МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра строительной механики

Крекнин А.И., Наруta Т.А

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
Ч. 3 ДИНАМИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

для студентов направления подготовки 270800.62 – «СТРОИТЕЛЬСТВО»
очной формы обучения

Тюмень, 2014

УДК 531/534
К -79

Крекнин А. И., Теоретическая механика. Ч. 2. Динамика: Учебное пособие по организации самостоятельной работы для студентов направления подготовки 270800.62 – «СТРОИТЕЛЬСТВО» очной формы обучения. / А.И. Крекнин, Т.А. Нарута.– Тюмень: РИО ФГБОУ ВПО ТюмГАСУ, 2014. – 95 с.

Методические указания разработаны на основании рабочих программ ФГБОУ ВПО ТюмГАСУ для направления подготовки 270800 – «СТРОИТЕЛЬСТВО». Квалификация (степень) выпускника: бакалавр. Форма обучения: очная. Пособие предлагает методические указания и задания для организации самостоятельной работы студентов по двум основным направлениям: подготовка к практическим занятиям, выполнение и защита расчетно – графических работ. В целях оптимизации времени, затрачиваемого студентом на самостоятельную работу, в сборник включен справочник по основным теоретическим положениям раздела дисциплины «Динамика». Задания позволяют обеспечить дифференцированный подход к студентам в зависимости от уровня их базовой подготовки.

Рецензент: доцент, к.ф.-м.н. Лободенко Е.И.

Тираж: 200 экз.
Заказ №

Редакционно-издательский отдел ФГБОУ ВПО «Тюменский государственный архитектурно – строительный университет»

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. Введение

В соответствии с ГОС и Рабочими программами при изучении дисциплины «Теоретическая механика» студенты помимо работы на лекциях и практических занятиях обязаны заниматься самостоятельной работой.

Объемы самостоятельной работы определяются Укрупненными планами дисциплины, находящимися в составе Рабочих Программ, и учебными планами дисциплины и составляют около 50-ти процентов от общего объема часов, отводимых ГОС на изучение дисциплины.

Основными направлениями самостоятельной работы студентов по дисциплине являются:

1. Овладение теоретическими основами компетенций, формирование которых предусмотрено Рабочей программой дисциплины для направления подготовки «Строительство».
2. Выполнение и защита расчетно–графических работ.

Для оказания методической помощи при овладении студентами теоретическими основами компетенций по дисциплине в предлагаемой брошюре предусмотрены раздел II (Краткий справочник по динамике) и раздел VII (Приложения).

Основная часть самостоятельной работы приходится на выполнение, оформление и защиту индивидуальных расчетно–графических работ (далее по тексту – РГР). РГР выполняются по ключевым темам дисциплины. В настоящем пособии в разделах III (Задачи к заданиям), IV (Рисунки к задачам Д1 – Д5б) и V (Примеры выполнения задач) предложен перечень задач, из которых комплектуется РГР.

Номера вариантов определяются по сумме трех последних цифр учебного шифра студента, а номер условия в таблице – по последней цифре.

Каждое задание выполняется на листах формата А4 (могут быть использованы листы из школьной тетради в клетку, но имеющие формат А4), страницы нумеруются. На обложке указывается: название дисциплины, номер РГР, фамилия и инициалы студента, вариант (учебный шифр), институт, профиль, номер группы, номер семестра и учебный год (образец титульного листа – Приложение Е).

Решение каждой задачи обязательно начинать на новом листе. Решения оформляются на одной стороне листа. На первом листе вверху указывается номер и название задачи, далее делается чертеж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано, и что требуется определить (текст задачи не переписывается). Чертеж выполняется с учетом условия решаемого варианта задачи; то есть все углы, действующие силы, число тел и их расположение должны соответствовать данному варианту.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, его размеры должны позволить ясно показать векторы действующих сил, векторы скорости, ускорения и др. Изображать на чертеже перечисленные векторы, координатные оси, а также указывать размерность получаемых величин нужно обязательно. Решения необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы и теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) и подробно излагать весь ход расчетов.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращены для переделки.

Работа, которая выполнена и оформлена правильно, должна быть защищена. Защита проводится на консультациях, назначенных преподавателем. Во время защиты студент обязан ответить на вопросы по задачам, а также на другие вопросы по теме, к которой относится задача. Примерный перечень вопросов по темам дан в приложениях А – Ж. Также по усмотрению преподавателя во время защиты студенту может быть предложена для решения задача по данной теме.

Правильно выполненные и защищенные задачи в виде сшитой папки с соответствующим титульным листом (Приложение Е) предъявляются преподавателю по мере их выполнения или на экзамене (зачете).

II. Краткий справочник по динамике

Тема 1. Введение в динамику. Законы динамики

1.1 Основные понятия и определения

Определение динамики

Динамикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел под действием сил.

Силы

Сила - количественная мера механического взаимодействия тел (точек).

Постоянные и переменные силы

Сила может быть постоянной, зависеть от времени, положения тела и его скорости.

Утверждение

Все положения статики справедливы для переменных сил.

Активная (заданная) сила

Активной называется сила, которая, начав действовать на покоящееся тело, может привести его в движение.

Реактивная сила (реакция связи)

Реактивной часто называют силу реакции связи (реакцию связи).

Инертность

Инертность тела проявляется в том, что оно сохраняет свое движение при отсутствии действующих сил, а когда на него начинает действовать сила, то скорости точек тела изменяются не мгновенно, а постепенно, и тем медленнее, чем больше инертность этого тела.

Мера инертности

Количественной мерой инертности материального тела является физическая величина, называемая *массой* тела.

Свойства массы тела в классической механике

В классической механике масса m рассматривается как величина скалярная, положительная и постоянная для каждого данного тела.

Материальная точка

Материальная точка – это точка, обладающая массой.

Условие принятия материального тела в качестве материальной точки

Материальное тело можно рассматривать как материальную точку в тех случаях, когда по условиям задачи допустимо не принимать во внимание вращательную часть движения тела.

1.2 Законы динамики точки

Первый закон (закон инерции)

Изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние.

Инерциальная система отсчета

Система отсчета, в которой справедлив закон инерции, называется инерциальной.

В т о р о й з а к о н (основной закон динамики точки)

Произведение массы материальной точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы.

Математическое выражение закона

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

Основной закон динамики в случае действия на точку нескольких сил

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k.$$

Основной закон динамики для несвободной материальной точки

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k + \sum \vec{R}_k,$$

где $\sum \vec{F}_k$ - геометрическая сумма активных сил,

$\sum \vec{R}_k$ - геометрическая сумма реактивных сил (реакций связей).

Т р е т и й з а к о н (закон равенства действия и противодействия)

Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

1.3 Задачи динамики точки

Для свободной материальной точки.

1 задача. Зная закон движения точки и массу, определить действующую на нее силу;

2 задача. Зная действующие на точку силы, определить закон движения точки (*основная задача динамики*).

Для несвободной материальной точки.

1 задача динамики обычно состоит в том, чтобы, зная движение точки и действующие на нее активные силы, определить реакцию связи;

2 (основная) задача динамики распадается на две и состоит в том, чтобы, зная действующие на точку активные силы, определить:

а) закон движения точки,

б) реакцию наложенной связи.

1.4 Системы единиц

Для измерения всех механических величин достаточно ввести независимые друг от друга единицы измерения каких-нибудь 3-х величин.

Двумя из них принято считать единицы измерения длины и времени.

В качестве третьей наиболее удобно выбрать единицу измерения или массы, или силы.

Таким образом, в механике возможно введение двух принципиально отличных друг от друга систем единиц.

Первый тип систем единиц

В этих системах за основные принимаются единицы длины, времени и массы, а сила измеряется производной единицей.

Такой системой является Международная система единиц измерения физических величин (СИ). В ней основными единицами измерения механических величин являются метр (м), килограмм массы (кг) и секунда (с). Единица измерения силы - производная единица — 1 ньютон (Н).

1 Н — это сила, сообщающая массе в 1 кг ускорение 1 м/с^2 (1 Н = 1 кг · м/с^2).

Второй тип систем единиц

В этих системах за основные принимаются единицы длины, времени и силы, а масса измеряется производной единицей.

К таким системам относится имевшая большое распространение в технике система МКГСС, в которой основными единицами являются метр (м), килограмм силы (кГ) и секунда (с).

Единицей измерения массы в этой системе будет 1 кГ · с^2/м, т. е. масса, которой сила в 1 кГ сообщает ускорение 1 м/с^2.

Соотношение между единицами силы в системах СИ и МКГСС

1 кГ = 9,81 Н или 1 Н = 0,102кГ.

1.5 Основные виды сил

При решении задач динамики будем, в основном, рассматривать следующие постоянные или переменные силы.

Сила тяжести

Это постоянная сила $\vec{P}$, действующая на любое тело, находящееся вблизи земной поверхности. Модуль силы тяжести равен весу тела.

Под действием силы $\vec{P}$ любое тело при свободном падении на Землю (с небольшой высоты и в безвоздушном пространстве) имеет одно и то же ускорение g, называемое *ускорением свободного падения,* а иногда *ускорением силы тяжести.*

Значение g в разных местах земной поверхности различно; оно зависит от географической широты места и высоты его над уровнем моря. На широте Москвы (на уровне моря) g =9,8156 м/с^3.

Из второго уравнения динамики следует, что

$P=mg$ или $m=P/g$.

Вес тела или сила тяжести, как и величина g, *изменяются с изменением широты и высоты над уровнем моря; масса же является для данного тела величиной неизменной.*

Сила трения

Так кратко называется сила трения скольжения, действующая (при отсутствии жидкой смазки) на движущееся тело. Ее модуль определяется равенством

$$F= f\,N,$$

где f — коэффициент трения, который считают постоянным; N — нормальная реакция.

Сила упругости

Эта сила зависит от положения тела. В частности, для силы упругости пружины

$$F = c\,\lambda,$$

где λ — удлинение (или сжатие) пружины; c — коэффициент жесткости пружины (в СИ измеряется в Н/м).

Сила вязкого трения

Такая сила, зависящая от скорости, действует на тело при его медленном движении в очень вязкой среде (или при наличии жидкой смазки) и может быть выражена равенством

$$R=\mu V,$$

где V — скорость тела, μ — коэффициент сопротивления.

Тема 2. Дифференциальные уравнения движения точки. Решение задач динамики точки

2.1 Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Дифференциальные уравнения в проекциях на оси декартовой системы координат

Второй закон динамики $m\vec{a} = \sum \vec{F}_k$ в проекциях на оси декартовой системы координат x, y, z дает три дифференциальные уравнения 2-го порядка:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz},$$

которые можно записать в виде

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}, \qquad m\ddot{y} = \sum F_{ky}, \qquad m\ddot{z} = \sum F_{kz}.$$

Эти уравнения называются *дифференциальными уравнениями движения точки в прямоугольных декартовых координатах.*

Уравнения в проекциях на оси естественного трехгранника

Оси естественного трехгранника.

Осями естественного трехгранника (или скоростными осями) называются подвижные оси $M\tau nb$, имеющие начало в точке M и движущиеся вместе с ней (рисунок 1).

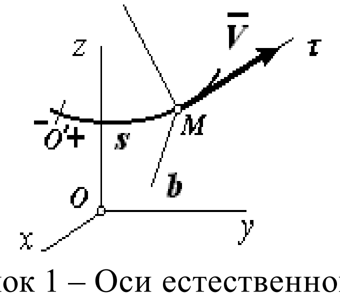


Рисунок 1 – Оси естественного трехгранника.

При этом ось $M\tau$ направлена по касательной к траектории; ось Mn (главная нормаль) – по нормали к траектории в сторону ее вогнутости; ось Mb (бинормаль) – перпендикулярна к первым двум осям так, чтобы она образовывала с ними правую систему координат.

Проектируя уравнение $m\vec{a} = \sum \vec{F}_k$ на оси $M\tau nb$, и учитывая, что $a_\tau = dV/dt,\ a_n = V^2/\rho,\ a_b = 0,$ получим

$$m\frac{dV}{dt} = \sum F_{k\tau}, \qquad m\frac{V^2}{\rho} = \sum F_{kn}, \qquad 0 = \sum F_{kb}.$$

Эти уравнения называются *дифференциальными уравнениями движения материальной точки в проекциях на оси естественного трехгранника.*

2.2 Решение первой задачи динамики

Первая задача динамики точки.

Первая задача динамики заключается в том, чтобы, зная движение точки, т. е. уравнения

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \qquad z = f_3(t),$$

определить действующую на точку силу.

Для решения задачи можно воспользоваться дифференциальными уравнениями движения точки в прямоугольных декартовых координатах, или дифференциальными уравнениями движения материальной точки в проекциях на оси естественного трехгранника

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}, \qquad m\ddot{y} = \sum F_{ky}, \qquad m\ddot{z} = \sum F_{kz};$$

$$m\frac{dV}{dt} = \sum F_{k\tau}, \qquad m\frac{V^2}{\rho} = \sum F_{kn}, \qquad 0 = \sum F_{kb}.$$

2.3 Решение второй (основной) задачи динамики

Вторая (обратная) задача динамики заключается в том, чтобы, зная действующие на точку силы, определить закон ее движения, т. е. уравнения

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \qquad z = f_3(t).$$

Решение основной задачи при прямолинейном движении точки.

Если ось Ox направить в направлении движения, то движение точки будет определяться одним дифференциальным уравнением движения точки в координатной форме $m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}$ или $m\ddot{x} = \sum F_{kx}$.

Иногда это уравнение удобно записать в форме

$$m\frac{dV_x}{dt} = \sum F_{kx}\text{, } \textbf{где } V_x = \frac{dx}{dt}.$$

Общее решение дифференциального уравнения будет иметь вид $x = f\,(t,\ C_1,\ C_2)$, где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования.

Для определения *частного решение* дифференциального уравнения необходимо определить постоянные C_1 и C_2. Эти постоянные находятся с помощью начальных условий.

Начальные условия при прямолинейном движении точки.

В случае прямолинейного движения начальные условия задаются в виде:

$$npu\, t = 0 \begin{cases} x = x_0 \\ V_x = V_{x0} \end{cases}$$

После нахождения постоянных интегрирования C_1 и C_2 частное решение примет вид

$$x = f(t,\ x_0,\ V_0),$$

то есть обратная (вторая) задача динамики будет решена.

Решение основной задачи при криволинейном движении точки.

В случае криволинейного движения точки основная задача динамики решается с помощью дифференциальных уравнений движения

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx},\quad m\ddot{y} = \sum F_{ky},\quad m\ddot{z} = \sum F_{kz}.$$

Начальные условия при криволинейном движении точки.

Если задача решается в прямоугольных декартовых координатах, то начальные условия, определяющие положение и скорость точки в начальный момент времени $t = 0$, задаются в виде:

$$npu\, t = 0 \begin{cases} x = x_0,\quad y = y_0,\quad z = z_0, \\ V_x = V_{x0},\quad V_y = V_{y0},\quad V_z = V_{z0}. \end{cases}$$

Примерный алгоритм решения основной задачи динамики.

1. Выбрать начало отчета (как правило, совмещая его с начальным положением точки).
2. Провести координатные оси, направляя их, как правило, в сторону движения.
3. Изобразить движущуюся точку в произвольном положении (но так, чтобы было $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ и $V_x > 0$, $V_y > 0$, $V_z > 0$).
4. Приложить к точке все действующие на нее силы.
5. Записать основное уравнение динамики применительно к данной задаче в векторном виде.
6. Спроектировать векторное уравнение на выбранные оси, то есть записать дифференциальные уравнения движения точки.
7. Преобразовать дифференциальные уравнения к виду, удобному для интегрирования.
8. Записать начальные условия.
9. Дважды проинтегрировать дифференциальные уравнения и получить их общие решения.
10. Определить постоянные интегрирования.
11. Записать частные решения дифференциальных уравнений, то есть подставить постоянные интегрирования в их общие решения.
12. Найти искомые в задаче величины и исследовать полученный результат.

