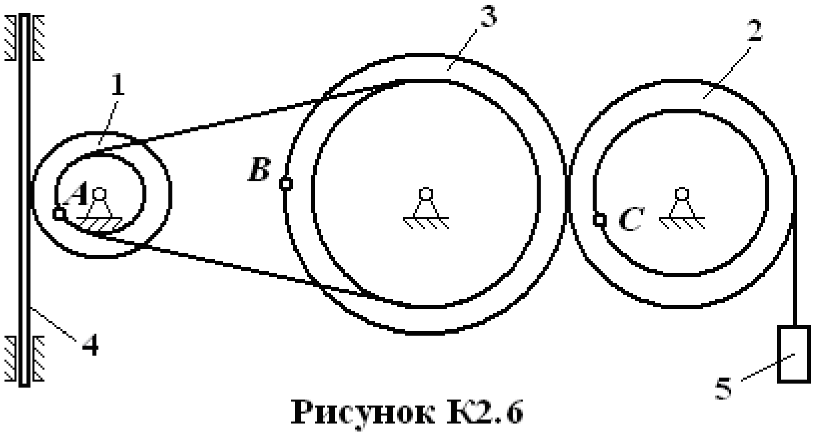


Рисунок К2.6

Продолжение таблицы 8

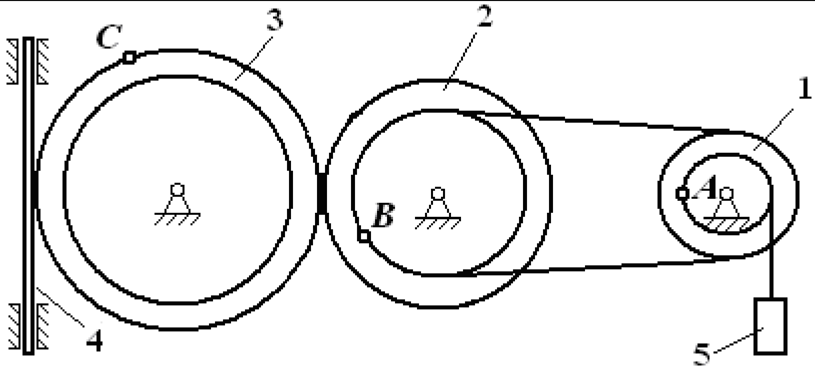


Рисунок К2.7

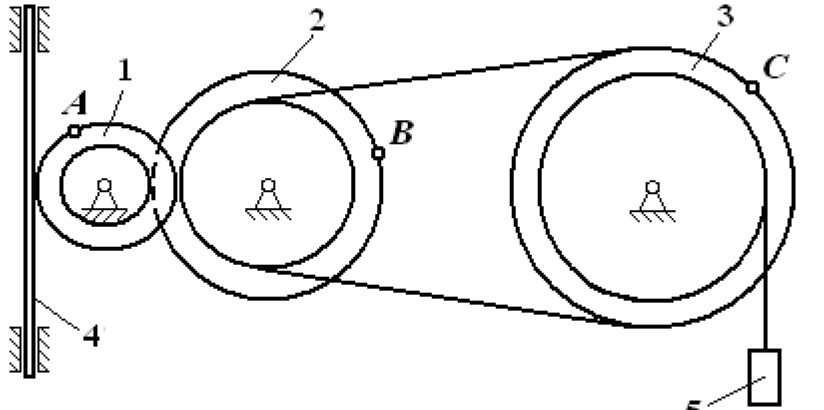


Рисунок К2.8

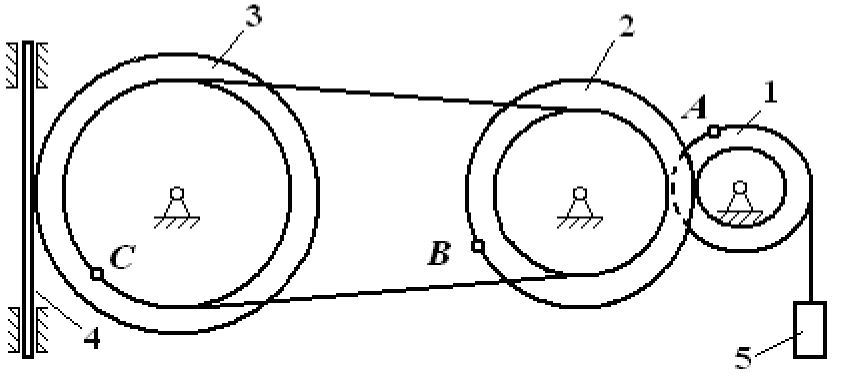


Рисунок К2.9

Таблица 9 – Варианты условия задачи К2

Номер условия	Дано	Найти		Номер условия	Дано	Найти	
		скорости	ускорения			скорости	ускорения
0	$s_4 = 4(7t - t^2)$	V_B, V_C	ε_2, a_A, a_5	5	$\omega_1 = 5t - 2t^2$	V_5, V_B	ε_2, a_C, a_4
1	$V_5 = 2(t^2 - 3)$	V_A, V_C	ε_3, a_B, a_4	6	$\omega_2 = 2(t^2 - 3t)$	V_4, ω_1	ε_1, a_C, a_5
2	$\varphi_1 = 2t^2 - 9$	V_4, ω_2	ε_2, a_C, a_5	7	$V_4 = 3t^2 - 8$	V_A, ω_3	ε_3, a_B, a_5
3	$\omega_2 = 7t - 3t^2$	V_5, ω_3	ε_2, a_A, a_4	8	$s_5 = 2t^2 - 5t$	V_4, ω_2	ε_1, a_C, a_4
4	$\varphi_3 = 3t - t^2$	V_4, ω_1	ε_1, a_B, a_5	9	$\omega_3 = 8t - 3t^2$	V_5, V_B	ε_2, a_A, a_4

Указание. Задача К2 – на исследование вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. При решении задач учесть, что когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же, а когда два колеса связанны ременной передачей, то скорости всех точек ремня и, следовательно, точек, лежащих на ободе каждого из этих колес, в данный момент времени численно одинаковы; при этом считается, что ремень по ободу колеса не скользит.

3.5 Пример выполнения задачи К2

Механизм (рисунок 7) состоит из ступенчатых колес 2 – 4, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки 1 и груза 5, привязанного к концу нити, намотанной на малую ступень колеса 4. Радиусы ступеней колеса равны соответственно: колеса 2 – r_2 = 6 *см*, R_2 = 8 *см*, у колеса 3 – r_3 = 4 *см*, R_3 = 6 *см*, у колеса 4 – r_4 = 2 *см*, R_4 = 8 *см*. Рейка движется по закону $s_1 = 3t^3$ (s – в сантиметрах, t – в секундах). t_1 = 3 с.

Определить: ω_4, V_5, ε_4, a_A в момент времени $t = t_1$.

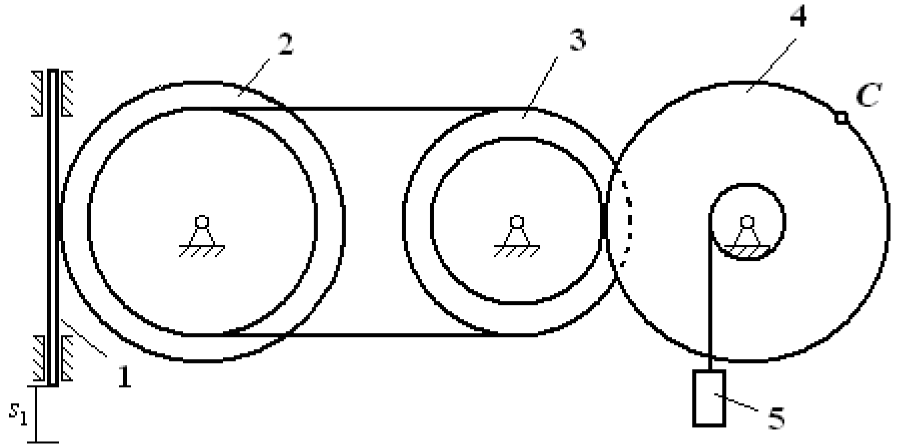


Рисунок 7

Решение.

1. Определим угловые скорости всех колес как функции времени t.

Зная закон движения рейки 1, находим ее скорость:

$$V_1 = \dot{s}_1 = 9t^2.$$

Рейка находится в поступательном движении, поэтому скорости всех ее точек, в том числе точки зацепления рейки с большой ступенью колеса 2 – *K*, равны по величине и по направлению $(\vec{V}_1 = \vec{V}_K)$ (рисунок 8), то есть $V_K = 9t^2$.

Тогда угловая скорость колеса 2

$$\omega_2 = \frac{V_K}{R_2} = \frac{9}{8}t^2.$$

Скорость $V_М$ (рисунок 8) точки схода ремня с малого вала колеса 2 – M определим в виде

$$V_М = \omega_2 \cdot r_2 = \frac{9}{8}t^2 \cdot 6 = \frac{27}{4}t^2.$$

Часть ремня MN находится в поступательном движении, поэтому скорости точек M и N будут равны по величине и по направлению (рисунок 8), т. е. $\vec{V}_N = \vec{V}_M$. Следовательно,

$$V_N = \frac{27}{4}t^2.$$

Угловая скорость колеса 3 (рисунок 8)

$$\omega_3 = \frac{V_N}{R_3} = \frac{27}{4 \cdot 6}t^2 = \frac{9}{8}t^2.$$

Скорость точки L

$$V_L = \omega_3 \cdot r_3 = \frac{9}{8}t^2 \cdot 4 = \frac{9}{2}t^2.$$

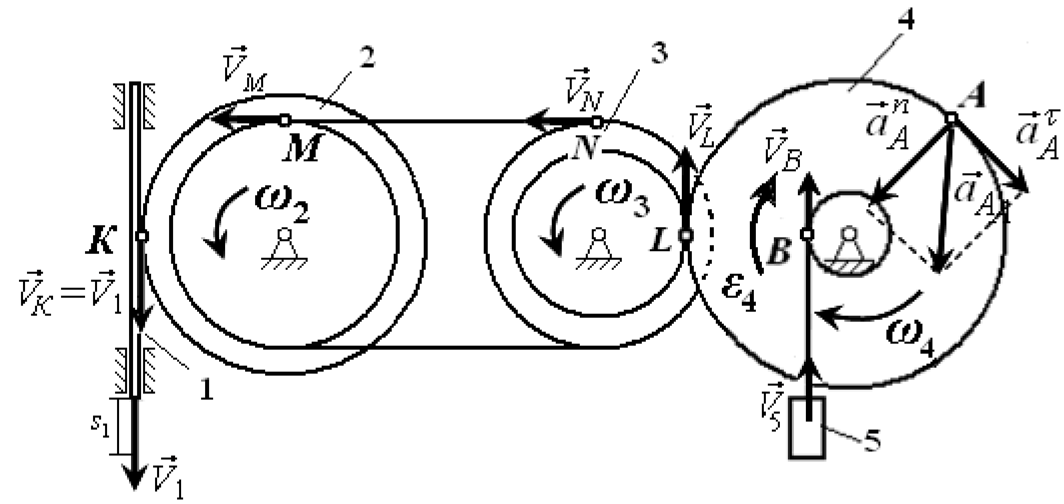


Рисунок 8

Угловая скорость колеса 4 (рисунок 8)

$$\omega_4 = \frac{V_L}{R_4} = \frac{9}{8 \cdot 8}t^2 = \frac{9}{64}t^2.$$

Угловое ускорение колеса 4 (рисунок 8)

$$\varepsilon_4 = \frac{d\omega_4}{dt} = \frac{9}{32}t.$$

2. Определим искомые кинематические характеристики при $t_1 = 3$ с.

Угловая скорость ω_4 при $t = t_1$

$$\omega_4 \Big|_{t_1=3} = \frac{9}{64} t^2 \Big|_{t_1=3} = 1{,}26 \quad c^{-1}.$$

Угловая скорость ε_4 при $t = t_1$

$$\varepsilon_4 \Big|_{t_1=3} = \frac{9}{32} t \Big|_{t_1=3} = 0{,}84 \quad c^{-2}.$$

Скорость точки B при $t = t_1$

$$V_B = \omega_4 \cdot r_4 = 1{,}26 \cdot 2 = 2{,}52 \ см/с.$$

Скорость тела 5 при $t = t_1$.

Так как нить, соединяющая точку В и тело 4, находится в поступательном движении, то

$$V_4 = V_B = 2{,}52 \ см/с.$$

Ускорение точки A при $t = t_1$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^{n}.$$

Касательное ускорение

$$a_A^{\tau} = \varepsilon_4 \cdot R_4 = 0{,}84 \cdot 8 = 6{,}72 \ см/с^2.$$

Нормальное ускорение

$$a_A^{n} = \omega_4^2 \cdot R_4 = (1{,}26)^2 \cdot 8 = 12{,}7 \ см/с^2.$$

Полное ускорение

$$|\vec{a}_A| = \sqrt{(a_A^{\tau})^2 + (a_A^{n})^2} = \sqrt{(6{,}72)^2 + (12{,}7)^2} = 14{,}37 \quad см/c^2.$$

Направления искомых скоростей и ускорений показано на рисунке 8.

3.6 Задача К3

Кинематический анализ плоского пятизвенного механизма

Механизм (таблица 10) состоит из грузов 1 и 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней $R_3 = 0{,}6$м и $r_3 = 0{,}2$м, блока 4 радиуса $R_4 = 0{,}4$ м и ступенчатого катка (или ступенчатого подвижного блока) 5 с радиусами ступеней $R_5 = 0{,}4$ м и $r_5 = 0{,}2$ м. Груз 1 движется по закону $s = s(t)$ (таблица 11). Положение точки A на диске 5 определяется углом γ, значения которого заданы в таблице 11. Положительное значение угла откладывается в направлении стрелки, отрицательное – в противоположном направлении.

Определить угловые скорости ступенчатого шкива 3, блока 4, ступенчатого катка (или подвижного блока) 5, скорости груза 2, точек A и C, а также ускорение точки B в момент времени $t_1 = 1$ с.