Тема 3. Общие теоремы динамики точки

Общие теоремы являются следствием законов динамики. Они избавляют от необходимости интегрирования дифференциальных уравнений движения материальной точки.

3.1 Теорема об изменении количества движения точки.

Количество движение точки

Количеством движения материальной точки называется векторная величина $m\vec{V}$, равная произведению массы точки на ее скорость.

Физический смысл. Количество движения материальной точки является мерой ее механического движения.

Направление. Вектор $m\vec{V}$ направлен так же, как и скорость точки, т. е. по касательной к ее траектории.

Единицы измерения. В СИ —1 Н · с, в МКГСС—1 кГ · с.

Импульс силы

Физический смысл. Импульс силы характеризует действие, оказываемое на тело силой за некоторый промежуток времени.

Направление. Импульс направлен вдоль линии действия силы.

Элементарный импульс силы.

Опр. Элементарным импульсом силы называется векторная величина $d\vec{S}$, равная произведению силы на элементарный промежуток времени dt

$$d\vec{S} = \vec{F} \cdot dt.$$

Импульс силы за конечный промежуток времени

Импульс силы за некоторый промежуток времени t_1 равен определенному интегралу от элементарного импульса, взятому в пределах от нуля до t_1.

$$\vec{S} = \int_0^{t_1} \vec{F} \cdot dt.$$

Импульс постоянной силы ($\vec{F} = const$) за конечный промежуток времени

$$\vec{S} = \vec{F} \cdot t_1.$$

Проекция импульса силы на ось

$$S_x = \int_0^{t_1} F_x \cdot dt.$$

Единицы измерения импульса. В СИ -1кг · м/с, в МКГСС — 1 кГ · с.

Теорема об изменении количества движения точки

Теорема в дифференциальной форме. Производная по времени от количества движения точки равна сумме действующих на точку сил.

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \sum \vec{F}_k.$$

Теорема в конечной форме. Изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени.

$$m\vec{V}_2 - m\vec{V}_1 = \sum \vec{S}_k.$$

Теорема в проекции на ось.

$$mV_{2x} - mV_{1x} = \sum S_{kx}.$$

3.2 Теорема об изменении момента количества движения точки (теорема моментов)

Момент количества движения точки относительно центра.

Моментом количества движения точки относительно некоторого центра *0* называется векторная величина $\vec{m}_o(m\vec{V})$, определяемая равенством $\vec{m}_o(m\vec{V}) = \vec{r} \times m\vec{V}$, где $\vec{r}$ - радиус-вектор движущейся точки, проведенный из центра *O* (рисунок 2).

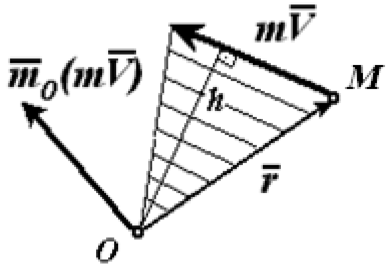


Рисунок 2 – Момент количества движения точки

<u>*Направление.*</u> Вектор $\vec{m}_o(m\vec{V})$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через $m\vec{V}$ и центр *O*. Модуль - $|\vec{m}_o(m\vec{V})| = m\,V\,h$.

Момент количества движения точки относительно оси

Моментом количества движения точки относительно оси *Oz*, проходящей через центр *O,* называется проекция вектора $\vec{m}_o(m\vec{V})$ на эту ось:

$$m_z(m\vec{V}) = [\vec{m}_O(m\vec{V})]_z = |\vec{m}_O(m\vec{V})| \cdot cos(\gamma),$$

где γ – угол между вектором $\vec{m}_o(m\vec{V})$ и осью *Oz*.

Теорема моментов относительно центра

Производная по времени от момента количества движения точки, взятого относительно какого-нибудь неподвижного центра, равна моменту действующей на точку силы относительно того же центра

$$\frac{d}{dt}[\vec{m}_o(m\vec{V})] = \vec{m}_O(\vec{F}).$$

Теорема моментов относительно оси

$$\frac{d}{dt}[m_z(m\vec{V})] = m_z(\vec{F}).$$

Следствие из теоремы моментов

Если момент действующей силы относительно некоторого центра равен нулю, то момент количества движения точки относительно этого центра есть величина постоянная.

Если $\vec{m}_O(\vec{F}) = 0$, то $\vec{m}_o(m\vec{V}) = \overrightarrow{const}$.

3.3 Теорема об изменении кинетической энергии точки

Работа силы

<u>*Физический смысл.*</u> Работа характеризует действие силы на тело при некотором его перемещении.

<u>*Элементарная работа силы.*</u> Элементарной работой силы $\vec{F}$, приложенной в точке *M*, называется скалярная величина $dA = F_\tau\, ds$, где F_τ – проекция силы $\vec{F}$ на касательную $M\tau$ к траектории точки *M*, ds – модуль элементарного перемещения точки *M* (рисунок 3).

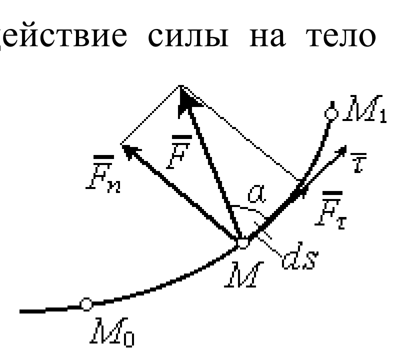


Рисунок 3 –Элементарная работа

Другие выражения для элементарной работы силы.

а) $dA = F\,ds\,\cos\alpha$.

Если угол α острый, то $dA > 0$;

если тупой - $dA < 0$;

если $\alpha = 90^0$, то $dA = 0$.

Если сила направлена перпендикулярно перемещению, то элементарная работа силы равна нулю.

б) $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Элементарная работа силы равна скалярному произведению силы на вектор элементарного перемещения точки ее приложения.

в) *Аналитическое выражение элементарной работы.*

$$dA = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz,$$

где x, y, z - координаты точки приложения силы $\vec{F}$.

Работа силы на конечном перемещении

Работа силы на любом перемещении M_0M_1 равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы.

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} dA = \int_{(Mo)}^{(M_1)} F_\tau ds \quad \text{или} \quad A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} dA = \int_{(Mo)}^{(M_1)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

Работа постоянной силы

Если F_τ = const, то при $M_0M_1 = s_1$

$$A_{(M_0M_1)} = F_\tau \cdot s_1$$

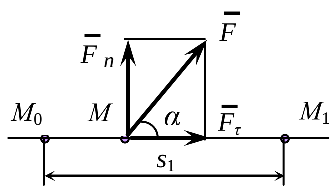


Рисунок 4 – Работа постоянной силы

Если сила постоянна по модулю и направлению ($\vec{F}$ = const), а точка, к которой приложена сила, движется прямолинейно (рисунок 4), имеем:

$$F_\tau = F \cdot \cos\alpha = const \quad \text{и} \quad A_{(M_0M_1)} = F \cdot s_1 \cdot \cos\alpha.$$

Единицы измерения работы

В СИ — 1 джоуль (1 Дж = 1Н·м = 1 = кг·м^2/с^2), в МКГСС — 1 кГ·м.

Частные случаи вычисления работы силы

Работа силы тяжести.

Работа силы тяжести равна взятому со знаком плюс или минус произведению модуля силы на вертикальное перемещение точки ее приложения (рисунок 5).

$$A_{(M_0M_1)} = \pm P \cdot h.$$

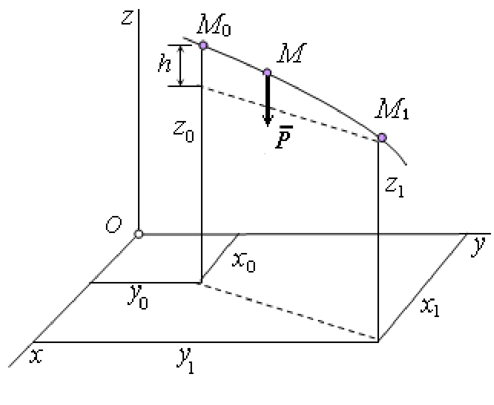


Рисунок 5 – Работа силы тяжести

Работа положительна, если начальная точка *выше* конечной, и отрицательна, если начальная точка *ниже* конечной.

Работа силы тяжести не зависит от вида той траектории, по которой перемещается точка ее приложения.

Силы, обладающие таким свойством, называются *потенциальными*.

Работа силы упругости

Работа силы упругости равна половине произведения коэффициента жесткости на разность квадратов начального и конечного удлинений (или сжатий) пружины (рисунок 6).

$$A_{(M_0M_1)} = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda_1^2).$$

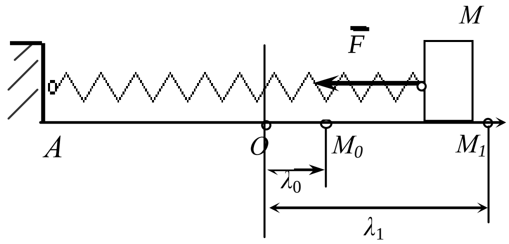


Рисунок 6 - Работа силы упругости

Работа силы упругости не зависит от вида той траектории, по которой перемещается точка ее приложения.

Сила упругости является *потенциальной.*

Работа силы трения

Работа силы трения при скольжении всегда отрицательна (рисунок 7).

$$A_{(M_0M_1)} = -\int_{(M_0)}^{(M_1)} F_{\text{тр}}\, ds = -\int_{(M_0)}^{(M_1)} f \cdot N \cdot ds.$$

Если сила трения постоянна, то

$$A_{(M_0M_1)} = -F_{\text{тр}} \cdot s.$$

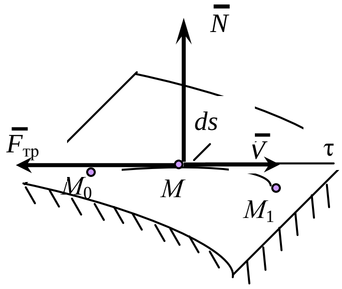


Рисунок 7 – Работа силы трения

Сила трения является *непотенциальной* силой.

Кинетическая энергия точки

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина $mV^2/2$, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.

Физический смысл. Кинетическая энергия является мерой механического движения точки.

Единица измерения. В системе СИ — 1 Дж, в системе МКГСС — 1 кГ·м.

Теорема об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \sum dA_k$$

Теорема об изменении кинетической энергии точки в конечном виде

Изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку сил на том же перемещении.

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}.$$

Теорема об изменении кинетической энергии точки в конечном виде при несвободном движении (случай движения без трения)

При перемещении по неподвижной гладкой поверхности (или кривой) изменение кинетической энергии точки равно сумме работ на этом перемещении приложенных к точке *активных* сил.

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A^a{}_{(M_0M_1)},$$

где $\sum A^a{}_{(M_0M_1)}$ - сумма работ активных сил.

3.4 *Мощность*

Физический смысл

Мощностью называется величина, определяющая работу, совершенную силой за единицу времени.

Вычисление мощности

В общем случае

$$N = dA / dt = F_\tau\, ds / dt = F_\tau\, V.$$

Вывод. Мощность равна произведению касательной составляющей силы на скорость.

При равномерной работе мощность $N = A / t_1$, где t_1 – время, в течение которого произведена работа A.

Единицы измерения мощности

В системе СИ - 1*ватт* (1 Вт = 1Дж/с), в системе МКГСС— 1 кГ·м/с.

В технике - 1 л. с. = 736 Вт (или 75 кГ · м/с).

Работу можно измерять произведением ее мощности на время работы.

Так возникла употребительная в технике единица измерения работы киловатт-час (1 кВт·ч=3,6 · 10^6 Дж ≈ 367100 кГ·м).

Тема 4. Прямолинейные колебания точки

4.1 Виды прямолинейных колебаний точки:

а) свободные колебания без учета сил сопротивления;

б) свободные колебания при вязком сопротивлении (затухающие колебания);

в) вынужденные колебания при отсутствии сопротивления;

4.2 Восстанавливающая сила

Точка *M,* движется прямолинейно под действием только *восстанавливающей силы* $\vec{F}$, направленной к неподвижному центру *O* (равновесное положение) и пропорциональной расстоянию от этого центра (рисунок 8). Проекция силы *F* на ось *Ox* будет $F_x=-cx$.

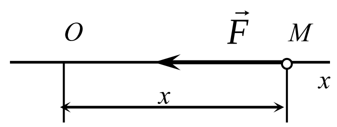


Рисунок 8 – Восстанавливающая сила

Сила *F* стремится вернуть точку в равновесное положение *O,* где *F=0;*

отсюда и наименование «восстанавливающая» сила. Примером такой силы является сила упругости пружины.

4.3 Свободные колебания без учета сил сопротивления

Дифференциальное уравнение

Второй закон динамики при свободных колебаниях точки имеет вид

$m\vec{a} = \vec{F}$

или в проекции на ось

$m\ddot{x} = -cx.$

Поделив на m и перенеся правую часть влево, получим дифференциальное уравнение движения свободных колебаний точки в проекции на ось x

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \qquad (1)$$

где обозначено $c/m = k^2$.

Общее решение дифференциального уравнения

Общее решение уравнения (1)

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt, \qquad (2)$$

где C_1 и C_2 - постоянные интегрирования.

Общее решение уравнения (1) также имеет вид

$$x = A \sin (kt + \alpha), \qquad (3)$$

где A и α - постоянные интегрирования.

Колебания, совершаемые точкой по закону (3), называются *гармоническими колебаниями.*

Амплитуда и фаза колебаний.

Величина A, равная наибольшему отклонению точки M от центра колебаний O, называется *амплитудой колебаний*.

Величина $\varphi = kt + \alpha$ называется *фазой колебаний*, а величина α определяет *начальную фазу колебаний*.

$$A = \sqrt{x_0^2 + V_0^2 / k^2}\,, \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = kx_0 / V_0.$$

Круговая частота, частота и период колебаний

Величина k называется *круговой частотой колебаний.* Она определяется по формуле $k^2 = c / m$, где c - жесткость пружины, m – масса точки.

Промежуток времени T, в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется *периодом колебаний*. Определяется формулой

$T = 2\,\pi / k.$

Величина ν, обратная периоду колебаний и определяющая число колебаний, совершаемое за 1 *с,* называется *частотой колебаний.* Определяется формулой $\nu = 1/ T = k /2\,\pi.$

Свойства свободных колебаний:

а) амплитуда A и начальная фаза α *зависят* от начальных условий;

б) частота k и период T колебаний от начальных условий *не зависят*.

Влияние постоянной силы на свободные колебания точки

Постоянная сила, не изменяя характера колебаний, смещает центр колебаний в сторону действия силы на статическое отклонение $\lambda_{\text{СТ}}$.

4.4 Свободные колебания с учетом сил сопротивления (затухающие колебания)

Свободными колебаниями при вязком сопротивлении (затухающими колебаниями) называются колебания, происходящие под действием *восстанавливающей силы* $\vec{F}$ и *силы вязкого трения*, пропорциональной первой степени скорости: $\vec{F} = -\mu\vec{V}$.

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

Уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0,$$

где обозначено $c / m = k^2$, $\mu / m = 2b$.

Общее решение дифференциального уравнения затухающих колебаний

При $k > b$, общее решение уравнения имеет вид $x = Ae^{-bt}\sin(k_1 t + \alpha)$,

где обозначено $k_1 = \sqrt{k^2 + b^2}$.

Период затухающих колебаний

Промежуток времени $T_1 = 2\pi / k_1 = 2\pi / \sqrt{k^2 - b^2}$, принято называть периодом затухающих колебаний.

4.5 Вынужденные колебания при отсутствии сопротивления

Вынужденные колебания при отсутствии сопротивления происходят под действием восстанавливающей силы $\vec{F}$ и периодически изменяющейся со временем силы $\vec{Q}$, проекция которой на ось Ox равна $Q_x = Q_0 \sin pt$.

Такая сила называется возмущающей силой, а колебания, происходящие при ее действии, называются вынужденными. Величина p - частота возмущающей силы.