Таблица 10 – Рисунки к Задаче К3

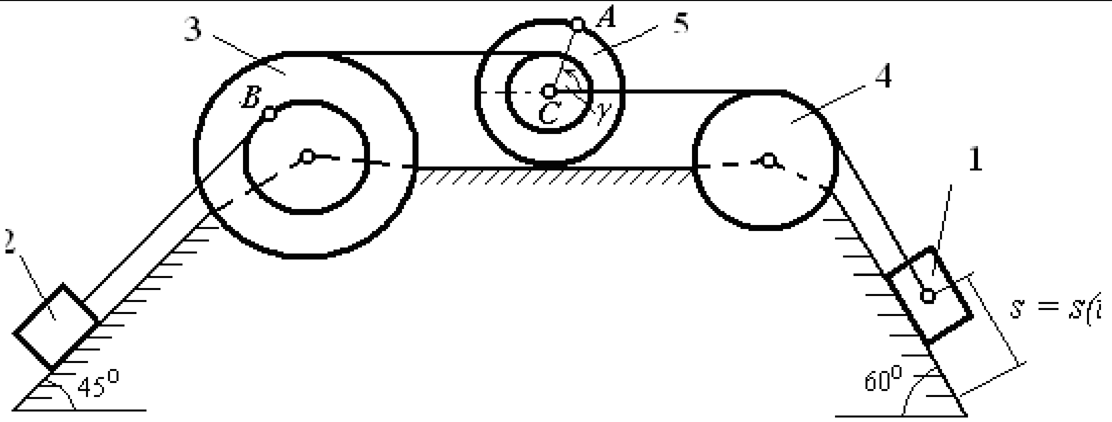


Рисунок К3а.0

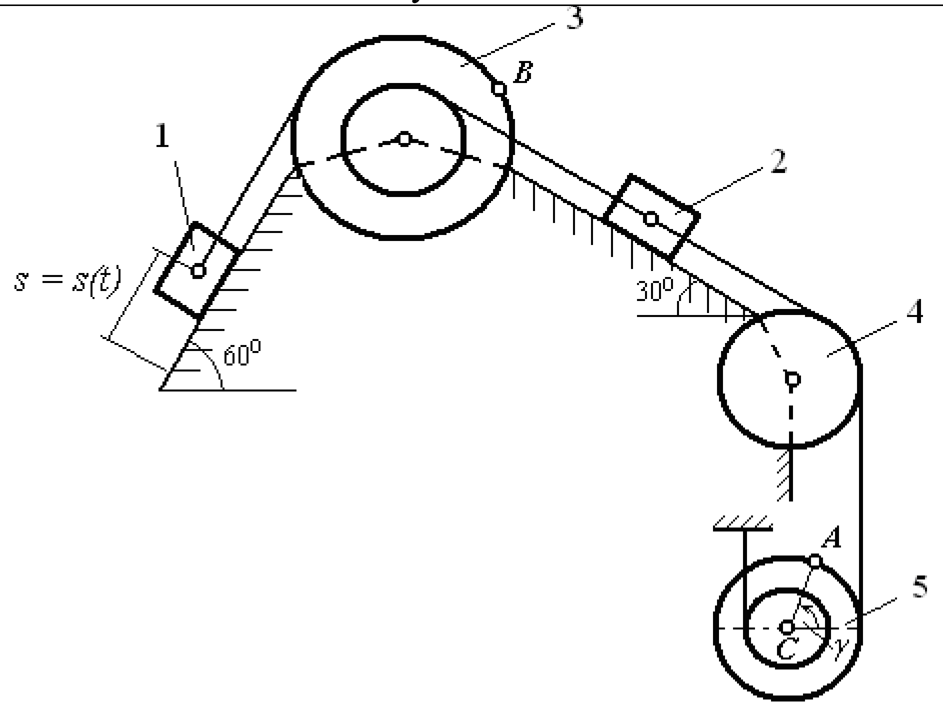


Рисунок К3а.1

Продолжение таблицы 10

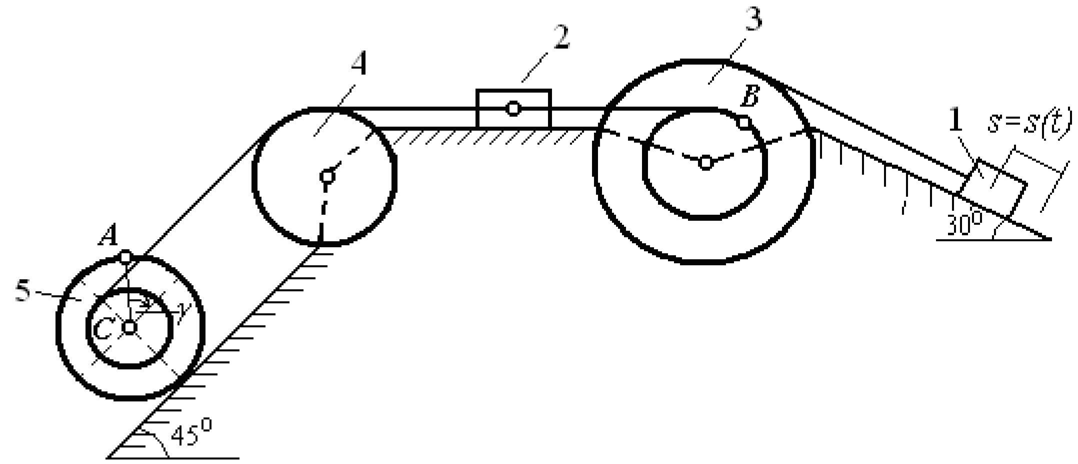


Рисунок К3а.2

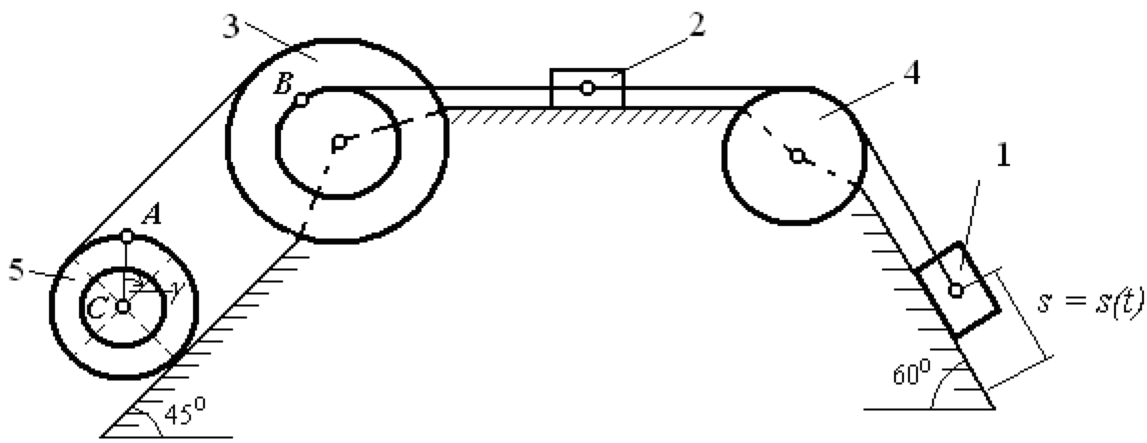


Рисунок К3а.3

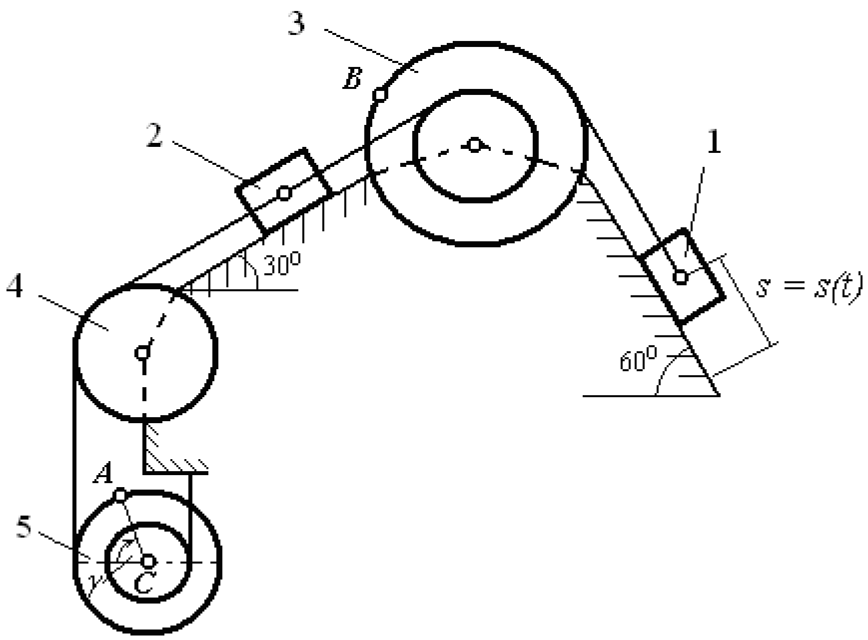


Рисунок К3а.4

Продолжение таблицы 10

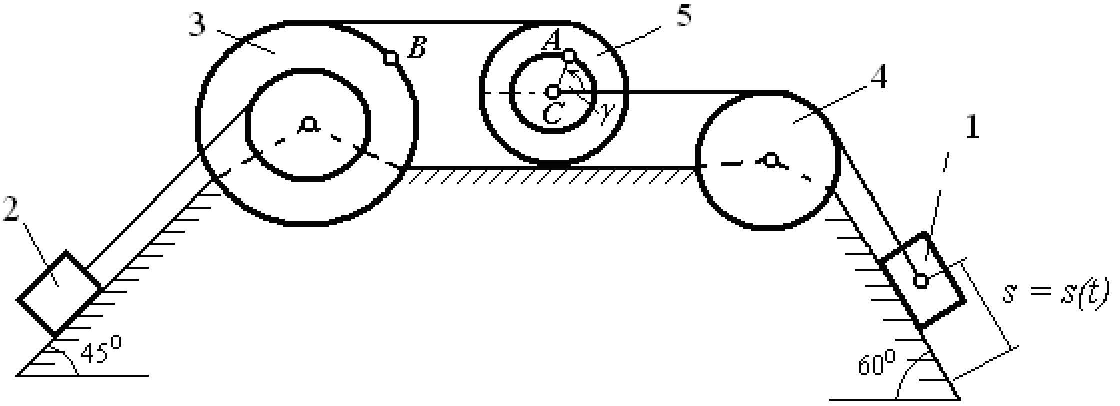


Рисунок К3.5

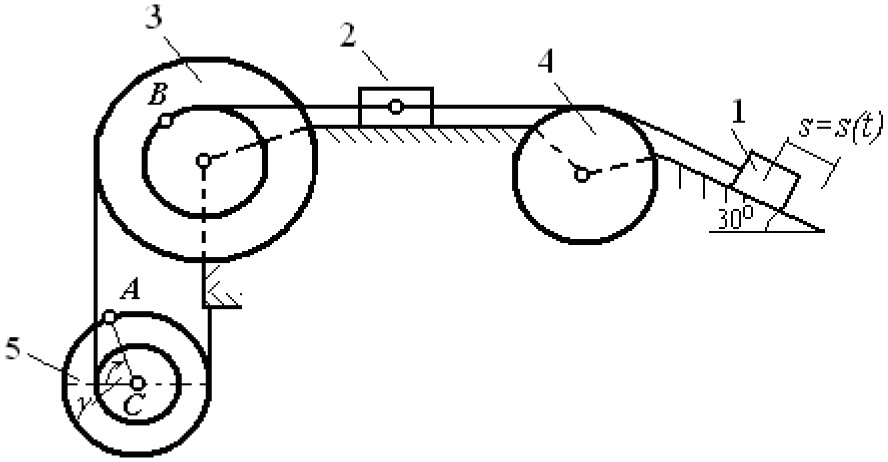


Рисунок К3а.6

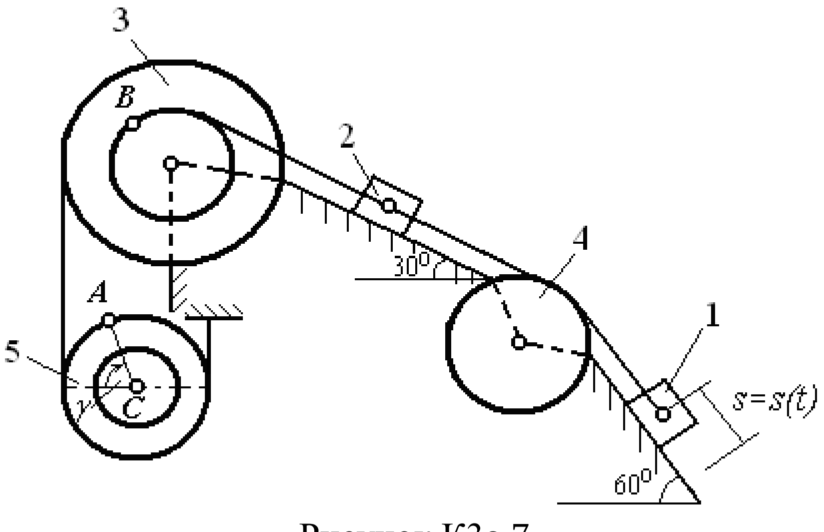


Рисунок К3а.7

Продолжение таблицы 10

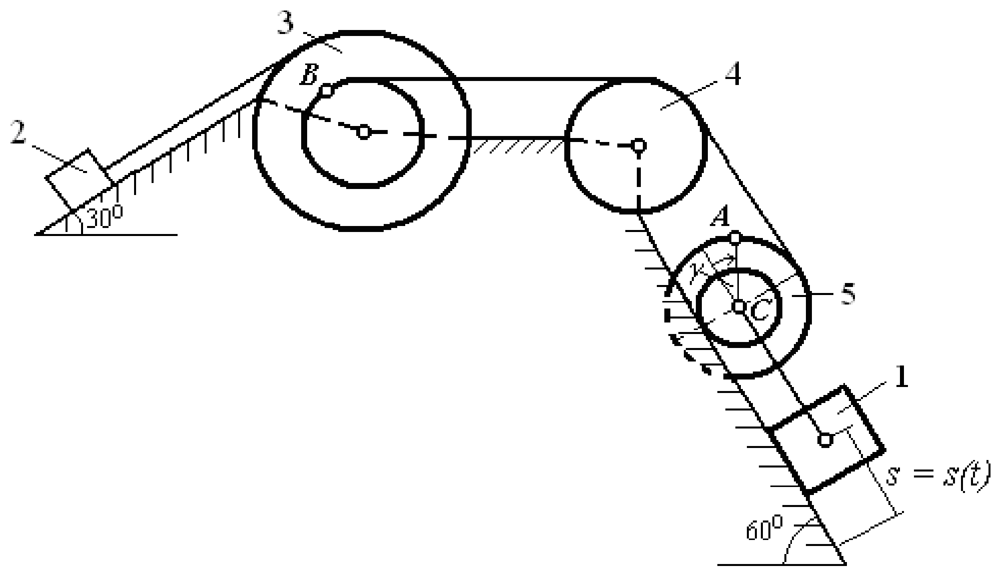


Рисунок К3а.8

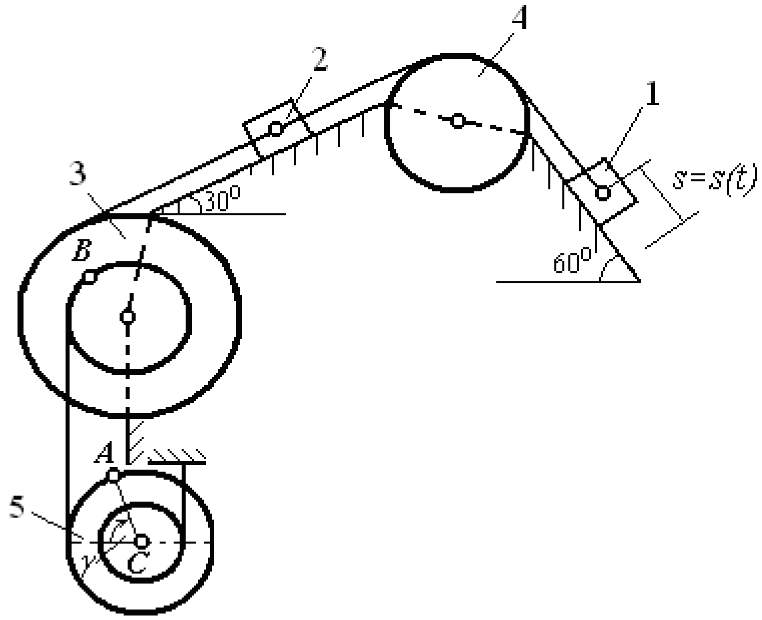


Рисунок К3а.9

Таблица 11 – Данные к задачам К3а

Номер условия	$s = s(t)$, м	γ, град	Номер условия	$s = s(t)$, м	γ, град
0	$-4t + 5t^2$	– 45	5	$-7t + 8t^2$	– 30
1	$4t^2 + 3t$	30	6	$-8t + 9t^2$	60
2	$-5t + 2t^3$	60	7	$8t^2 - 5t$	– 45
3	$-5t + 6t^3$	– 60	8	$9t - 2t^2$	30
4	$2t^3 - 4t$	45	9	$-6t + 4t^3$	– 60

3.7 Пример выполнения задачи К3а

Механизм (рисунок 9) состоит из грузов 1 и 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней R_3 = 0,6 м и r_3 = 0,2 м, блока 4 радиуса R_4 = 0,4 м и ступенчатого катка (или ступенчатого подвижного блока) 5 с радиусами ступеней R_5 = 0,4 м и r_5 = 0,2 м. Груз 1 движется по закону $s = -2t + 3t^3$. Положение точки A на диске 5 определяется углом $\gamma = -30^0$.

Определить угловые скорости ступенчатого шкива 3, блока 4, ступенчатого катка (или подвижного блока) 5, скорости груза 2, точек A и C, а также ускорение точки B в момент времени t_1 = 1 с.

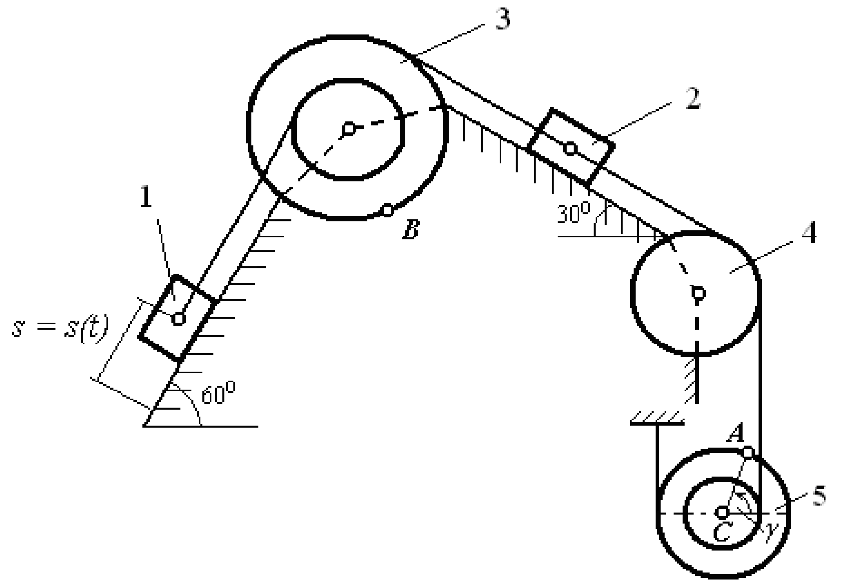


Рисунок 9

Решение.

При угле $\gamma = -30^0$ точка A будет занимать положение, изображенное на рисунке 10 (знак «–» означает, что γ угол откладывается по часовой стрелке).

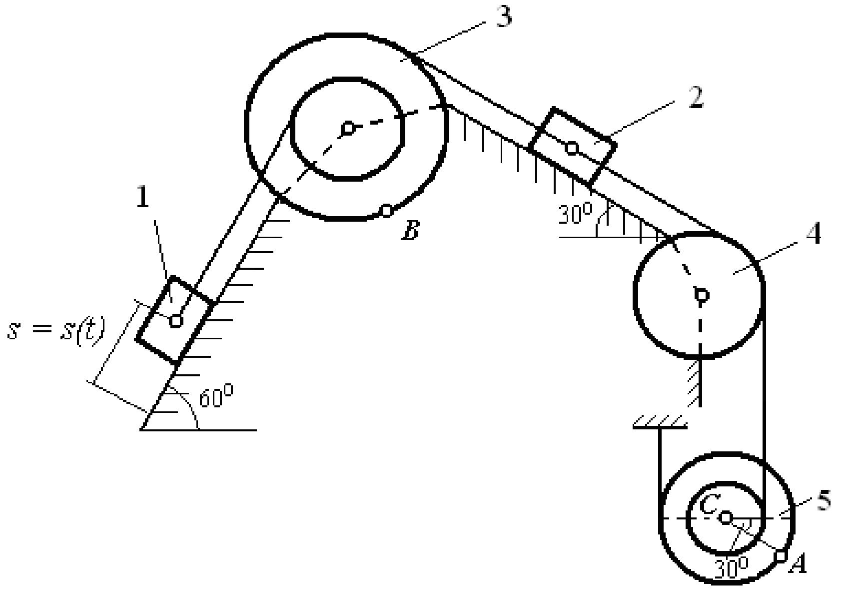


Рисунок 10

1. Определим скорость тела 1.

$$V_1 = \frac{ds}{dt} = -2 + 9\ t^2.$$

При t_1 = 1 с. получим

$$V_1\Big|_{t_1=1} = V_{11} = 7 \ \text{ м/с}.$$

Так как $V_{11} > 0$, то вектор скорости тела 1 будет направлен в сторону возрастания s, то есть вниз по наклонной плоскости (рисунок 11).

2. Определим угловую скорость тела 3 и скорости точек K, L, и B механизма.

Угловая скорость тела 3.

Так как нить, соединяющая тела 1 и 3 находится в поступательном движении (рисунок 11), то скорости тела 1 и точки К тела 3 будут равны по величине и по направлению, т.е.

$$V_K = V_1 = -2 + 9\ t^2.$$

При t_1 = 1 с.

$$V_K\Big|_{t_1=1} = V_{K1} = 7 \ \text{ м/с}.$$

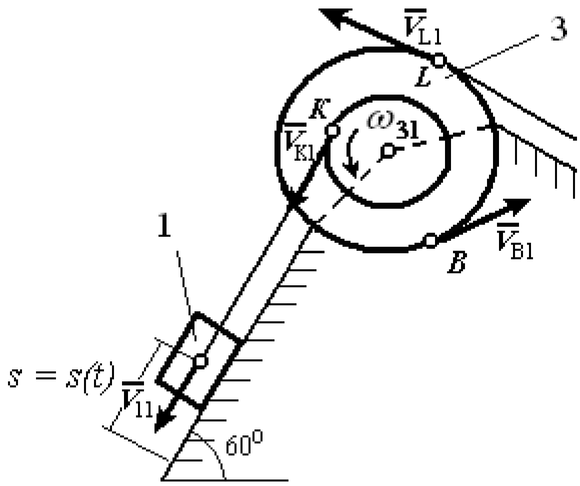


Рисунок 11

Так как тело 3 находится во вращательном движении, то

$$\omega_3 = \frac{V_K}{r_3} = \frac{-2 + 9t^2}{0{,}2} = -10 + 45t^2.$$

При t_1 = 1 с.

$$\omega_{31} = \frac{V_{K1}}{r_3} = 35 \ \ c^{-1}.$$

Направление угловой скорости ω_{31} определим по направлению скорости точки K (рисунок 11).

Скорости точек B и L равны по модулю, так как точки находятся на одинаковом расстоянии от оси вращения тела 3 (рисунок 11).

$$V_L = V_B = \omega_3 \cdot R_3 = (-10 + 45t^2) \cdot 0{,}6 = -6 + 27t^2.$$

При t_1 = 1 с.

$$V_L\Big|_{t_1=1} = V_{L1} = V_B\Big|_{t_1=1} = V_{B1} = \omega_3 \cdot R_3 = 35 \cdot 0{,}6 = 18 \ \text{ м/с}.$$

Векторы скоростей $\vec{V}_{L1}$ и $\vec{V}_{B1}$ направлены по касательным к траекториям соответствующих точек в сторону вращения тела 3 (рисунок 11).

2. Определим ускорение точки B.