Возмущающей силой может быть сила, являющаяся любой функцией времени. Ограничимся рассмотрением только случая, когда Qx меняется по гармоническому закону. Такая возмущающая сила называется гармонической.

Дифференциальное уравнение движения точки в этом случае будет

$$m\ddot{x} = -cx + Q_0 \sin pt.$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = P_0 \sin pt, \quad (*)$$

где обозначено $c / m = k^2$, $Q_0 / m = P_0$.

Выражение (*) – дифференциальное уравнение вынужденных колебаний точки при отсутствии сопротивления.

Общее решение уравнения (*) имеет вид

$$x = A\sin(kt+\alpha) + \frac{P_0}{k^2 - p^2}\sin pt,$$

где A и α – постоянные интегрирования, определяемые по начальным условиям.

Из решения видно, что колебания точки слагаются из:

1. собственных колебаний с амплитудой A и частотой k;
2. вынужденных колебаний с амплитудой $B = P_0 / (k^2 - p^2)$ и частотой p**.**

4.6 Резонанс

Вынужденные колебания при отсутствии сопротивления, когда $p \approx k$ (частота возмущающей силы совпадает с частотой собственных колебаний), называются резонансом.

Это явление описывается уравнением

$$x = \left(\frac{P_0}{2p}\right)\cdot t\cdot\sin(pt - \pi/2).$$

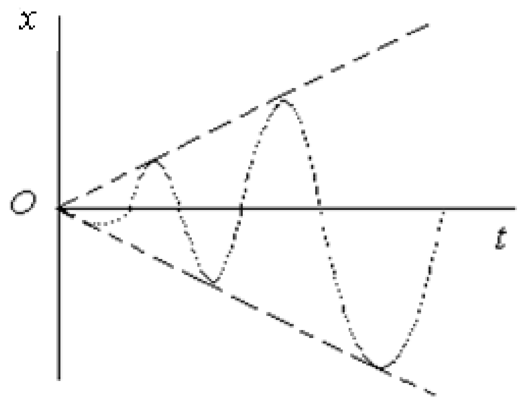


Рисунок 9 –

Амплитуда таких колебаний $B = P_0t/(2p)$ с течением времени неограниченно возрастает, как это показано на рисунке 9.

Тема 5. Относительное движение точки

5.1 Основной закон динамики относительного движения материальной точки

Основной закон динамики относительного движения материальной точки в векторной форме имеет вид

$$m\vec{a} = \sum\vec{F}_k + \vec{F}^{и}_{пер} + \vec{F}^{и}_{кор},$$

где $\sum\vec{F}_k$ – сумма сил, действующих на точку (рисунок 10),

$\vec{F}^{и}_{пер}$ – переносная сила инерции, $\vec{F}^{и}_{кор}$ – кориолисова сила инерции.

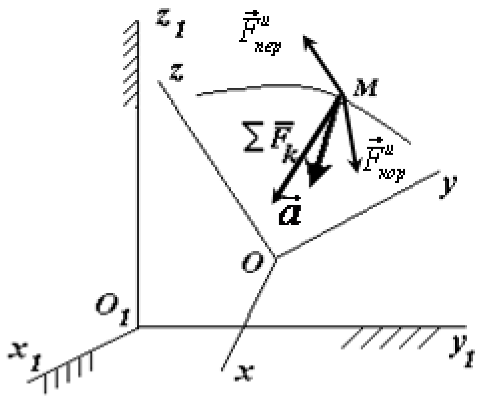


Рисунок 10 – Относительное движение

5.2 Переносная и кориолисова силы инерции

Переносная сила инерции (рисунок 11) определяется по формуле $\vec{F}^{и}_{пер} = -m\vec{a}_{пер}$,

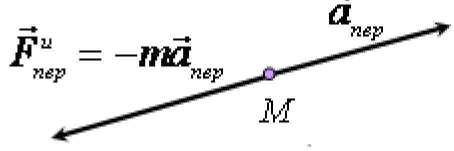


Рисунок 11 – Переносная сила инерции

Кориолисова сила инерции (рисунок 12) определяется по формуле $\vec{F}^{и}_{кор} = -m\vec{a}_{кор}$.

Рисунок 12 – Кориолисова сила инерции

5.3 Принцип относительности классической механики

Никакими механическими экспериментами нельзя обнаружить, находится ли данная система отсчета в покое или совершает поступательное, равномерное и прямолинейное движение.

5.4 Относительный покой

Если точка по отношению к подвижным осям $Oxyz$ находится в покое (рисунок 13), то имеет место равенство

$$\sum \vec{F}_k + \vec{F}^{и}_{пер} = 0.$$

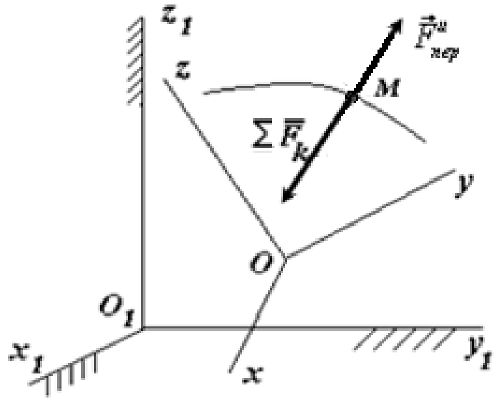


Рисунок 13 – Относительный покой

Тема 6. Введение в динамику механической системы

6.1 Механическая система. Внешние и внутренние силы

Понятие механической системы

Систему материальных точек или тел, движение (или равновесие) которой рассматривается, называют *механической системой.*

Если между точками (телами) механической системы действуют силы взаимодействия, то она обладает тем свойством, что в ней положение или движение каждой точки (тела) зависит от положения или движения всех остальных.

Внешние и внутренние силы.

Действующие на механическую систему силы разделяют на *внешние* $-\vec{F}^{e}_{k}$ и *внутренние* $-\vec{F}^{i}_{k}$.

Внешними называются силы, действующие на точки системы со стороны точек и тел, не входящих в состав данной системы.

Внутренними называются силы, с которыми точки и тела данной системы действуют друг на друга.

Свойства внутренних сил

Свойство 1. Геометрическая сумма (главный вектор) всех внутренних сил системы равняется нулю

$$\sum \vec{F}^{i}_{k} = 0.$$

Свойство 2. Сумма моментов (главный момент) всех внутренних сил системы относительно любого центра или оси равняется нулю

$$\sum \vec{m}_O(\vec{F}_k^i) = 0 \text{ и } \sum m_x(\vec{F}_k^i) = 0.$$

6.2 Масса системы. Центр масс

Масса системы равна арифметической сумме масс всех точек или тел, образующих систему: $M = \sum m_k$ (обозначатся M или m).

Центр масс или центр инерции механической системы

Опр. Геометрическая точка C, координаты которой определяются формулами

$$x_C = \frac{1}{M}\sum m_k x_k, \qquad y_C = \frac{1}{M}\sum m_k y_k, \qquad z_C = \frac{1}{M}\sum m_k z_k,$$

называется центром масс или центром инерции механической системы.

Если положение центра масс определяется его радиусом – вектором $\vec{r}_C$, то

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum m_k \vec{r}_k,$$

где $\vec{r}_k$ − радиусы – векторы точек, образующих систему.

6.3 Моменты инерции тела относительно оси. Радиус инерции

Моментом инерции тела (системы) относительно данной оси Oz (или *осевым моментом инерции*) называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний от этой оси: $J_Z = \sum m_k h_k^2$.

Физический смысл: осевой момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении и характеризует распределение массы относительно оси.

Вычисление осевых моментов инерции через координаты точек системы

$$J_Z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2), \quad J_X = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2), \; J_У = \sum m_k (z_k^2 + x_k^2).$$

Радиус инерции тела относительно оси

Радиусом инерции тела относительно оси называется линейная величина ρ_z, определяемая равенством $J_z = M\rho_z^2$.

Момент инерции относительно оси в случае сплошного тела.

Имеет вид

$$J_Z = \int_{(V)} h^2 dm \text{ или } J_Z = \int_{(V)} \rho h^2 dV, \; J_X = \int_{(V)} \rho(y^2 + z^2) dV \text{ и т. д.}$$

6.4 Моменты инерции некоторых однородных тел

Тонкий однородный стержень длиной l, массы m

Момент инерции относительно оси Az, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец A (рисунок 14)

$$J_{Az} = M\,l^{2} / 3.$$

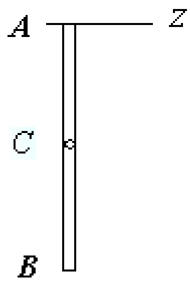


Рисунок 14 – Момент инерции стержня

Тонкое круглое однородное кольцо радиуса R, массы m

Момент инерции относительно оси Cz (рисунок 15), перпендикулярной стержню

$$J_{Cz} = M\ R^{2}.$$

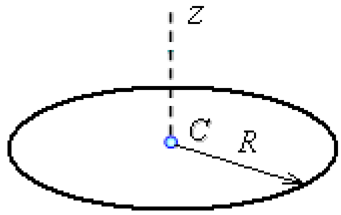


Рисунок 15 – Момент инерции кольца

Круглая однородная пластинка или цилиндр радиуса R, массы m

Момент инерции относительно оси Cz, перпендикулярной плоскости пластинки (рисунок 16) и проходящей через его центр C

$$J_{Cz} = M\ R^{2} / 2.$$

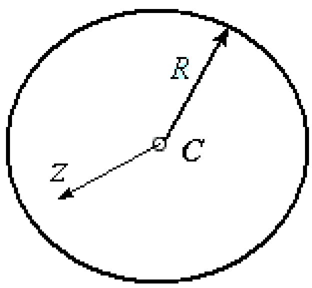


Рисунок 16 – Момент инерции цилиндр

6.5 Моменты инерции тела относительно параллельных осей. Теорема Гюйгенса

Теорема. Момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы всего тела на квадрат расстояния между осями (рисунок 17).

$$J_{Oz^{\prime}} = J_{Cz} + M\,d^{2}.$$

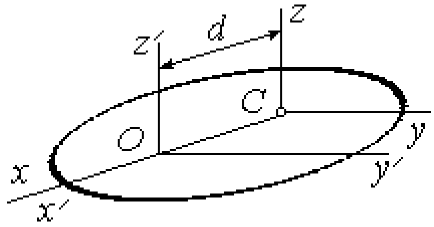


Рисунок 17 – Теорема Гюйгенса

Тема 7. Теорема о движении центра масс

7.1. Дифференциальные уравнения движения системы

Уравнения в векторной форме имеют вид

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i,$$
$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$m_n\vec{a}_n = \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i.$$

7.2 Теорема о движении центра масс системы

Формулировка теоремы

Теорема. Произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил, т.е.

$$M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e.$$

Дифференциальные уравнения движения центра масс системы в проекциях на оси декартовой системы координат

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e, \qquad M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e, \qquad M\ddot{z}_C = \sum F_{kz}^e.$$

7.3 Закон сохранения движения центра масс системы

1. Если $\sum \vec{F}_k^e = 0$, то $\vec{V}_C = const.$

Вывод 1. Если сумма всех внешних сил равна нулю, то центр масс системы движется с постоянной по модулю и направлению скоростью, т. е. равномерно и прямолинейно.

2. Если $\sum F_{kx}^e = 0$, то $\dot{x}_C = V_{Cx} = const.$

Вывод 2. Если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую - нибудь ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось есть величина постоянная.

В частности, если при $t = 0$ $V_{Cx0} = 0$, то $x_C = const.$

Тема 8. Теорема об изменении количества движения

8.1 Количество движения системы

Опр. Количеством движения системы называется векторная величина $\vec{Q}$, равная геометрической сумме (главному вектору) количеств движений всех точек системы

$$\vec{Q} = \sum m_k \vec{V}_k.$$

Вычисление главного вектора количества движения системы.

Количество движения системы равно произведению массы всей системы на скорость ее центра масс

$$\vec{Q} = M\,\vec{V}_C.$$

8.2 Теорема об изменении количества движения механической системы

Теорема в дифференциальной форме.

Теорема

Производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e.$$

Теорема в проекциях на координатные оси

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e.$$

Теорема в интегральной (конечной) форме

Теорема

Изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов, действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \int_0^{t_1} \vec{F}_k^e dt \quad или \quad \vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_k^e.$$

Теорема в проекциях на координатные оси

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}^e, \qquad Q_{1y} - Q_{0y} = \sum S_{ky}^e, \qquad Q_{1z} - Q_{0z} = \sum S_{kz}^e.$$

8.3 Закон сохранения количества движения механической системы

1. Если $\sum \vec{F}_k^e = 0,$ то $\vec{Q} = \overrightarrow{const}.$

Вывод 1. Если сумма всех внешних сил, действующих на механическую систему, равна нулю, то вектор количества движения системы будет постоянен по модулю и направлению.

2. Если $\sum F_{kx}^e = 0,$ то $Q_x = const.$

Вывод 2. Если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую - нибудь ось равна нулю, то проекция вектора количества движения системы на эту ось есть величина постоянная.

Тема 9. Теорема об изменении момента количества движения.

9.1 Теорема об изменении главного момента количеств движения механической системы (теорема моментов)

Главный момент количеств движения системы (кинетический момент)

Главным моментом количеств движения (кинетическим моментом) системы относительно центра *O* называется величина $\vec{K}_0,$ равная геометрической сумме моментов количеств движений всех точек системы относительно этого центра:

$$\vec{K}_0 = \sum \vec{m}_0(m_k \vec{V}_k).$$

Кинетический момент системы относительно координатных осей:

$$K_x = \sum m_x(m_k\vec{V}_k), \qquad K_y = \sum m_y(m_k\vec{V}_k), \qquad K_z = \sum m_z(m_k\vec{V}_k).$$

Физический смысл.

Кинетический момент системы является мерой механического движения механической системы при ее вращательном движении.

Кинетический момент вращающегося тела

Кинетический момент тела, вращающегося относительно оси, равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на его угловую скорость

$$K_z = J_z\omega.$$

Кинетический момент нескольких тел, вращающихся вокруг одной и той же оси, равен

$$K_z = J_{1z}\,\omega_1 + J_{2z}\,\omega_2 + \ldots + J_{Nz}\,\omega_n\,.$$

Формулировка теоремы об изменении главного момента количеств движения системы (теоремы моментов)

Теорема моментов относительно некоторого неподвижного центра

Производная по времени от главного момента количеств движения системы относительно неподвижного центра *O* равна сумме моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно того же центра

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k^e).$$

Теорема моментов относительно осей

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum m_x(\vec{F}_k^e), \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum m_y(\vec{F}_k^e), \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum m_z(\vec{F}_k^e).$$

9.2 Закон сохранения кинетического момента системы

1. Если $\sum \vec{m}_O(\vec{F}_k^e) = 0,$ то $\vec{K}_0 = \overrightarrow{const}$

Вывод 1. Если сумма моментов относительно данного центра всех приложенных к системе внешних сил равна нулю, то кинетический момент системы относительно этого центра численно и по направлению постоянен.

2. Если $\sum m_Z(\vec{F}_k^e) = 0,$ то $K_Z = const.$

Вывод 2. Если сумма моментов относительно какой-нибудь оси всех приложенных к системе внешних сил равна нулю, то кинетический момент системы относительно этой оси величина постоянная.

Выводы 1 и 2 выражают закон сохранения кинетического момента механической системы.

9.3 Закон сохранения главного момента количества движения в случае вращающейся системы

Если $\sum m_z(\vec{F}_k^e) = 0$, то $K_z = J_z\ \omega = const$:

а) неизменяемая система, то $\omega = const$.

б) если система изменяемая, то

$$J_{Z1}\ \omega_1 = J_{Z2}\ \omega_2\ ,$$

то есть при увеличении момента инерции угловая скорость системы будет уменьшаться, при уменьшении момента инерции – увеличиваться.