Так как точка B движется по окружности, вектор её полного ускорения будет равен геометрической сумме двух ускорений (рисунок 12)

$$\vec{a}_{B1} = \vec{a}^{\,n}_{B1} + \vec{a}^{\,\tau}_{B1}.$$

Модуль нормального ускорения точки B при $t_1 = 1$ с.

$$a^n_{B1} = \omega^2_{31} \cdot R_3 = (35)^2 \cdot 0{,}6 = 735 \text{ м/с}^2.$$

Вектор нормального ускорения будет направлен к центру колеса 3 (рисунок 12).

Угловое ускорение колеса 3

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = 90 \ \ t.$$

При $t_1 = 1$ сек $\varepsilon_{31} = 90$ с $^{-2}$.

Алгебраическое значение касательного ускорения

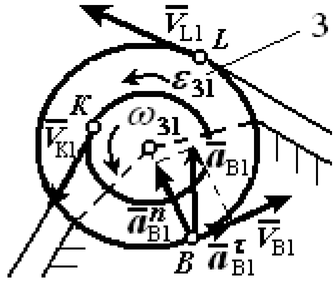


Рисунок 12

$$a^\tau_{B1} = \varepsilon_{31} \cdot R_3 = 90 \cdot 0{,}6 = 54 \text{ м/с}^2.$$

Так как скорость точки B и её касательное ускорение в данный момент времени имеют одинаковые знаки, то вектор касательного ускорения по направлению будет совпадать с вектором скорости (рисунок 12).

Модуль полного ускорения точки B при $t_1 = 1$ сек

$$a_{B1} = \sqrt{(a^n_{B1})^2 + (a^\tau_{B1})^2} = \sqrt{(735)^2 + (54)^2} = 736{,}98 \text{ м/с}^2.$$

3. Определим угловую скорость тела 4, скорость тела 2 и скорость точки M механизма.

Нить, соединяющая колеса 3 и 4, груз 2, находится в поступательном движении (рисунок 13), поэтому скорости точек L, M и груза 2 равны по величине и по направлению, то есть

$$V_L = V_M = V_2 = -6 + 27\,t^2.$$

При $t_1 = 1$ с.

$V_{L1} = V_{M1} = V_{21} = 16$ м/с.

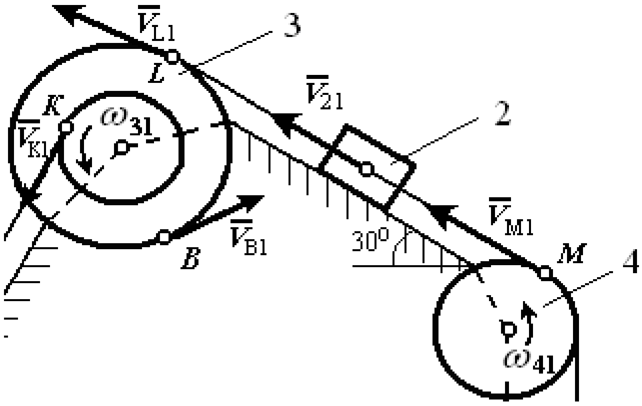


Рисунок 13

Угловая скорость блока 4

$$\omega_4 = \frac{V_M}{R_4} = \frac{-6 + 27t^2}{0,4} = -1,5 + 67,5t^2.$$

При t_1 = 1 сек ω_{41} = 66 с $^{-1}$.

Направление вращения блока 4 определяем по направлению скорости точки M (рисунок 14).

4. Определим угловую скорость блока 5 и скорости точек A и C.

Скорости точек M и S по модулю равны, так как эти точки находятся на одинаковом расстоянии от оси вращения (рисунок 14), то есть

$$V_{S1} = V_{M1} = 16 \text{ м/с}.$$

Нить, соединяющая тела 4 и 5 находится в поступательном движении (рисунок 20), поэтому

$$V_{N1} = V_{S1} = 16 \text{ м/с}.$$

Подвижный блок 5 находится в плоскопараллельном (плоском) движении. Мгновенный центр скоростей (м. ц. с.) блока находится в точке P_5 (рисунок 14).

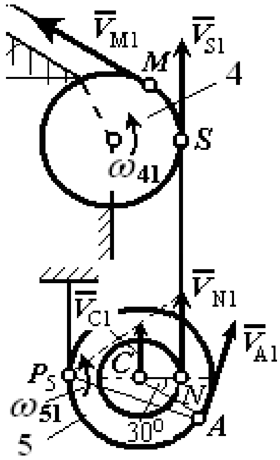


Рисунок 14

Направление вращения блока вокруг м. ц. с. определим по направлению скорости точки N. Вращение будет происходить с угловой скоростью

$$\omega_{51} = \frac{V_{N1}}{R_5 + r_5} = \frac{16}{0,4 + 0,2} = 26,67 \quad \text{с}^{-1}$$

Скорость точки C

$$V_{C1} = \omega_{51} \cdot R_5 = 26,67 \cdot 0,4 = 10,67 \text{ см/с}.$$

Скорость точки A определим по формуле

$$V_{A1} = \omega_{51} \cdot P_5A = \omega_{51} \cdot \sqrt{R_5^2 + R_5^2 + 2R_5^2 \cos 30^0} = 26,67 \cdot 0,4 \cdot 1,93 = 20,55 \text{ м/с}.$$

Вектор скорости точки A будет направлен перпендикулярно отрезку P_5A, так как блок 5 в данный момент времени совершает мгновенный поворот вокруг мгновенного центра скоростей.

3.8. Задача К3б.

Плоский механизм состоит из стержней 1, 2 и диска 3, соединенных друг с другом и с неподвижной опорой O шарнирами (таблица 13). Диск 3 катится по неподвижной поверхности, которая составляет угол γ с горизонтом, без скольжения.

Длины стержней: l_1 = 0,4м , l_2 = 1,2м. Радиус диска 3 – R = 0,2м. Положение механизма определяется углами α, β и γ (таблица 12);

положение точки K на диске 3 – углом ψ (отрицательные значениях углов α, β, γ, ψ откладывать в сторону противоположную соответствующей стрелке). Положительным направлением заданной угловой скорости и углового ускорения ε_1 считать направление против хода часовой стрелки.

Диаметры диска 3 $ДL$ и CE взаимно перпендикулярны. Диаметр $ДL$ параллелен опорной наклонной плоскости, а диаметр CE перпендикулярен к ней.

Найти скорости точек $A, B, Д, E, K$ механизма и угловую скорость звена 2 в заданном положении механизма, а также ускорение точки A, если стержень 1 в данный момент времени имеет угловое ускорение $\varepsilon_1 = 10$ с $^{-2}$.

Таблица 13 – Рисунки к задаче К3б

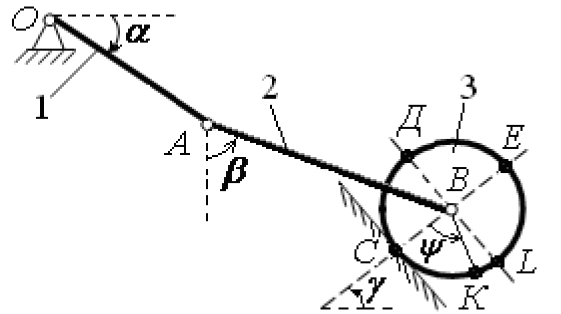
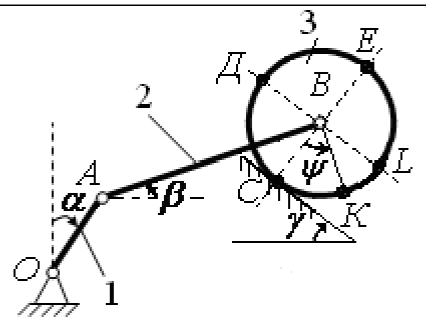
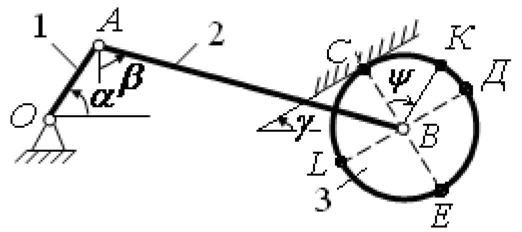
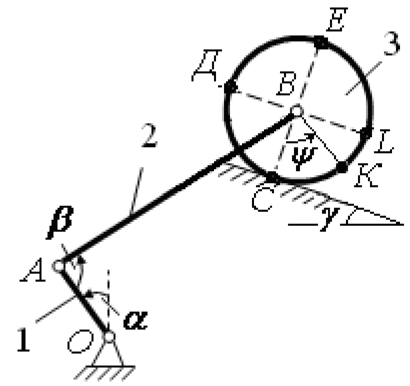
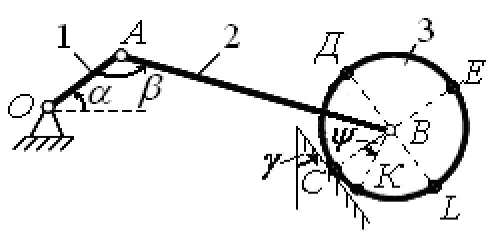
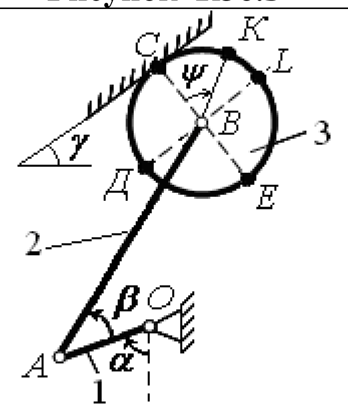
 **Рисунок К3б.0**	 **Рисунок К3б.1**
 **Рисунок К3б.2**	 **Рисунок К3б.3**
 **Рисунок К3б.4**	 **Рисунок К3б.5**

Таблица 12 – Варианты условия задачи К3б

Последняя цифра шифра	Углы				Дано
	α^0	β^0	γ^0	ψ^0	ω_3, с $^{-1}$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**7**
0	30	30	30	120	6
1	– 30	60	60	– 60	4
2	30	– 30	30	30	7
3	60	60	30	– 120	4
4	0	60	60	60	8
5	60	90	60	– 30	3
6	– 30	60	30	30	6
7	90	– 60	60	135	5
8	– 60	90	60	45	4
9	0	60	30	– 45	8

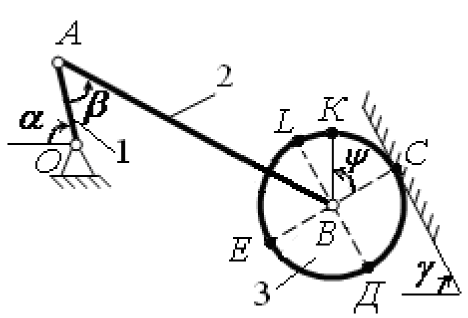


Рисунок К3б.6

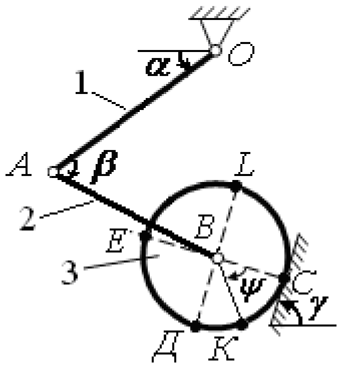


Рисунок К3б.7

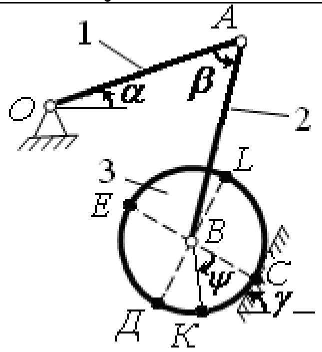


Рисунок К3б.8

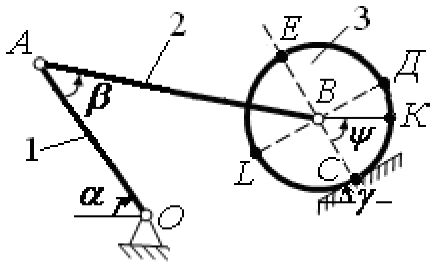


Рисунок К3б.9

2.3.6. Пример решения задачи К2б.

3.12 Задача К4

Определение кинематических характеристик при сложном движении точки

Круглая пластина радиуса R = 60 см (таблица 13) вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью ω, заданной в таблице 14 (при знаке минус направление ω противоположно показанному на рисунке). На рисунках К4.0 – К4.5 (таблица 13) ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве). Ось вращения на рисунках К4.6 – К4.9 (таблица 13) перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O (пластина вращается в своей плоскости);

По пластине по окружности радиуса R, т.е. по ободу пластины (таблица 13), движется точка M. Закон ее относительного движения, выражаемый уравнением $s = \underset{\smile}{AM} = f(t)$ (s – в сантиметрах, t – в секундах), задан в таблице 14. Дуговая координата $s = AM$ отсчитывается по дуге окружности; там же даны размеры l. На всех рисунках точка M показана в положении, при котором $s = AM > 0$ (при $s < 0$ точка M находится по другую сторону от точки A).

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени t_1 = 1с.

Указания. Задача К3 – на сложное движение точки. При ее решении движение точки по пластине считать относительным, а вращательное движение самой пластины – переносным и воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Прежде чем производить расчеты, следует изобразить точку M на пластине в том положении, в котором нужно определить ее абсолютную скорость (или ускорение), а не в произвольном положении, показанном на рисунках к задаче.

При решении задачи не подставлять числового значения R, пока не будут определены положение точки M в момент времени t_1 = 1с и угол между радиусами CM и CA в этот момент.

Таблица 13 – рисунки к задаче К4

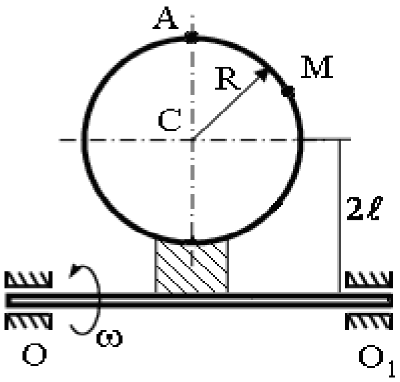


Рисунок К4.0

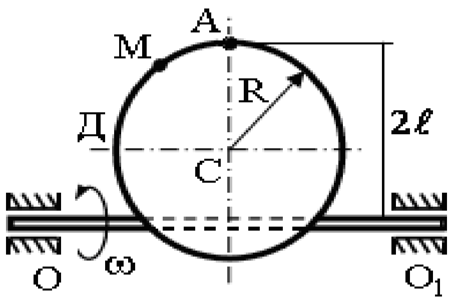


Рисунок К4.1

Продолжение таблицы 13

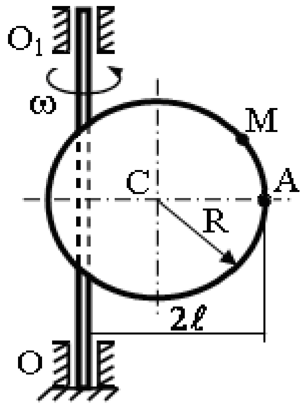


Рисунок К4.2

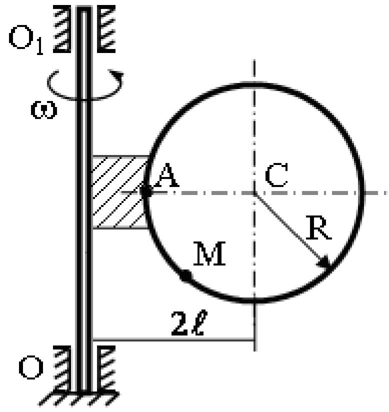


Рисунок К4.3

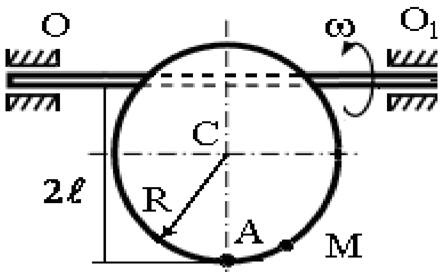


Рисунок К4.4

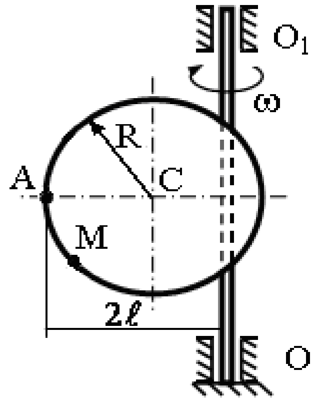


Рисунок К4.5

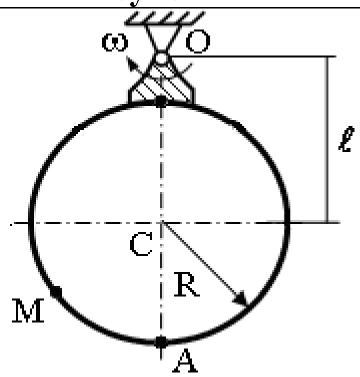


Рисунок К4.6

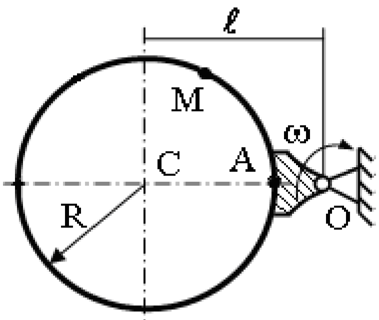


Рисунок К4.7

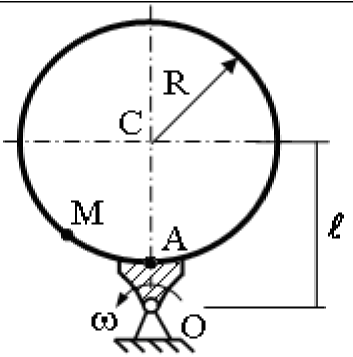
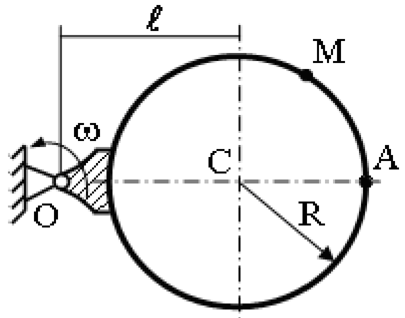
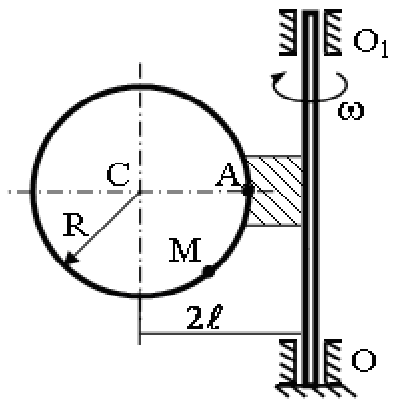
Рисунок К4.8	Рисунок К4.9

Таблица 14 − Данные к задаче К4

№ условия	ω, с $^{-1}$	l	$s = AM = f(t)$, см	№ условия	ω, с $^{-1}$	l	$s = AM = f(t)$, см
0	− 2	R	$\frac{\pi}{6}R(t^4 - 3t^2)$	5	2	R	$\frac{\pi}{12}R(4t^2 - 2t^3)$
1	4	R	$\frac{\pi}{6}R(t^3 - 2t)$	6	4	$\frac{3}{4}R$	$\frac{\pi}{2}R(t - 2t^3)$
2	3	R	$\frac{\pi}{6}R(3t - t^2)$	7	− 5	R	$\frac{\pi}{3}R(2t^3 - 1)$
3	− 4	$\frac{3}{4}R$	$\frac{\pi}{2}R(t^3 - 2t^2)$	8	2	R	$\frac{\pi}{6}R(t - 2t^2)$
4	− 3	R	$\frac{\pi}{12}R(3t^2 - t)$	9	− 5	$\frac{3}{4}R$	$\frac{\pi}{2}R(2t^2 - t^3)$

3.13 Пример выполнения задачи К4



Рисунок

Круглая пластина радиуса R = 50 см вращается вокруг неподвижной оси OO_1 с постоянной угловой скоростью ω = - 2 c^{-1}. Ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины.