Тема 10. Теорема об изменении кинетической энергии

10.1 Кинетическая энергия механической системы

Кинетическая энергия системы

Кинетической энергией системы называется скалярная величина T, равная сумме кинетических энергий всех точек системы, т. е.

$$T = \sum m_k V_k^2/2.$$

Формулы для вычисления кинетической энергии твердого тела при различных его движениях:

а) при поступательном движении

Кинетическая энергия при поступательном движении тела равна половине произведения его массы на квадрат скорости центра масс, т.е.

$$T_{пост} = M\ V_C^2/2.$$

б) при вращательном движении

Кинетическая энергия тела при вращательном движении равна половине произведения момента инерции тела на квадрат его угловой скорости т. е.

$$T_{вр} = J_z \omega^2/2.$$

в) при плоском движении тела

Кинетическая энергия тела при плоском движении равна кинетической энергии вращательного движения вокруг мгновенной оси, проходящей через центр масс, т.е.

$$T = \frac{J_{ZP} \cdot \omega^2}{2}$$

или кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс, плюс кинетическая энергия вращательного движения вокруг мгновенной оси, проходящей через центр масс, т.е.

$$T_{пл} = MV_C^2/2 + J_{ZC}\omega^2/2.$$

10.2 Некоторые случаи вычисления работ сил, приложенных к системе

Работа сил тяжести, действующих на систему

Работа сил тяжести, действующих на систему, вычисляется как работа их главного вектора $\vec{P}$ на перемещении центра масс системы, т. е.

$$A = P \cdot (z_{C0} - z_{C1}),$$

где z_{C0}, z_{C1} – координаты центра масс соответственно в начальном и конечном положениях системы.

С учетом того, что $z_{C0} - z_{C1} = \pm h_C$, имеем

$$A = \pm P h_C ,$$

где h_C – вертикальное смещение центра масс системы.

Работа сил, приложенных к вращающемуся телу:

а) при повороте на конечный угол (рисунок 18)

$$A = \int_0^{\varphi_1} M_z d\varphi,$$

где $M_z = m_z(\vec{F}) = F_\tau \, h$ – вращающий момент;

б) при постоянном моменте

$$A = M_Z \, \varphi_1.$$

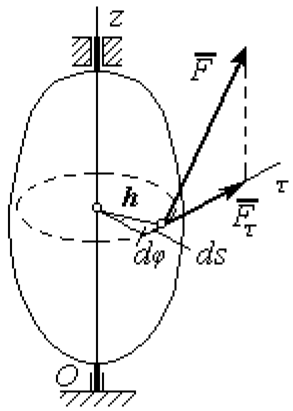


Рисунок 18 – Работа силы, приложенной к вращающемуся телу

Работа сил трения, действующих на катящееся колесо:

а) при качении без скольжения

Работа силы трения, препятствующей скольжению, на любом перемещении тела равна нулю;

б) работа сил сопротивления качению

Если нормальная реакция $N = const$, то

$$A^{кач} = -M_k \, \varphi,$$

где φ – угол поворота тела, $M_k = f_k \, N$ – момент трения качения, f_k – коэффициент трения качения.

10.3 Теорема об изменении кинетической энергии системы

Теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме

Теорему в дифференциальной форме выражает равенство

$$dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i .$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы в интегральной (конечной) форме

Теорема. Изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил т. е.

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i .$$

Частные случаи теоремы об изменении кинетической энергии системы:

а) неизменяемая система;

Опр. Неизменяемой называется механическая система, в которой расстояние между каждыми взаимодействующими точками остается во все время движения постоянным.

Вывод. В случае неизменяемой системы сумма работ всех внутренних сил равна нулю и теорема имеет вид

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e .$$

б) система с идеальными связями;

Опр. Идеальными называются связи, сумма работ всех реакций которых при элементарном перемещении системы равна нулю.

Теорема. Изменение кинетической энергии системы с идеальными, не изменяющимися со временем связями, при любом ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении приложенных к системе внешних и внутренних активных сил, т. е.

$$dT = \sum dA_k^a \quad и \quad T_1 - T_0 = \sum A_k^a .$$

Тема 11. Потенциальное силовое поле

11.1 Силовое поле и силовая функция

Опр. Область, в каждой точке которой на помещенную туда частицу действует сила, зависящая от положения (координат) этой точки называется *силовым полем*.

Проекции силы на ось для силового поля. Для силового поля, исходя из его свойств, проекции силы на ось являются функциями координат точки x, y, z, т. е.

$$F_x = \Phi_1(x,y,z), \quad F_y = \Phi_2(x,y,z), \quad F_z = \Phi_3(x,y,z).$$

Опр. Функция U от координат x,y,z, дифференциал которой равен элементарной работе $dA = dU\,(x,y,z)$ или

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = dU\,(x,y,z),$$

называется *силовой функцией.*

11.2 Потенциальное силовое поле

Силовое поле, для которого существует силовая функция, называется потенциальным силовым полем, а силы, действующие в этом поле, - потенциальными силами.

Работа силы на конечном перемещении в потенциальном силовом поле

Вывод. Работа силы на конечном перемещении $M_1\,M_2$

$$A_{(M_1M_2)} = \int_{(M_1)}^{(M_2)} dA = \int_{(M_1)}^{(M_2)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_{(M_1)}^{(M_2)} dU(x,y,z) = U_2 - U_1.$$

где $U_1\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $U_2\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$ – значения силовой функции в точках M_1 и M_2 поля соответственно.

Основным свойством потенциального силового поля является то, что работа сил поля при движении в нем материальной точки зависит только от начального и конечного положений этой точки, ни от вида ее траектории, ни от закона движения не зависит.

11.3 Силовая функция в потенциальном силовом поле

Силовая функция

Вывод. Силовая функция находится из равенства

$$U = \int dA + C \quad \text{или} \quad U = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) + C.$$

Обычно считают в некоторой точке *O,* называемой «нулевой точкой», величину $U_0 = 0$ и определяют *C* исходя из этого условия.

Силовые функции некоторых потенциальных полей

Для поля сил тяжести. Если ось *z* направлена вертикально вверх, то $dA = - Pdz$, откуда, считая $U = 0$ при $z = 0$, находят $U = - P\,z$.

Для поля силы упругости, действующей вдоль оси Ox,

$dA = - c\,x$, откуда, считая $U = 0$ при $x = 0$, находят $U = - c\,x^2/2$.

Выражение проекций силы через силовую функцию

Вывод. В потенциальном силовом поле проекции силы на координатные оси равны частным производным от силовой функции по соответствующим координатам, т. е.

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Силовая функция системы материальных точек

Опр. Для системы материальных точек дифференциал силовой функции, зависящей от координат точек системы, равен сумме элементарных работ всех действующих на систему сил поля, т. е.

$$dU = \sum dA_k.$$

11.4 Потенциальная энергия точки и системы

Потенциальная энергия точки

Опр. Потенциальной энергией материальной точки в данном положении M называется скалярная величина П, равная той работе, которую произведут силы поля при перемещении точки из положения M в нулевое $П = A_{(MO)}$.

Вывод. Потенциальная энергия П зависит от координат x, y, z точки M, т. е. $П = П(x, y, z)$.

Физический смысл потенциальной энергии точки

Это величина, характеризующая «запас работ», которым обладает материальная точка в данном пункте силового поля.

Связь потенциальной энергии точки с силовой функцией

Вывод. Потенциальная энергия в любой точке силового поля равна значению силовой функции в этой точке, взятому с обратным знаком, т. е.

$$П(x,y,z) = -U(x,y,z).$$

Вывод. При рассмотрении всех свойств потенциального силового поля можно пользоваться понятием потенциальной энергии.

Примечание. Связь установлена в предположении, что нулевые точки для функций $П(x, y, z)$ и $U(x, y, z)$ совпадают.

Вычисление работы потенциальной силы

Вывод. Работа потенциальной силы равна разности значений потенциальной энергии движущейся точки в начальном и конечном ее положениях, т.е.

$$A_{(M_1 M_2)} = П_1 - П_2.$$

Выражения потенциальной энергии для некоторых потенциальных силовых полей

Для поля силы тяжести (ось z вертикально вверх)

потенциальная энергия $П = -U = Pz$.

Для поля силы упругости (*действующей вдоль оси Ox*)

потенциальная энергия $П = -U = cx^2/2$.

Потенциальная энергия системы

Вывод. Потенциальная энергия П механической системы в данном ее положении равна работе, которую произведут силы поля при перемещении системы из данного положения в нулевое, т. е.

$$П = \sum A_{(M_k O_k)}.$$

Связь потенциальной энергии системы с ее силовой функцией

Связь между потенциальной энергией П и силовой функцией U такая же, как для точки

$$\Pi(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = -U(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n).$$

11.5 Закон сохранения механической энергии

Формулировка закона сохранения механической энергии

Вывод. При движении под действием потенциальных сил сумма кинетической и потенциальных энергий системы в каждом положении остается величиной постоянной, т. е.

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = const.$$

Полная механическая энергия системы

Величина $T + \Pi$ называется *полной механической энергией системы*, а система, для которой выполняется закон сохранения механической энергии, – *консервативной системой*.

11.6 Диссипативные системы

Силы, вызывающие диссипацию (рассеивание) механической энергию, называются *диссипативными силами*, а механическую систему, в которой происходит диссипация энергии, - *диссипативной системой.*

Тема 12. Динамика твердого тела

12.1 Дифференциальные уравнения поступательного движения тела

Вывод. При поступательном движении твердого тела все его точки движутся так же, как и его центр масс. Поэтому дифференциальные уравнения движения центра масс являются дифференциальными движения поступательного движения твердого тела:

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e,$$
$$m\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e,$$
$$m\ddot{z}_C = \sum F_{kz}^e,$$

Здесь m – масса тела; x_C, y_C, z_C – координаты центра масс тела;

F_{kx}^e, F_{ky}^e, F_{kz}^e – проекции внешних сил $\vec{F}_k^e$ на оси координат.

12.2 Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

Кинетический момент твердого тела относительно оси вращения

Вывод. Кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость тела

$$K_z = J_z\omega.$$

Дифференциальное уравнение вращения твердого тела

Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси имеет вид

$$J_z\ddot{\varphi} = \sum M_{kz}^e,$$

где J_z – осевой момент инерции тела;

$\sum M_{kz}^e$ – сумма моментов внешних сил, действующих на тело, относительно оси вращения.

12.3 Физический маятник

Физическим маятником (рисунок 19) называется твердое тело, которое может совершать колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси под действием силы тяжести.

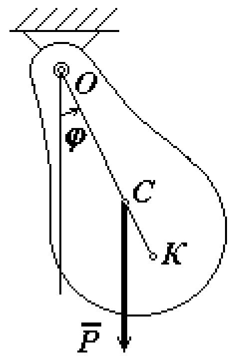


Рисунок 19 – Физический маятник

Дифференциальное уравнение колебаний маятника

Вывод. Уравнение имеет вид

$$\ddot{\varphi} + k^2 sin\varphi = 0,$$

где обозначено: $k^2 = Pa / J_0$, P - вес маятника,

a - расстояние OC, J_0 – осевой момент инерции маятника.

Это уравнение в обычных функциях не интегрируется.

Дифференциальное уравнение малых колебаний маятника

Вывод. Полагая угол φ малым, и учитывая приближенное равенство $\sin\varphi \approx \varphi$, получим

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0.$$

Это дифференциальное уравнение малых колебаний физического маятника.

Решение дифференциального уравнения малых колебаний маятника

При начальных условиях: $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\omega_0 = 0$ решение дифференциального уравнения малых колебаний имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt.$$

Период малых колебаний физического маятника

$$T_\Phi = 2\pi/k = 2\pi\sqrt{J_0 / Pa}.$$

12.4 Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела

Плоское движение определяется в любой момент времени положением полюса и углом поворота вокруг полюса. Совмещая полюс с центром масс, получим дифференциальные уравнения плоского движения

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e, \quad M\ddot{y} = \sum F_{ky}^e, \quad J_C \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum m_C(\vec{F}_k^e).$$

Тема 13. Принцип Даламбера

13.1 Принцип Даламбера для материальной точки

Понятие силы инерции точки

Векторная величина, равная по модулю произведению массы точки на ее ускорение и направленная противоположно этому ускорению, называется *силой инерции* точки

$$\vec{F}^{и} = -m\vec{a}.$$

Формулировка принципа Даламбера для точки

Вывод. Если в любой момент времени к действующим на точку активным силам и реакции связи присоединить силу инерции, то полученная система сил будет уравновешенной

$$\vec{F}^{a} + \vec{N} + \vec{F}^{и} = 0.$$

13.2 Принцип Даламбера для механической системы

Вывод. Если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних и внутренних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной и к ней можно применять все уравнения равновесия статики

$$\vec{F}_k^{e} + \vec{F}_k^{i} + \vec{F}_k^{и} = 0.$$

13.3 Вычисление главного вектора и главного момента сил инерции

Главный вектор сил инерции системы

Главным вектором сил инерции механической системы называется геометрическая сумма сил инерции точек системы

$$\vec{R}^{и} = \Sigma \vec{F}_k^{и}.$$

Главный момент сил инерции относительно центра

Опр. Главным моментом сил инерции механической системы относительно некоторого центра называется геометрическая сумма моментов сил инерции точек системы относительно того же центра

$$\vec{M}_0^{и} = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k^{и}).$$

Вычисление главного вектора сил инерции системы

Вывод. Главный вектор сил инерции механической системы (в частности, твердого тела) равен произведению массы системы (тела) на ускорение центра масс и направлен противоположно этому ускорению.

$$\vec{R}^{и} = -m\vec{a}_C.$$

Вычисление главного момента сил инерции относительно центра и оси

Вывод. Главный момент сил инерции механической системы (твердого тела) относительно некоторого центра или оси *z* равен взятой со знаком минус производной по времени от кинетического момента системы (тела) относительно того же центра или оси

$$\vec{M}_0^u = -\frac{d\vec{K}_0}{dt} \text{ и } M_Z^u = -\frac{dK_Z}{dt}.$$

13.4 Приведение сил инерции твердого тела

Приведение сил инерции твердого тела, движущегося поступательно

Вывод. Силы инерции тела приводятся к равнодействующей, равной $\vec{R}^u$ и проходящей через центр масс тела.

Приведение сил инерции при вращательном движении твердого тела вокруг оси, проходящей через центр масс тела

Вывод. В этом случае система сил инерции тела приводится к одной паре сил с моментом M_{oz}^u, лежащей в плоскости симметрии тела

$$M_{OZ}^u = -J_{OZ} \cdot \dot{\omega} = -J_{OZ} \cdot \varepsilon.$$

Приведение сил инерции при плоском движении твердого тела вокруг оси, проходящей через центр масс тела

Вывод. В этом случае система сил инерции тела приводится к лежащей в плоскости симметрии силе, равной $\vec{R}^u$, и приложенной в центре масс C тела, и паре с моментом

$$M_{oz}^u = -J_{CZ}\,\varepsilon.$$

Тема 14. Принцип возможных перемещений и общее уравнение динамики

14.1 Классификация связей, налагаемых на систему

Определение связей

Связями называются любого вида ограничения, которые налагаются на положения и скорости точек механической системы и выполняются независимо от того, какие на систему действуют заданные силы.

Стационарные и нестационарные связи

Связи, не изменяющиеся со временем, называются *стационарными*, а изменяющиеся со временем – *нестационарными*.

Геометрические и кинематические (дифференциальные) связи

Связи, налагающие ограничения на положение (координаты) точек системы, называются *геометрическими*, а налагающие ограничения еще и на скорости (первые производные от координат по времени) точек системы – *кинематическими* или *дифференциальными*.

Голономные и неголономные связи

Геометрические и интегрируемые дифференциальные связи называются связями *голономными*, а неинтегрируемые дифференциальные связи – *неголономными*.

Удерживающие и неудерживающие связи

Удерживающими связями называются связи, которые накладывают ограничения, сохраняющиеся при любом положении системы, *неудерживающими* – связи, которые этими свойствами не обладают (от таких связей система может «освобождаться»).