По пластине по окружности радиуса R, т.е. по ободу пластины, движется точка M. Закон ее относительного движения, выражаемый уравнением $s = \frac{\pi}{3}R(1 - 2t^3)$ (s – в сантиметрах, t – в секундах). Дуговая координата s отсчитывается по дуге окружности; $l = \dfrac{3}{4}R$. Точка M показана в положении, при котором $s = AM > 0$ (при $s < 0$ точка M находится по другую сторону от точки A).

Определить: абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени t_1= 1 с.

Решение.

1. Определим положение точки M на пластинке в момент времени t_1= 1 с.

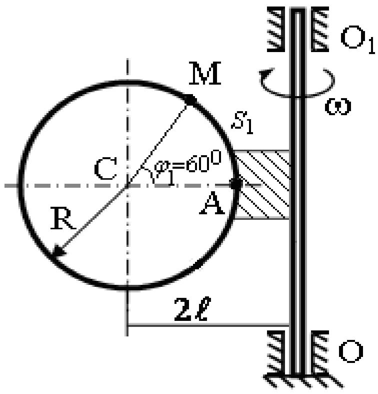
Дуговая координата s_1 при t_1= 1 с равна

$$s_1 = \frac{\pi}{3}R(1-2t_1^3) = \frac{\pi}{3}R(1-2t_1^3) = \frac{\pi}{3}R(1-2\cdot 1^3) = -\frac{\pi}{3}R.$$

Поскольку $s_1 < 0$, то точка М при t_1= 1 с будет находиться по другую сторону от точки А (рисунок).

Угол, на который опирается дуга s_1 (рисунок), найдем по формуле

$$\varphi_1 = \frac{s_1}{R} = \frac{\pi}{3} = 60^0.$$



Рисунок

2. Определим абсолютную скорость точки M при t_1= 1 с.

По теореме о сложении скоростей абсолютная скорость точки $\vec{V}_{абс}$ равна геометрической сумме относительной $\vec{V}_{отн}$ и переносной $\vec{V}_{пер}$ скоростям точки, т. е.

$$\vec{V}_{абс} = \vec{V}_{отн} + \vec{V}_{пер}.$$

Относительное движение точки M происходит по дуге окружности AM (рисунок).

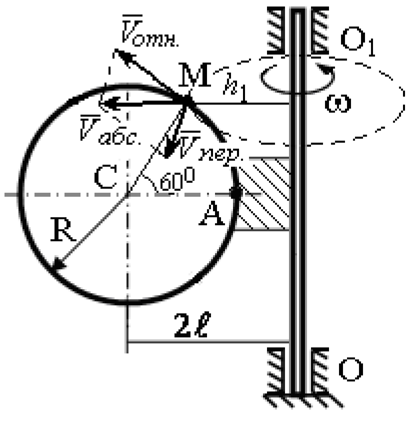
Относительная скорость

$$V_{отн} = \dot{s} = -\frac{6\pi R t^2}{3} = -2\pi R t^2.$$

При t_1 = 1 с.

$$V_{отн} = -2\pi R t_1^2 = -2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 1^2 = -31{,}4 \ \ см/с.$$

Вектор скорости точки $V_{отн1}$ будет направлен по касательной к окружности. Знак « − » указывает на то, что относительная скорость направлена в сторону убывания дуговой координаты s (рисунок …).



Переносное движение точки M – вращательное вместе с пластинкой. В переносном движении в момент времени $t_1 = 1$ с. точка M описывает окружность радиуса h_1 (рисунок)

$$h_1 = 2l - R \cdot \sin 30^0 = 2 \cdot 3 \cdot R/4 - R/2 = R.$$

Переносная скорость **Рисунок**

$$V_{\text{пер}} = \omega \cdot h = \omega \cdot R = 2 \cdot 50 = 100 \text{ } см/с.$$

Вектор переносной скорости $\vec{V}_{пер}$ точки M будет направлен по касательной к ее переносной траектории (окружность радиуса h_1) в сторону вращения пластинки (рисунок), то есть перпендикулярно к плоскости рисунка. Вращение пластинки будет происходить (рисунок …) в сторону противоположную той, которая указана на исходном рисунке … , так как $\omega = -2 \ c^{-1}$ отрицательная.

Угол между скоростями $\vec{V}_{отн}$ и $\vec{V}_{пер}$ равен 90^0, поэтому

$$\left|\vec{V}_{абс}\right| = \sqrt{V_{отн}^2 + V_{отн}^2} = \sqrt{(31{,}4)^2 + (100)^2} = 104{,}8 \quad см/с.$$

Направление вектора $\vec{V}_{абс}$ указано на рисунке.

2. Определим абсолютное ускорение точки M при $t_1 = 1$ с.

По теореме о сложении ускорений (теорема Кориолиса) абсолютное ускорение точки

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор},$$

где

$$\vec{a}_{отн} = \vec{a}_{отн}^{\tau} + \vec{a}_{отн}^{n}, \qquad \vec{a}_{пер} = \vec{a}_{пер}^{\tau} + \vec{a}_{пер}^{n}.$$

То есть

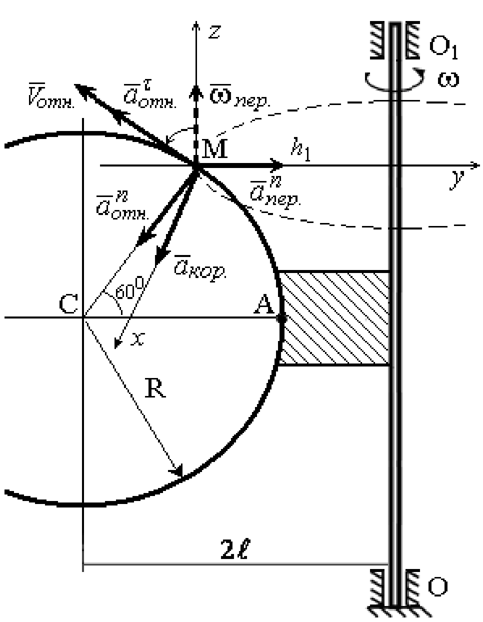
$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{отн}^{\tau} + \vec{a}_{отн}^{n} + \vec{a}_{пер}^{\tau} + \vec{a}_{пер}^{n} + \vec{a}_{кор}. \qquad (a)$$

Найдем каждое из ускорений, входящих в это выражение.

$$a_{отн}^{\tau} = \ddot{s} = -4\pi R t$$

при $t = t_1$

$$a_{отн}^{\tau} = \ddot{s} = -4\pi R \cdot 1 = -628 \quad см/с^2.$$



Вектор ускорения $\vec{a}^{\tau}_{отн}$ направлен по касательной к окружности и в сторону уменьшения дуговой координаты s, так как $a^{\tau}_{отн} < 0$ (рисунок).

$$a^{n}_{отн} = V^{2}_{отн} / \rho_{отн} = (2\pi R)^2 / R = 1971{,}9 \quad см/с^2.$$ **Рисунок**

Вектор ускорения $\vec{a}^{n}_{отн}$ направлен к центру пластины (рисунок).

$$a^{n}_{пер} = \omega^2 h_1 = (-2)^2 \cdot 50 = 200 \quad см/с^2.$$

Вектор ускорения $\vec{a}^{n}_{пер}$ направлен к оси вращения пластины (рисунок).

$$a^{\tau}_{пер} = 0, \quad \text{так как} \quad \varepsilon = \dot{\omega} = 0.$$

3. Определим ускорение Кориолиса.

Ускорение Кориолиса равно векторному произведению

$$\vec{a}_{кор} = 2 \quad \vec{\omega}_{пер.} \times \vec{V}_{отн}.$$

Модуль Кориолисова ускорения

$$\vec{a}_{кор}| = 2 \; |\vec{\omega}_{пер}| \cdot |\vec{V}_{отн}| \cdot \sin 90^0 = 125{,}6 \quad см/с^2.$$

Направление Кориолисова ускорения определяется по правилу векторного произведения (рисунок), то есть перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\vec{\omega}_{пер}$ и $\vec{V}_{отн}$, в ту сторону, откуда наименьший поворот от вектора $\vec{\omega}_{пер}$ к вектору $\vec{V}_{отн}$ виден происходящим против хода часовой стрелки.

4. Определим модуль полного ускорения.

Спроектируем равенство (а) на оси координат (рисунок).

$a_{абсX} = a_{\text{кор}} = 125{,}6;$

$a_{абсY} = a^{n}_{пер} - a^{n}_{отн}\cos 60^0 - |a^{\tau}_{\text{отн}}|\cos 30^0 = -1329{,}8;$

$a_{абсZ} = |a^{\tau}_{отн}|\cos 60^0 - a^{n}_{отн}\cos 30^0 = -1393{,}7.$

Модуль полного ускорения

$$|\vec{a}_{абс}| = \sqrt{a^2_{абсX} + a^2_{абсY} + a^2_{абсZ}} = \sqrt{(125{,}6)^2 + (-1329{,}8)^2 + (-1393{,}7)^2} = 1932{,}4 \quad см/с^2.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

При подготовке Методических указаний были использованы материалы следующих работ:

Цывильский В. Л. Теоретическая механика М., 2001г.
Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов / С.М.Тарг. - 15-е изд., стер. - М.: Высш. шк., 2005. - 415 с.

Яблонский А.А., В.М. Никифорова. Курс теоретической механики. Учеб. пособие для вузов: 13-е изд., исправ. - М.: Интеграл-Пресс, 2006. - 603с.

Крекнин А.И. Теоретическая механика Ч.3. Методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы обучения. Тюмень. 2006 год.

Курс теоретической механики: Учебник для вузов по направлению подгот. дипломир. специалистов в области техники и технологии/ [В.И.Дронг, В.В.Дубинин, М.М., Ильин и др.]; Под ред.К.С.Колесникова. -3-е изд., стер. М. : Изд- во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. -735 с.- (Механика в техническом университете: В 8 т.; Т.1).

Крекнин А.И. Методические указания по выполнению расчетно-графических работ по теоретической механике для студентов дневной формы обучения специальности. Ч.1. Статика. Тюмень, 2005.

Положение об организации внеаудиторной самостоятельной работы студентов ГОУ ВПО ТюмГАСУ, утвержденным ректором университета 28 января 2009 года.

Теоретическая механика. Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников машиностроительных, строительных и др. спец. М., 1989г.

Приложение А

Примерный перечень вопросов по теме «Сходящаяся система сил»

А) основные вопросы

1. Дать формулировку аксиомы связей.
2. Сформулировать аксиому параллелограмма.
3. Сформулировать аксиому о двух силах.
4. Сформулировать аксиому присоединения.
5. Сформулировать аксиому замораживания.
6. Сформулировать аксиому действия и противодействия.
7. Дать: определение связи, понятие о реакции связи и правило определения направления реакции связи.
8. Охарактеризовать связь - нерастяжимая нить.
9. Охарактеризовать связь - свободное опирание о гладкую поверхность.
10. Охарактеризовать связь - подвижный шарнир.
11. Охарактеризовать связь – неподвижный цилиндрического шарнира.
12. Охарактеризовать связь - сферической шарнир.
13. Охарактеризовать связь - невесомый стержнь.
14. Сформулировать теорему о трех силах.
15. Дать определение абсолютно твердого тела.
16. Дать определения свободного и несвободного тела.
17. Перечислить параметры, определяющие действие силы на твердое тело.
18. Сформулировать определения сосредоточенной силы и распределенной нагрузки.
19. Охарактеризовать основные виды распределенной нагрузки.
20. Дать определения равнодействующей и уравновешивающей силам.
21. Дать определение сходящейся системы сил и назвать ее виды.
22. Дать понятие главного вектора системы сил.
23. Дать понятие проекции силы на ось.
24. Дать понятие проекции силы на плоскость.

25. Записать виды аналитических условий равновесия сходящейся системы сил.
26. Сформулировать геометрические условия равновесия сходящейся системы сил.

Б) дополнительные вопросы

27. Дать определение статики.
28. Сформулировать определение силы.
29. Дать представление о размерности силы.
30. Дать определения внешних и внутренних сил.
31. Дать характеристику основным системам сил.
32. Сформулировать задачи статики.
33. Изложить правило сложения 2-х сил.
34. Изложить правило сложения 3-х сил, не лежащих в одной плоскости.
35. Изложить правило сложения системы сил.
36. Дать правило разложения силы по двум заданным направлениям.
37. Дать правило разложения силы по трем заданным направлениям.
38. Изложить аналитический способ задания сил.
39. Изложить аналитический способ сложения пространственной системы сил.
40. Изложить аналитический способ сложения плоской системы сил.

Приложение Б

Перечень вопросов по теме «Произвольная плоская система сил»

А) Основные вопросы

1. Дать представление о видах момента силы.
2. Дать понятие алгебраического момента силы относительно центра.
3. Дать представление о разновидностях теоремы Вариньона.
4. Охарактеризовать теорему Вариньона для плоской системы сил.
5. Дать понятие пары сил.
6. Сформулировать свойства пары сил.
7. Дать представление о видах моментов пары сил.
8. Дать понятие алгебраического момента пары сил.
9. Дать понятие главного момента системы сил.
10. Сформулировать теорему о приведении плоской системы сил.
11. Дать геометрические условия равновесия произвольной плоской системы сил
12. Записать основную форму аналитических условий равновесия произвольной плоской системы сил.
13. Записать вторую (дополнительную) форму аналитических условий равновесия произвольной плоской системы сил.
14. Записать третью (дополнительную) форму аналитических условий равновесия произвольной плоской системы сил.
15. Охарактеризовать аналитические условий равновесия плоской системы параллельных сил.
16. Изложить суть метода замораживания.
17. Изложить суть метода разбиения.
18. Охарактеризовать равновесие при наличии трения скольжения.
19. Охарактеризовать трение качения.

Б) дополнительные вопросы

20. Охарактеризовать случаи равенства нулю алгебраического момента силы.
21. Дать случаи приведения системы сил относительно центра.

22. Дать определение центра тяжести.
23. Охарактеризовать понятие однородного тела.
24. Дать формулы для определения координат центра тяжести объема V.
25. Дать формулы для определения координат центра тяжести площади S.
26. Дать формулы для определения координат центра тяжести линии L.
27. Охарактеризовать способ симметрии.
28. Охарактеризовать способ разбиения.
29. Охарактеризовать способ дополнения.
30. Охарактеризовать способ интегрирования.
31. Охарактеризовать экспериментальные способы.
32. Дать формулы для определения координат центров тяжести некоторых однородных тел (дуги окружности, площади треугольника, кругового сектора, объема пирамиды).
33. Дать определение силы трения скольжения.
34. Сформулировать законы трения скольжения.
35. Охарактеризовать реакцию шероховатой связи.

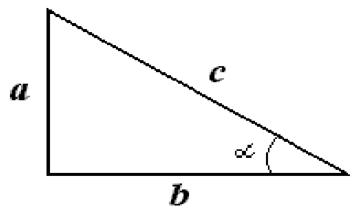
Приложение В

Примерный перечень вопросов по теме «Произвольная пространственная система сил система сил»

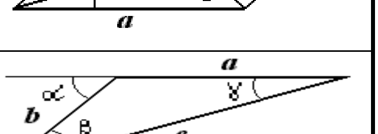
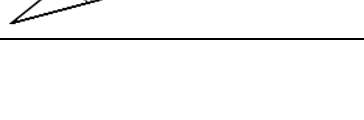
1. Дать понятие векторного момента силы относительно центра.
2. Дать понятие момента силы относительно оси.
3. Раскрыть случаи равенства нулю момента силы относительно оси.
4. Сформулировать основную теорему статики (теорему Пуансо).
5. Дать понятие главного момента системы сил относительно неподвижного центра.
6. Изложить геометрический способ нахождения главного момента системы сил относительно неподвижного центра.
7. Изложить аналитический способ нахождения главного момента системы сил относительно неподвижного центра.
8. Изложить геометрические условия равновесия произвольной пространственной системы сил.
9. Изложить аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил.
10. Изложить аналитические условия равновесия пространственной системы сил параллельных сил.

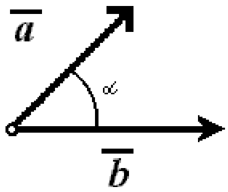
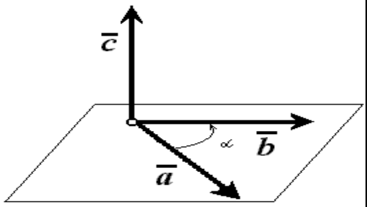
Приложение Г

Таблица 4.1 – Некоторые сведения из элементарной математики

№ п\п	Наименование, формулы	Рисунок
1	*Выражение тригонометрических функций через стороны прямоугольного треугольника* sin α = a / c, cos α = b / c, tg α = a / b, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.	

2	*Некоторые значения тригонометрических функций*
	sin 0^0 = cos 90^0 = 0; sin 90^0 = cos 0^0 = 1; sin 30^0 = cos 60^0 = 0,5;
	sin 60^0 = cos 30^0 = $\sqrt{3}$/2 = 0,866;
	sin 45^0 = cos 45^0 = $\sqrt{2}$ / 2 = 0,714;
	tg 30^0 = ctg 60^0 = $\sqrt{3}/3 = 0{,}577$;
	tg 60^0 = ctg 30^0 = $\sqrt{3}$ =1,732;
	tg 45^0 = ctg 45^0 = 1.	

3	*Теорема косинусов* $c_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha}$; $c_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha}$.	
5	*Теорема синусов* $a / \sin\beta = b / \sin\gamma = c / \sin\alpha$.	

6	*Скалярное произведение двух векторов* <u>Опр.</u> Скалярное произведение двух векторов – скалярная величина, определяемая по формуле: $(\vec{a}\cdot\vec{b}) = a\cdot b\cdot\cos\alpha = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z,$ где a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z – компоненты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.	
7	*Векторное произведение* <u>Опр.</u> Результатом векторного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, который направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и со стороны вектора $\vec{c}$ наименьший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору – $\vec{b}$ виден происходящим против хода часовой стрелки. Модуль векторного произведения $\lvert\vec{c}\rvert=\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert=a\cdot b\cdot\sin\alpha.$	

Приложение Д

Образец титульного листа для РГР

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Образец

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

ПО СТАТИКЕ

(КИНЕМАТИКЕ, ДИНАМИКЕ)

Вариант №_____

Выполнил студент группы №_____________

____

Семестр Весенний 2009/2010 учебного года.

Принял _______________________________