14.2 Возможные перемещения системы. Число степеней свободы

Определение возможных перемещений

Возможными (или *виртуальными*) *перемещениями* механической системы называется любая совокупность элементарных перемещений точек этой системы из занимаемого в данный момент времени положения, которые допускаются всеми наложенными на систему связями.

Возможные перемещения обозначаются символом δ (δs, δx, $\delta\vec{r}$ и т.д.).

Число степеней свободы механической системы

Число независимых между собой возможных перемещений механической системы называется числом степеней свободы этой системы.

У механической системы с геометрическими связями число независимых координат, определяющих положение системы, совпадает с числом ее степеней свободы.

Возможная работа силы

Возможной работой называется элементарная работа, которую действующая на материальную точку сила могла бы совершить на перемещении, совпадающем с возможным перемещением этой точки.

Возможная работа активной силы - $\delta A^{a} = \vec{F} \cdot \delta\vec{r}$.

Возможная работа реакции связи - $\delta A^{r} = \vec{N} \cdot \delta\vec{r}$.

Идеальные связи

Идеальными называются связи, для которых элементарная работа их реакций на любом возможном перемещении системы равна нулю

$$\sum \delta A_k^r = 0.$$

14.3 Принцип возможных перемещений

Теорема. Для равновесия механической системы с идеальными стационарными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю

$$\sum \delta A_k^e = 0.$$

Или в аналитической форме

$$\sum (\delta F_{kx}^a \cdot \delta x_k + \delta F_{ky}^a \cdot \delta y_k + \delta F_{kz}^a \cdot \delta z_k) = 0.$$

14.4 Общее уравнение динамики (принцип Даламбера – Лагранжа)

Теорема. При движении механической системы с идеальными стационарными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы равна нулю.

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0.$$

Тема 15. Уравнения движения системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа II рода)

15.1 Обобщенные координаты

Понятие обобщенных координат

Независимые между собой параметры любой размерности, число которых равно числу степеней свободы и которые однозначно определяют ее положение, называются *обобщенными координатами*.

Обобщенные координаты обозначают буквой q. Положение системы, имеющей s степеней свободы, определяется s обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_S$.

Возможные перемещения системы в обобщенных координатах

Элементарные приращения обобщенных координат $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_S$ называются возможными перемещениями системы.

Вывод. Так как обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_S$ независимы между собой, то каждая из величин $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_S$ определяет соответствующее, независимое от других возможное перемещение системы.

Например, независимое возможное перемещение системы будет в случае, когда $\delta q_1 = 0$, $\delta q_2 = 0$, …, $\delta q_k \neq 0$, …, $\delta q_S = 0$.

15.2 Обобщенные скорости

Производные от обобщенных координат по времени называются обобщенными скоростями. Обозначаются обобщенные скорости символами $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$.

15.3 Кинематические уравнения движения системы в обобщенных координатах

Уравнения $q_1 = f_1(t)$, $q_2 = f_2(t)$, …, $q_s = f_s(t)$ называются кинематическими уравнениями движения системы в обобщенных координатах.

15.4 Обобщенные силы

Обобщенные силы - это величины, равные коэффициентам при приращениях обобщенных координат в *выражении полной элементарной работы всех действующих на систему сил в обобщенных координатах.*

$$Q_j = \sum \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}, \quad или \quad Q_j = \frac{\delta A_j}{\delta q_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, s.$$

Размерность обобщенной силы равна размерности работы, деленной на размерность соответствующей обобщенной координаты.

15.5 Алгоритм вычисления обобщенных сил

При вычислении обобщенных сил целесообразно выполнять следующую последовательность действий.

1. Установить число степеней свободы системы.
2. Выбрать обобщенные координаты.
3. Изобразить на рисунке все приложенные к системе активные силы и

силы трения.

4. Сообщить системе возможное перемещение, при котором изменяется только координата q_k, получая положительное приращение δq_k.

5. Вычислить на полученном перемещении системы сумму элементарных работ всех действующих сил δA_k^a.

6. Вычислить обобщенную силу по формуле $Q_k = \delta A_k^a / \delta q_k$.

15.6 Обобщенные силы при действии на систему потенциальных сил

Вывод. Если все действующие на систему силы потенциальны, то обобщенные силы равны частным производным от силовой функции (или взятым со знаком минус частным производным от потенциальной энергии) по соответствующим обобщенным координатам.

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}, Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}, \ldots, \ Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_s}.$$

15.7. Условия равновесия системы в обобщенных координатах

Вывод. Для равновесия механической системы необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы, соответствующие выбранным для системы обобщенным координатам, были равны нулю.

Число условий равновесия равно числу степеней свободы системы.

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \ldots, \quad Q_S = 0.$$

Условия равновесия системы в обобщенных координатах (случай потенциальных сил)

Вывод. Для равновесия системы с действующими на нее потенциальными силами необходимо и достаточно, чтобы частные производные от потенциальной энергии по всем обобщенным координатам были равны 0.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \ \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0.$$

15.8 Уравнения Лагранжа 2-го рода

Уравнения Лагранжа 2-го рода имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, s$$

Это дифференциальные уравнения движения механической системы с s степенями свободы.

15.9 Уравнения Лагранжа 2-го рода (случай потенциальных сил)

При действии на систему консервативных сил вводят функцию $L = T - \Pi$, зависящую от обобщенных координат и обобщенных скоростей

$$L = L\,(q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s, t).$$

Функция L называется *функцией Лагранжа* или *кинетическим потенциалом*.

Тогда уравнения Лагранжа будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0, \qquad j=1,2,...,s.$$

Тема 16. Элементарная теория удара

16.1 Основные определения и основное уравнение теории удара

Основные определения теории удара

Явление, при котором скорости точек тела за очень малый (близкий к нулю) промежуток времени τ изменяются на конечную величину, называется *ударом.*

Силы, при действии которых происходит удар, называются ударными силами $\vec{F}_{уд}$.

Промежуток времени τ, в течение которого происходит удар, называется *временем удара*.

Ударным импульсом называется величина, определяемая выражением

$$\vec{S}_{уд} = \int_0^{\tau} \vec{F}_{уд} dt = \vec{F}^{\,ср}_{уд}\tau,$$

где $\vec{F}^{\,ср}_{уд}$ − средняя ударная сила.

Основное уравнение теории удара

Теорема. Изменение количества движения материальной точки за время удара равно сумме действующих на точку ударных импульсов

$$m(\vec{u}-\vec{V})=\sum \vec{S}_k,$$

где $\vec{V}$ − скорость точки до удара, $\vec{u}$ − скорость точки после удара.

Данное уравнение является *основным уравнением теории удара* и играет в теории удара такую же роль, как основной закон динамики при изучении движения под действием неударных сил.

Основные выводы в теории удара

1) действием неударных сил за время удара можно пренебречь;
2) перемещениями точек тела за время удара можно пренебречь и считать тело за время удара неподвижным;
3) изменения скоростей точек тела за время удара определяются основным уравнением теории удара.

16.2 Общие теоремы теории удара

Теорема об изменении количества движения системы при ударе

Теорема. Изменение количества движения системы за время удара равно сумме всех внешних ударных импульсов, действующих на систему

$$\vec{Q}_1-\vec{Q}_0=\sum \vec{S}^{\,e}_k.$$

Теорема в проекции на ось

$$Q_{1X} - Q_{0X} = \sum S^e_{kX}.$$

Теорема об изменении главного момента количества движения системы (теорема моментов) при ударе

Теорема. Изменение за время удара главного момента количеств движения системы относительно какого-нибудь центра равна сумме моментов относительно того же центра всех действующих на систему внешних ударных импульсов

$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \sum \vec{m}_0(\vec{S}^e_k).$$

Теорема в проекции на ось

$$K_{1X} - K_{0X} = \sum m_X(\vec{S}^e_k).$$

Следствие из теоремы. Если сумма моментов внешних ударных импульсов относительно какого-нибудь центра (или оси) равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно этого центра (или оси) за время удара не изменится, то есть внутренние ударные импульсы не могут изменить главного момента количеств движения системы.

16.3 Коэффициент восстановления при ударе

Определение коэффициента восстановления при ударе

Величина k, равная при прямом ударе тела о неподвижную преграду отношению модуля скорости тела в конце удара к модулю скорости в начале удара, называется коэффициентом восстановления при ударе

$$k = u\,/\,V.$$

Физический смысл. Коэффициент восстановления при ударе - это величина, характеризующая свойства соударяющихся тел.

Экспериментальное определение коэффициента восстановления при ударе

Экспериментально k можно найти, если рассмотреть шар, свободно падающий на плиту с предварительно измерянной высоты H (рисунок 20), и определить с помощью стоящей рядом вертикальной линейки высоту его подъема h после удара.

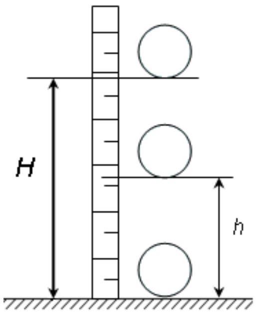


Рисунок 20 – Экспериментальное определение коэффициента k

Тогда по формуле Галилея

$$V = \sqrt{2gH},\ \ u = \sqrt{2gh}$$

и $k = u/V = \sqrt{h/H}.$

Предельные случаи. Абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары

Абсолютно упругим ударом ($k = 1$) называется удар, при котором кинетическая энергия тела после удара полностью восстанавливается.

Абсолютно неупругим ударом ($k = 0$) называется удар, при котором кинетическая энергия тела после удара полностью теряется.

16.4 Прямой центральный удар двух тел (удар шаров)

При соударении двух тел удар называется прямым и центральным, когда общая нормаль к поверхностям тел в точке касания проходит через их центры масс и когда скорости центров масс в начале удара направлены по этой общей нормали (рисунок 21).

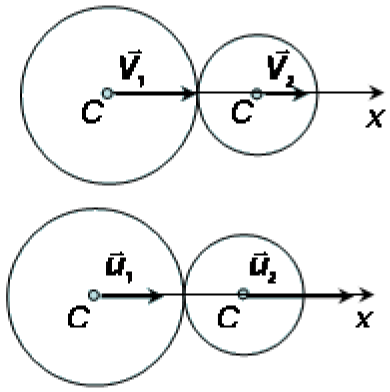


Рисунок 21– Прямой центральный удар

При массе соударяющихся тел M_1 и M_2, скорости их центров масс в начале удара $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$, а в конце удара $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$.

Тогда, чтобы произошел удар, должно быть $V_{1X} > V_{2X}$, и, $u_{1X} < u_{2X}$, так как ударившее тело не может опередить ударяемое.

При соударении двух тел ударный импульс зависит не от абсолютного значения скорости каждого из тел, а от того, насколько скорость ударяющего тела превышает скорость ударяемого, т.е. от разности $V_{1X} - V_{2X}$.

Поэтому при ударе двух тел, учитывая, что всегда $V_{1X} > V_{2X}$ и $u_{1X} < u_{2X}$, получим

$$k = \left|\frac{u_{1X} - u_{2X}}{V_{1X} - V_{2X}}\right| = -\frac{u_{1X} - u_{2X}}{V_{1X} - V_{2X}}$$

Ударный импульс, действующий на соударяющиеся тела, будет

$$S_{1X} = M_1 (u_{1X} - V_{1X}), \quad S_{2X} = - S_{1X}.$$

16.5 Потеря кинетической энергии при неупругом ударе. Теорема Карно

Теорема. Кинетическая энергия, потерянная системой тел при абсолютно неупругом ударе, равна той кинетической энергии, которую бы имела система, если бы ее тела двигались с потерянными скоростями

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2}M_1(V_{1X} - u_X)^2 + \frac{1}{2}M_2(V_{2X} - u_X)^2,$$

где V_{1X}, V_{2X} проекции скоростей соударяющихся тел на ось Ox до удара, u_X - скорость тел на ось Ox после удара.

<u>*При неупругом ударе*</u> двух тел ($k \neq 0$) потерянная кинетическая энергия определяется выражением

$$T_0 - T_1 = \frac{1-k}{1+k}\left[\frac{1}{2}M_1(V_{1X} - u_X)^2 + \frac{1}{2}M_2(V_{2X} - u_X)^2\right].$$

III. Задачи к заданиям

Задача Д1

Применение общих теорем динамики к исследованию движения материальной точки

Автомобиль M массой m (данные к задачам Д1 находятся в таблице 1), имея в точке A начальную скорость V_0, движется по трассе ABC (состоит из двух участков AB и BC) и по мосту $СД$. Участки трассы AB и BC или оба наклонные (углы наклона к горизонту α и β, значения синусов и косинусов углов в таблице 2), или один горизонтальный, а другой наклонный (рисунки в таблице 9).

На участке трассы AB (или BC) на автомобиль действует постоянная сила трения $\vec{F}_{тр}$, а также постоянная сила $\vec{F}$ (значение коэффициента трения скольжения f, модуль силы F заданы в таблице 9). В точках B и C автомобиль не изменяет величину своей скорости. Мост образует дугу окружности радиуса R (значение R дано в таблице 9). Максимальный прогиб (выпуклость) моста h. В таблице 1 заданы: длина участка $AB = l_1$ (или время движения $t = t_1$ по участку AB), время движения $t = t_2$ по участку BC (или длина участка $BC = l_2$), углы наклона α и β участков AB и BC соответственно, максимальный прогиб (выпуклость) моста h и угол γ (или φ), определяющий положение точки K.

Считая автомобиль материальной точкой, определить:

1. скорости автомобиля в точках B, C трассы и в точке K моста,
2. силу давления автомобиля на мост, когда он находится в точке K,
3. установить, находится или нет автомобиль в точке K в отрыве от моста.

Таблица 1 – Данные к задачам Д1.

Номер условия	m, т	V_0, м/с	Участок AB: α^0, варианты №№ 1–16, 25–30	α^0, варианты №№ 17–24	l_1, м	t_1, с	Участок BC: β^0, варианты №№ 1–16, 25–30	β^0, варианты №№ 25–30	l_2, м	t_2, с	Мост: h, м	Нечетный вариант γ^0	Четный вариант φ^0	Трение на участке
0	1,5	Данные выдаются преподавателем	5	0	30	–	6	0	–	5	1,5	10	8	AB
1	1,4		7	0	–	4	8	0	20	–	3	12	10	BC
2	0,9		6	0	–	5	5	0	30	–	2	15	12	BC
3	1		8	0	20	–	7	0	–	4	2,5	18	14	AB
4	1,1		4	0	30	–	9	0	–	3	3	19	15	AB
5	1,2		7	0	35	–	9	0	–	3	2	15	12	BC
6	1,3		3	0	–	5	9	0	20	–	2	14	11	BC
7	1,6		4	0	–	5	8	0	10	–	2,5	11	9	BC
8	1,2		5	0	–	4	7	0	10	–	3	15	12	AB
9	1,3		6	0	30	–	5	0	–	4	1,5	13	10	AB

Таблица 2 – Значения синусов и косинусов некоторых углов α (β,γ,φ)

$\alpha(\beta,\gamma,\varphi)^0$	sin α	cos α	$\alpha(\beta,\gamma,\varphi)^0$	sin α	cos α	$\alpha(\beta,\gamma,\varphi)^0$	sin α	cos α
3	0,0523	0,9986	**8**	0,1392	0,9903	**13**	0,2250	0,9744
4	0,0698	0,9976	**9**	0,1564	0,9877	**14**	0,2419	0,9703
5	0,0872	0,9962	**10**	0,1736	0,9848	**15**	0,2588	0,9659
6	0,1045	0,9945	**11**	0,1908	0,9816	**18**	0,3090	0,9511
7	0,1219	0,9925	**12**	0,2079	0,9781	**19**	0,3256	0,9455

Задача Д2

Применение теоремы об изменении кинетического момента к определению угловой скорости тела

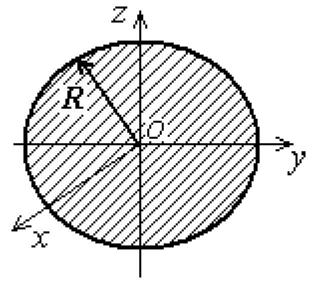
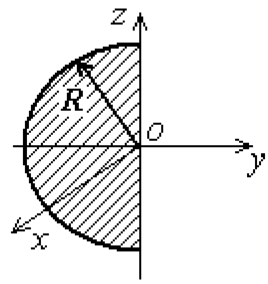
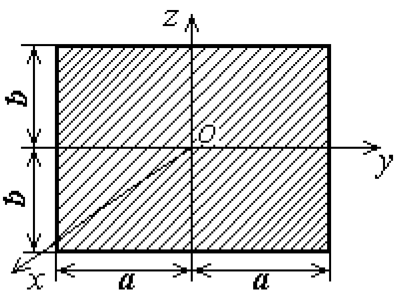
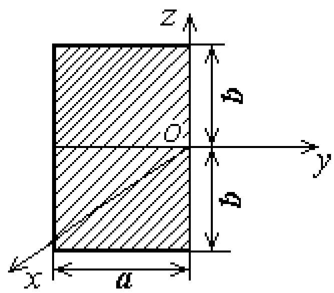
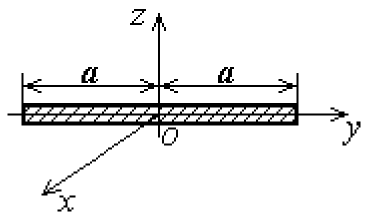
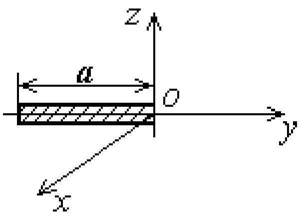
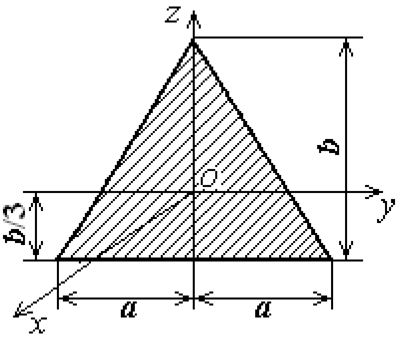
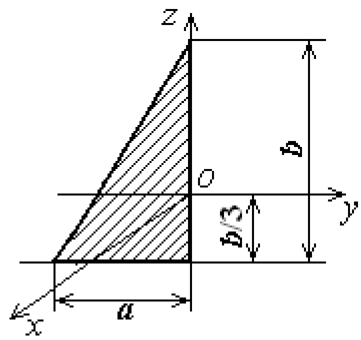
Тело (однородная (круглая, прямоугольная или треугольная) пластинка или однородный стержень) массой m_1 вращается вокруг вала (оси Oz), имея в начальный момент времени (при t_0 = 0) угловую скорость ω_0. С телом жестко связана материальная точка А массой m_2.В момент времени t_0 = 0 на тело начинает действовать пара сил с постоянным моментом M. Рисунки к задачам приведены в таблице 9, а в некоторых вариантах дополнительно дан рисунок а) – вид сверху. Числовые данные к задачам указаны в таблице 3, осевые моменты инерции некоторых однородных тел – в таблице 4.

Определить, пренебрегая массой вала, угловую скорость тела ω_1 в момент времени t_1 .

Таблица 3 – Данные к задачам Д2.

Номер условия	ω_0, с $^{-1}$	m_1, кг	m_2, кг	M, Нм	t_1, сек	a, м
0	2	20	4	Данные выдаются преподавателем		2
1	4	30	3			1,5
2	8	25	5			1,2
3	5	16	2			2,5
4	3	18	3			2
5	6	24	5			3
6	9	28	6			1,8
7	7	22	4			1,5
8	4	26	3			2,5
9	5	27	2			2,2

Таблица 4 – Осевые моменты инерции некоторых однородных тел.

Вид тела	J_x	J_y	J_z	Вид тела
	$\frac{mR^2}{2}$	$\frac{mR^2}{4}$	$\frac{mR^2}{4}$	
	$\frac{m(a^2+b^2)}{3}$	$\frac{mb^2}{3}$	$\frac{ma^2}{3}$	
	$\frac{ma^2}{3}$	0	$\frac{ma^2}{3}$	
	$\frac{m(3a^2+b^2}{18}$	$\frac{mb^2}{18}$	$\frac{ma^2}{6}$	

Задача Д3

Применение теоремы об изменении кинетической энергии системы к исследованию движения механической системы

Механическая система состоит из груза 1, ступенчатого шкива 3, ступенчатого катка (блока) 2 с радиусами ступеней соответственно $R_3 = 3r_3$, $R_2 = 2r_2$ и блока 4 радиуса R_4 (данные к задачам даны в таблице 5; рисунки и распределение масс тел - в таблице 9). Коэффициент трения груза 1 о плоскость f = 0,1. Тела системы соединены друг с другом нитями, параллельными соответствующим плоскостям. Под действием постоянной силы $\vec{F}$ система приходит в движение из состояния покоя, при этом каток 2 катится без скольжения, и тросы не проскальзывают по ободам блоков. В процессе движения на одно из тел 2 – 4 действует постоянный момент сопротивления M.

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение s станет равным s_1 = 0,2 м. Искомая величина указана в столбце «Найти» таблицы 5, где обозначено: V_1, – скорость груза 1 и V_{C2} – скорость центра масс тела 2, ω_2, ω_3 и ω_4 – угловые скорости тел 2, 3 и 4.

Все катки (шкивы), катятся по плоскостям без скольжения.

Таблица 5 – Данные к задачам Д3.

Номер условия	Масса тела (кг) и радиус (м)							F, Н	M, Н·м		Найти
	m_1	m_2	R_2	m_3	R_3	m_4	R_4		M	Приложен к телу №	
0	10	4	0,4	5	0,9	4	0,8	40	Данные выдаются преподавателем		ω_3
1	12	5	0,6	3	0,3	5	0,6	30			V_1
2	14	2	0,8	8	1,2	3	0,4	60			ω_2
3	13	3	1	4	0,6	2	0,2	30			ω_4
4	18	8	0,4	6	0,9	6	0,5	50			V_1
5	16	2	1,2	3	1,2	2	0,3	20			V_{C2}
6	14	6	0,6	7	1,5	3	0,2	40			ω_3
7	15	4	0,8	5	0,3	5	0,6	30			ω_2
8	16	6	1,2	4	0,6	4	0,8	50			ω_4
9	17	5	1	6	1,2	6	0,3	30			V_{C2}

Задача Д4

Применение принципа Даламбера к изучению движения системы

Вертикальный вал AK (рисунки к задачам – в таблице 9), вращающийся с постоянной угловой скоростью ω = 10 с$^{-1}$, закреплен подпятником в точке A и цилиндрическим подшипником в точке, указанной на рисунке ($AB = BД = ДE = EK = b$). К валу жестко прикреплен невесомый стержень *1* длиной l_1 с точечной массой m_1 на конце и однородный стержень *2*, массой m_2 и длиной l_2; оба стержня лежат в одной плоскости. Данные к задачам указаны в таблице 6.

Пренебрегая весом вала, определить реакции подпятника и подшипника. При окончательных расчетах принять b = 0,4 м.

Таблица 6 – Данные к задачам Д4

Номер условия	α, град	β, град	l_1, м	l_2, м	m_1, м	m_2, м	Номер условия	α, град	β, град	l_1, м	l_2, м	m_1, м	m_2, м
1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
0	Данные выдаются преподавателем		0,4	0,4	2	6	**5**	Данные выдаются преподавателем		0,2	0,6	3	8
1			0,5	0,8	3	7	**6**			0,4	0,4	2	7
2			0,3	0,7	1	8	**7**			0,3	0,5	4	5
3			0,6	0,5	4	9	**8**			0,6	0,7	1	4
4			0,8	0,6	5	10	**9**			0,5	0,8	5	6

Задача Д5а
Определение условий равновесия механической системы с помощью принципа возможных перемещений

Механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, находится под действием приложенных сил в равновесии. Положение механизма определяется углами, указанными на рисунках (таблица 9) и углом α, заданным в графе 5 таблицы 7. Длины стержней механизма (кривошипов) *1* и *2* – в таблице 9, размер l_3 произвольный. На шарнир A (или B) механизма действует сила $\vec{Q}$, на кривошип O_1A – пара сил с моментом M_1, а на кривошип O_2B – пара сил с моментом M_2.

Определить с помощью принципа возможных перемещений, чему равна величина, указанная в графе 6 таблицы 7, где Q выражено в Н, а M_1 и M_2 – в Нм.

Таблица 7 – Данные к задачам Д5а

Номер условия	Дано				Найти
	M_1, Нм	M_2, Нм	Q, Н	α^0	
1	2	3	4	5	6
0	100	–	60	Данные выдаются преподавателем	M_2
1	120	–	30		M_2
2	–	60	40		M_1
3	–	80	30		M_2
4	70	50	–		Q
5	90	70	–		Q
6	60	–	90		M_2
7	50	100	–		Q
8	–	90	50		M_1
9	80	70	–		Q

Задача Д5б

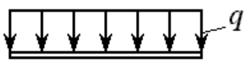
Применение принципа возможных перемещений к определению реакций опор составной конструкции

Составная балка *AB* находится под действием приложенных сил и связей в равновесии. Балка состоит из двух частей *AC* и *CB*, соединенных между собой в точке *C* цилиндрическим шарниром (таблица 9). Размеры указаны на рисунках, где $a = 2$ м.

На балку действуют: равномерно распределенная нагрузка интенсивности q = 2 кН/м (участок распределения нагрузки указан в столбце 2 таблицы 8); сосредоточенная наклонная сила F = 6 кН (угол наклона силы - в столбце 3 таблицы 8); пара сил с моментом M = 8 кНм (участок приложения и знак момента – в столбцах 4,5 таблицы 8).

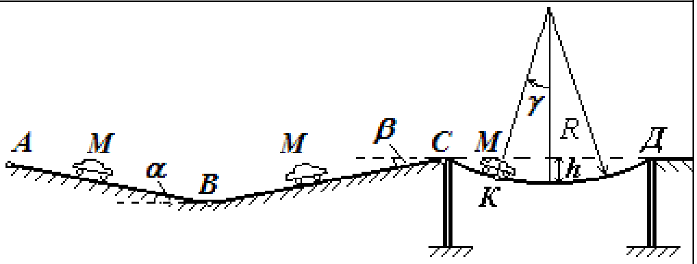
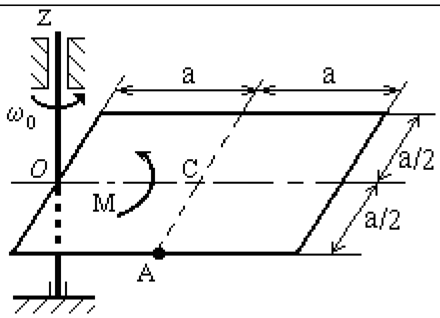
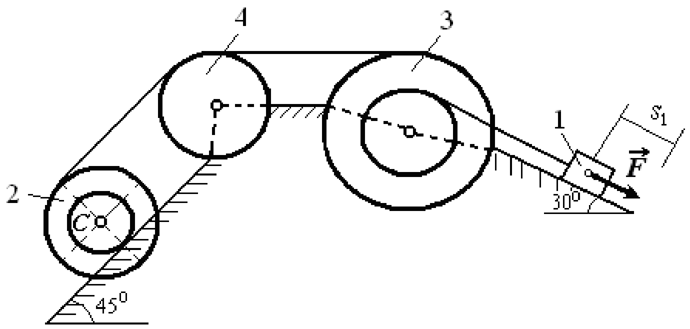
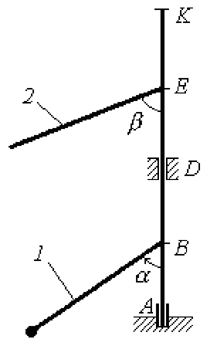
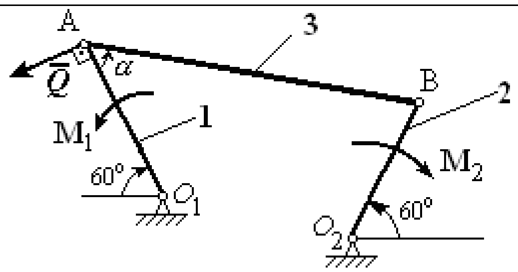
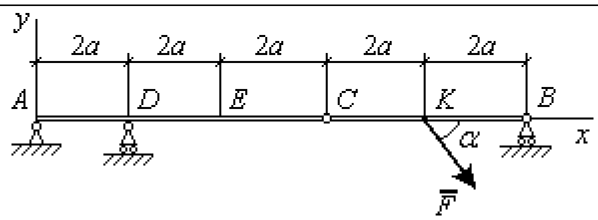
Определить реакции внешних связей, наложенных на составную балку *AB*, которые указаны в таблице 9, и убедиться в верности их нахождения (сделать проверку).

Таблица 8 – Данные к задачам Д5б

Номер условия	Равномерно распределенная нагрузка  на участке	Угол наклона сосредоточенной силы α, град 	Момент M	
			Участок приложения	Знак
1	2	3	4	5
0	*DE*	Данные выдаются преподавателем	*CB*	+
1	*EC*		*CB*	–
2	*CK*		*CB*	+
3	*KB*		*AC*	+
4	*KB*		*AC*	–
5	*AD*		*AC*	–
6	*EC*		*CB*	+
7	*CK*		*AC*	+
8	*AD*		*CB*	–
9	*DE*		*AC*	–

IV. Рисунки к задачам Д1 – Д5б

Таблица 9 – Рисунки к задачам Д1 – Д5б

Вариант 01	
Задача Д1 R = 50 м. f = 0,1 F = 0	
Задача Д2 Ось Oz перпендикулярна к пластинке. Точка C – центр масс пластины. Осевой момент инерции пластины определяется на основе данных таблицы 4 и теоремы Гюйгенса - Штейнера	
Задача Д3 2 – ступенчатый каток с радиусом инерции ρ_2 = 0,75 R_2 3 – масса шкива распределена по ободу радиуса R_3 4 - сплошной однородный диск	
Задача Д4 *1* - невесомый стержень с точечной массой m_1 на конце; *2* - однородный стержень массой m_2	
Задача Д5а Длины стержней 1 и 2 соответственно l_1 = 0,4 м, l_2 = 0,6 м. Длина стержня 3 произвольная.	
Задача Д5б Определить Y_D и Y_B	

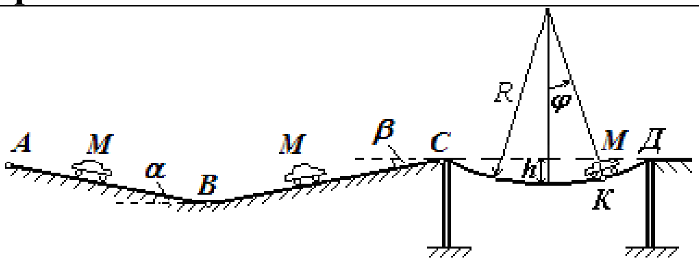
Продолжение таблицы 9

<table>
<tr><th colspan="2">Вариант 02</th></tr>
<tr><td>

Задача Д1

R = 50 м.
f = 0,1
F = 0

</td><td>

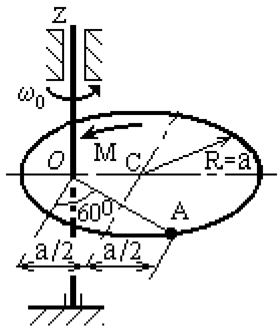


</td></tr>
<tr><td>

Задача Д2

Ось Oz перпендикулярна к пластинке.
Точка С – центр масс пластины.
Осевой момент инерции пластины определяется на основе данных таблицы 4 и теоремы Гюйгенса - Штейнера

</td><td>

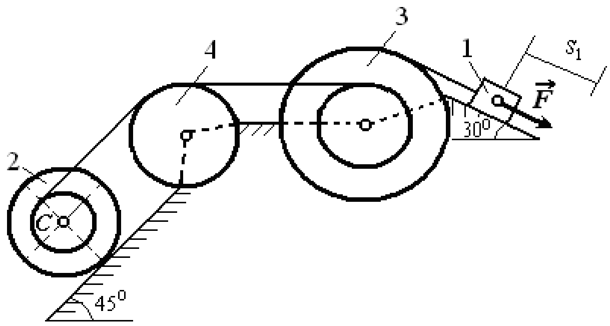


</td></tr>
<tr><td>

Задача Д3

2 – ступенчатый каток с радиусом инерции ρ_2 = 0,6 R_2,
3 – масса шкива распределена по ободу радиуса r_3
4 - сплошной однородный диск

</td><td>

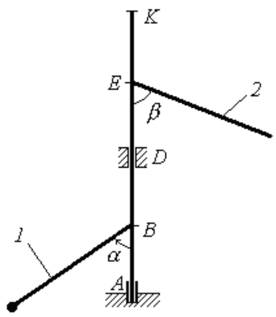


</td></tr>
<tr><td>

Задача Д4

1 - невесомый стержень с точечной массой m_1 на конце;
2 - однородный стержень массой m_2

</td><td>

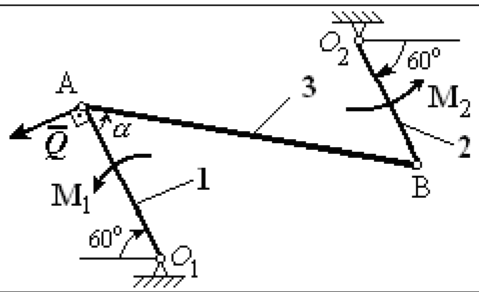


</td></tr>
<tr><td>

Задача Д5а

Длины стержней 1 и 2 соответственно
l_1 = 0,9 м, l_2 = 0,5 м.
Длина стержня 3 произвольная.

</td><td>

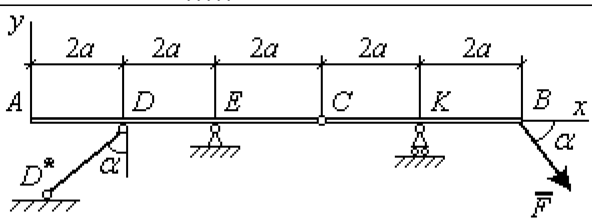


</td></tr>
<tr><td>

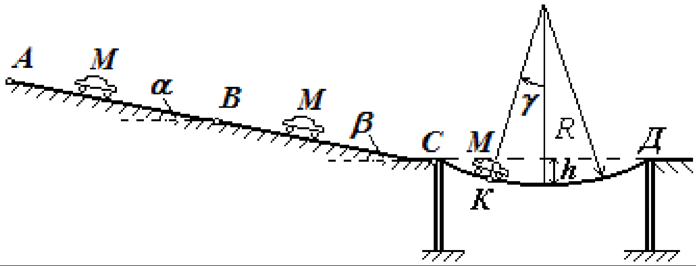
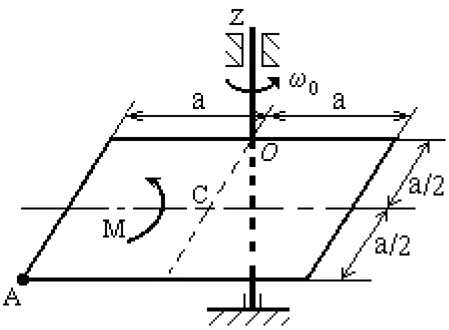
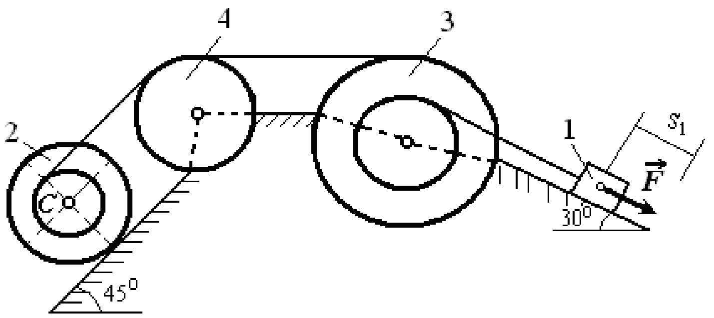
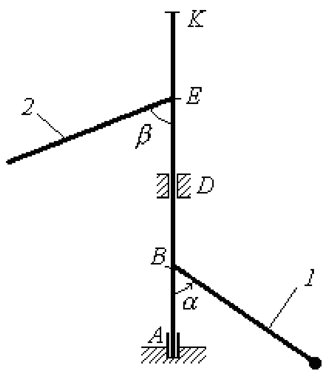
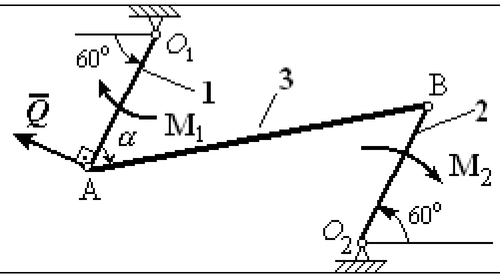
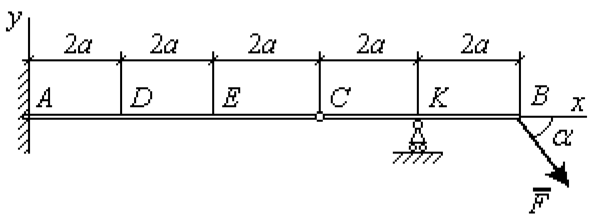
Задача Д5б

Определить Y_K и реакцию невесомого стержня DD^*

</td><td>



</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Вариант 03</th></tr>
<tr><td>Задача Д1
R = 50 м.
f = 0,1
F = 0</td><td></td></tr>
<tr><td>Задача Д2
Ось Oz перпендикулярна к пластинке.
Точка С – центр масс пластины.
Осевой момент инерции пластины определяется на основе данных таблицы 4 и теоремы Гюйгенса - Штейнера</td><td></td></tr>
<tr><td>Задача Д3
2 – ступенчатый каток с радиусом инерции ρ_2 = 0,2м
3 – масса шкива распределена по ободу радиуса R_3
4 - сплошной однородный диск</td><td></td></tr>
<tr><td>Задача Д4
1 - невесомый стержень с точечной массой m_1 на конце;
2 - однородный стержень массой m_2</td><td></td></tr>
<tr><td>Задача Д5а
Длины стержней 1 и 2 соответственно
l_1 = 0,9 м, l_2 = 0,6 м.
Длина стержня 3 произвольная.</td><td></td></tr>
<tr><td>Задача Д5б
Определить $У_К$ и реактивный момент в заделке А</td><td></td></tr>
</table>

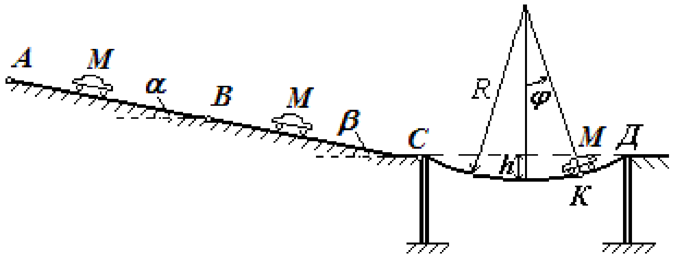
Продолжение таблицы 9

<table>
<tr><th colspan="2">Вариант 04</th></tr>
<tr><td>

Задача Д1

R = 50 м.
f = 0,1
F = 0

</td><td>

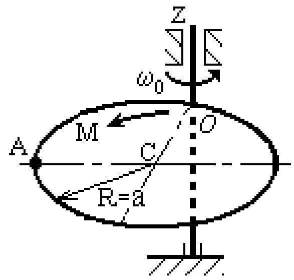


</td></tr>
<tr><td>

Задача Д2

Ось Oz перпендикулярна к пластинке.
Точка С – центр масс пластины.
Осевой момент инерции пластины определяется на основе данных таблицы 4 и теоремы Гюйгенса - Штейнера

</td><td>

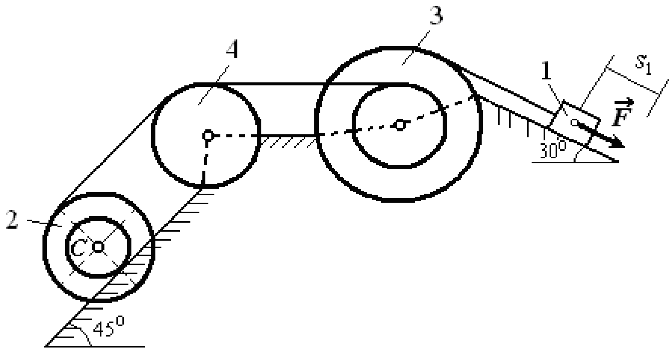


</td></tr>
<tr><td>

Задача Д3

2 – масса катка распределена по ободу радиуса R_2;
3 – ступенчатый шкив с радиусом инерции ρ_3 = 0,8 R_3;
4 - сплошной однородный диск

</td><td>

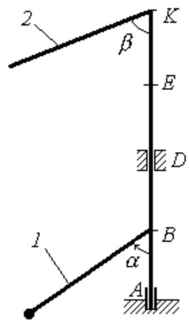


</td></tr>
<tr><td>

Задача Д4

1 - невесомый стержень с точечной массой m_1 на конце;
2 - однородный стержень массой m_2

</td><td>

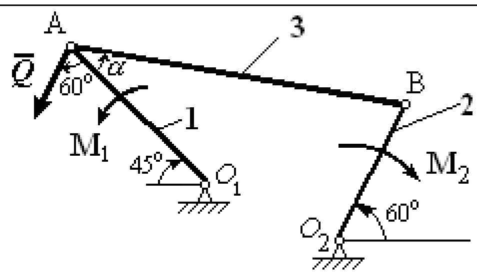


</td></tr>
<tr><td>

Задача Д5а

Длины стержней 1 и 2 соответственно
l_1 = 0,3 м, l_2 = 0,7 м.
Длина стержня 3 произвольная.

</td><td>

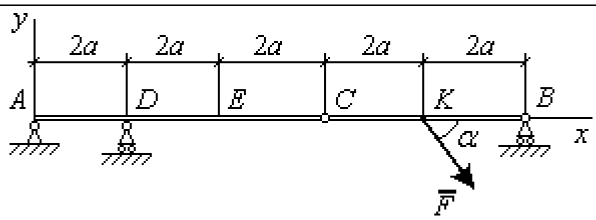


</td></tr>
<tr><td>

Задача Д5б

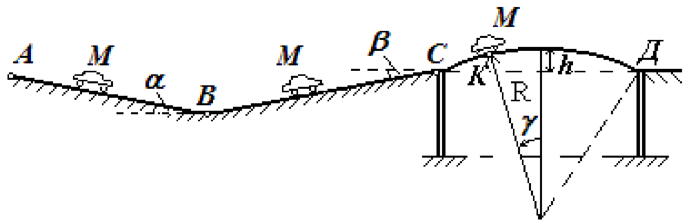
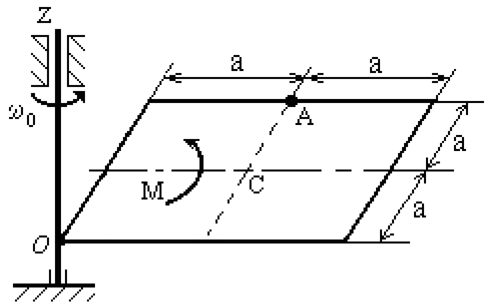
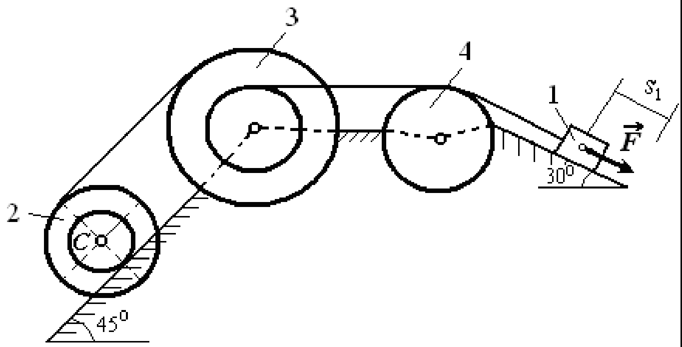
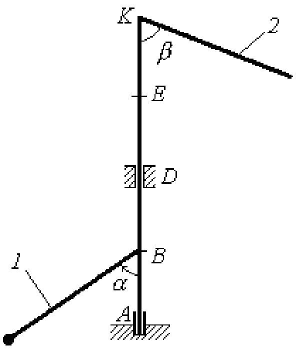
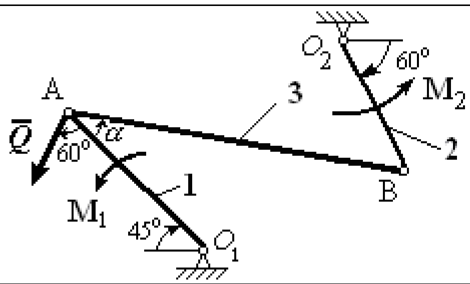
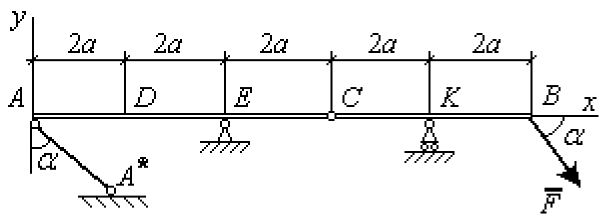
Определить Y_D и Y_B

</td><td>

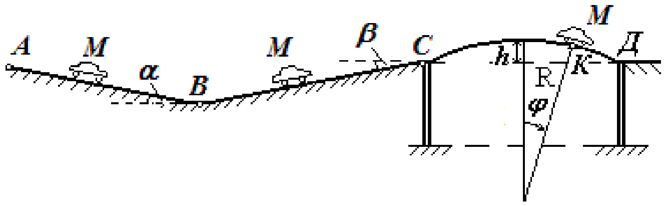
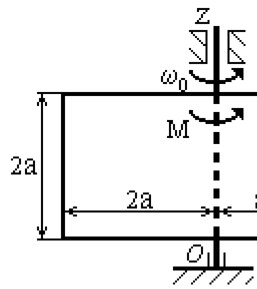
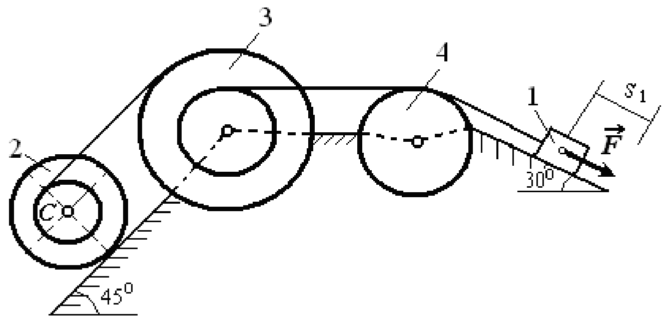
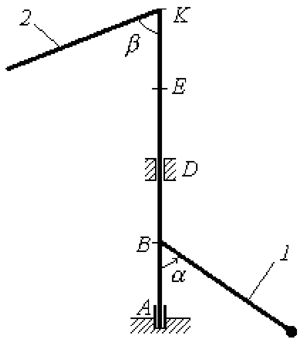
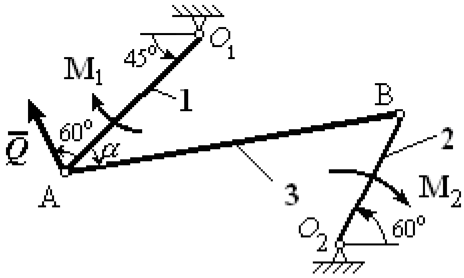
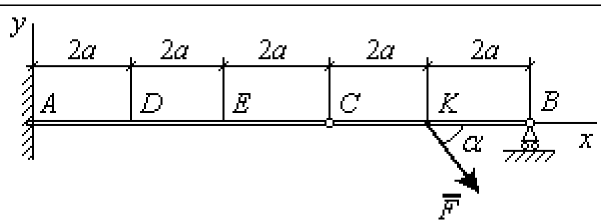


</td></tr>
</table>

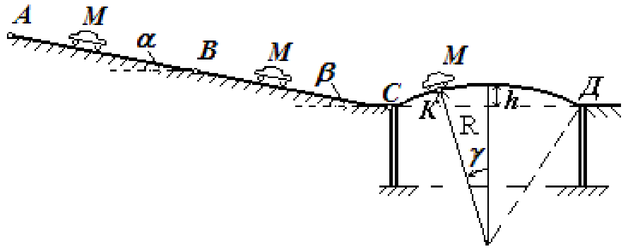
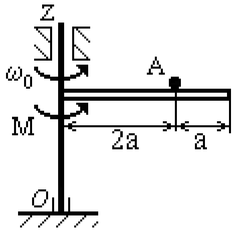
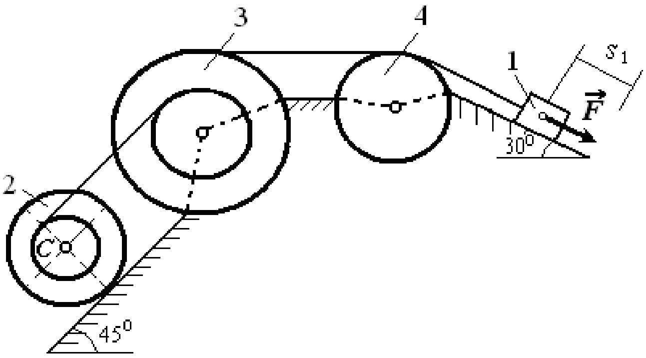
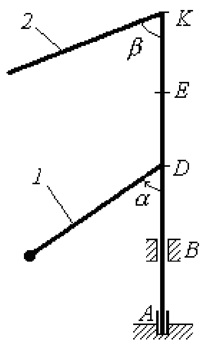
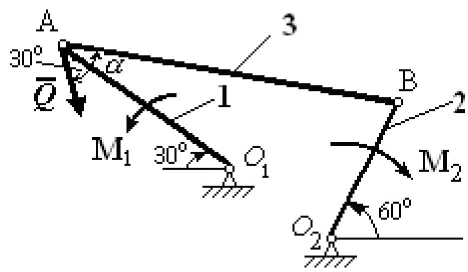
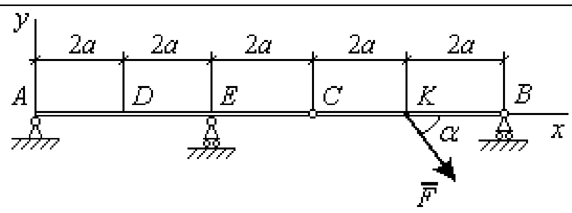
Продолжение таблицы 9

Вариант 05	
Задача Д1 R = 50 м. f = 0,1 F = 0	
Задача Д2 Ось Oz перпендикулярна к пластинке. Точка С – центр масс пластины. Осевой момент инерции пластины определяется на основе данных таблицы 4 и теоремы Гюйгенса - Штейнера	
Задача Д3 2 – масса катка распределена по ободу радиуса r_2 3 – сплошной однородный диск радиуса R_3 4 – шкив с радиусом инерции $\rho_4 = 0{,}6\ R_4$	
Задача Д4 *1* - невесомый стержень с точечной массой m_1 на конце; *2* - однородный стержень массой m_2	
Задача Д5а Длины стержней 1 и 2 соответственно $l_1 = 0{,}8$ м, $l_2 = 0{,}4$ м. Длина стержня 3 произвольная.	
Задача Д5б Определить V_K и реакцию невесомого стержня AA^*	

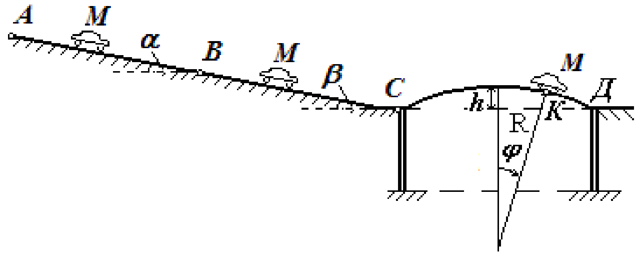
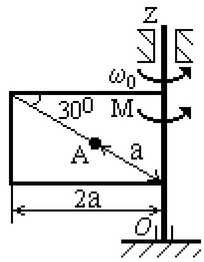
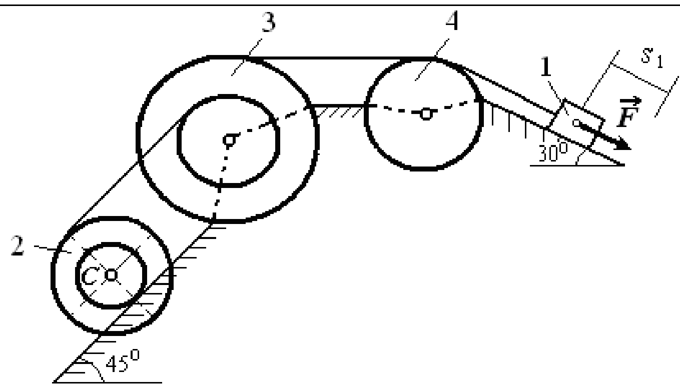
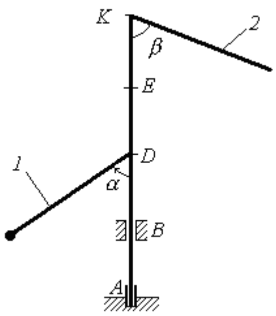
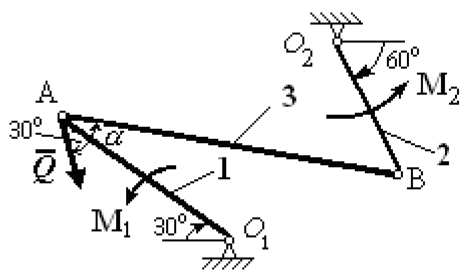
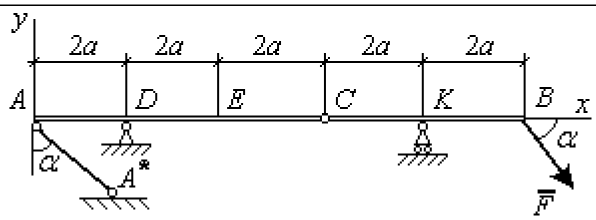
Продолжение таблицы 9

Вариант 06	
Задача Д1 R = 50 м. f = 0,1 F = 0	
Задача Д2 Осевой момент инерции пластины определяется на основе данных таблицы 4.	
Задача Д3 2 – масса катка распределена по ободу радиуса R_2 3 – сплошной однородный диск радиуса R_3 4 –диск с радиусом инерции ρ_4 = 0,71 R_4	
Задача Д4 *1* - невесомый стержень с точечной массой m_1 на конце; *2* - однородный стержень массой m_2	
Задача Д5а Длины стержней 1 и 2 соответственно l_1 = 0,8 м, l_2 = 0,5 м. Длина стержня 3 произвольная.	
Задача Д5б Определить $У_В$ и реактивный момент в заделке А	

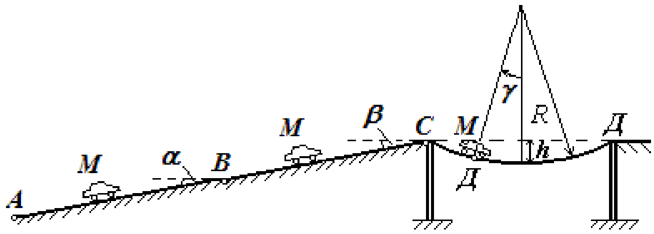
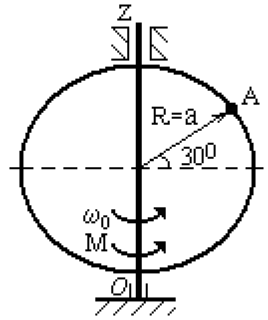
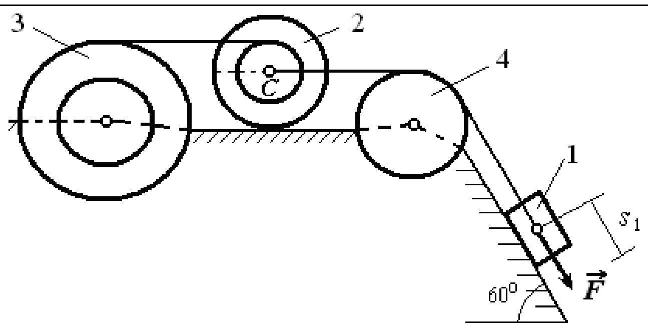
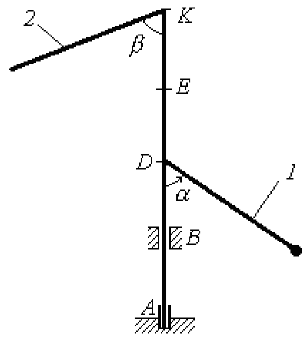
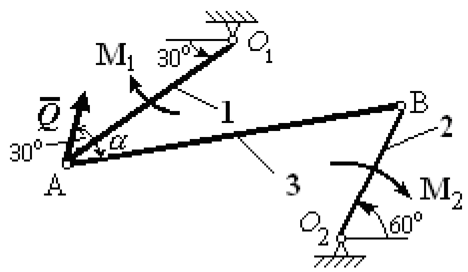
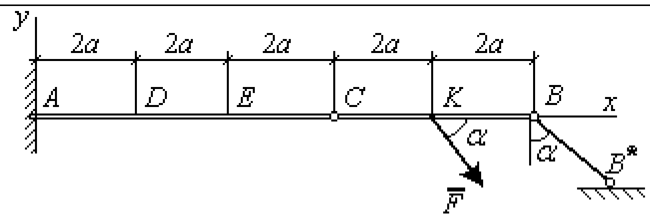
Продолжение таблицы 9

Вариант 07	
Задача Д1 R = 50 м. f = 0,25 F = 0	
Задача Д2 Ось Oz перпендикулярна к стержню. Осевой момент инерции стержня определяется на основе данных таблицы 4.	
Задача Д3 2 – масса катка распределена по ободу радиуса r_2 3 – ступенчатый шкив с радиусом инерции $\rho_3 = 0{,}7\,R_3$ 4 – сплошной однородный диск	
Задача Д4 *1* - невесомый стержень с точечной массой m_1 на конце; *2* - однородный стержень массой m_2	
Задача Д5а Длины стержней 1 и 2 соответственно $l_1 = 0{,}5$ м, $l_2 = 0{,}8$ м. Длина стержня 3 произвольная.	
Задача Д5б Определить $У_E$ и $У_B$	

Продолжение таблицы 9

Вариант 08	
Задача Д1 R = 50 м. f = 0,25 F = 0	
Задача Д2 Осевой момент инерции пластины определяется на основе данных таблицы 4.	
Задача Д3 2 – масса катка распределена по ободу радиуса R_2 3 – ступенчатый шкив с радиусом инерции $\rho_3 = 0{,}7\ R_3$ 4 – сплошной однородный диск	
Задача Д4 *1* - невесомый стержень с точечной массой m_1 на конце; *2* - однородный стержень массой m_2	
Задача Д5а Длины стержней 1 и 2 соответственно $l_1 = 0{,}8$ м, $l_2 = 0{,}3$ м. Длина стержня 3 произвольная.	
Задача Д5б Определить Y_K и реакцию невесомого стержня AA^*	

Продолжение таблицы 9

Вариант 09	
Задача Д1 R = 50 м. f = 0,05 F = 0	
Задача Д2 Осевой момент инерции пластины определяется на основе данных таблицы 4.	
Задача Д3 тело 2 – сплошной однородный диск с радиусом R_2 тело 3 – масса шкива распределена по ободу радиуса r_3 тело 4 –диск с радиусом инерции $\rho_4 = 0{,}71R_4$	
Задача Д4 *1* - невесомый стержень с точечной массой m_1 на конце; *2* - однородный стержень массой m_2	
Задача Д5а Длины стержней 1 и 2 соответственно $l_1 = 0{,}6$ м, $l_2 = 0{,}5$ м. Длина стержня 3 произвольная.	
Задача Д5б Определить реакцию невесомого стержня BB^* и реактивный момент в заделке А	

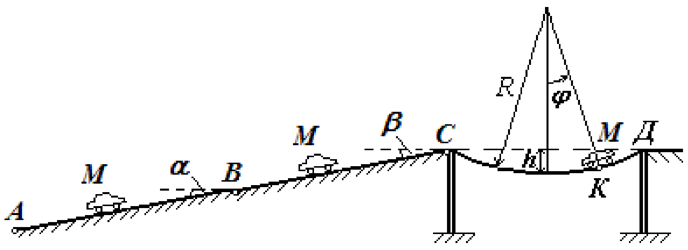
Продолжение таблицы 9

<table>
<tr><th colspan="2">Вариант 10</th></tr>
<tr><td>

Задача Д1

R = 50 м.
f = 0,05
F = 0

</td><td>

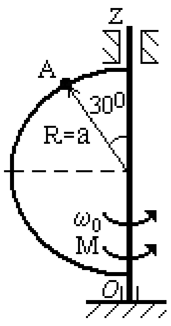


</td></tr>
<tr><td>

Задача Д2

Осевой момент инерции пластины определяется на основе данных таблицы 4.

</td><td>

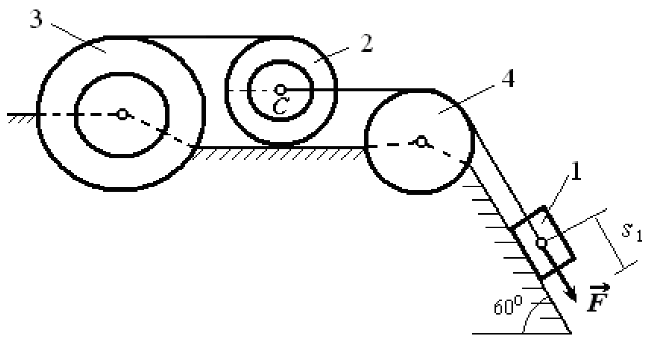


</td></tr>
<tr><td>

Задача Д3

тело 2 – ступенчатый каток с радиусом инерции $\rho_2 = 0{,}75\ R_2$
тело 3 – масса шкива распределена по ободу радиуса R_3
тело 4 – сплошной однородный диск радиуса R_4

</td><td>

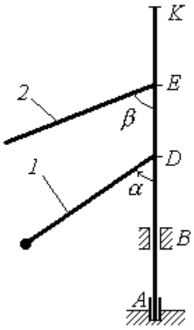


</td></tr>
<tr><td>

Задача Д4

1 - невесомый стержень с точечной массой m_1 на конце;
2 - однородный стержень массой m_2

</td><td>

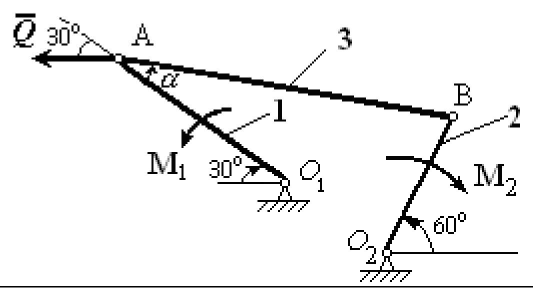


</td></tr>
<tr><td>

Задача Д5а

Длины стержней 1 и 2 соответственно
$l_1 = 0{,}6$ м, $l_2 = 0{,}4$ м.
Длина стержня 3 произвольная.

</td><td>

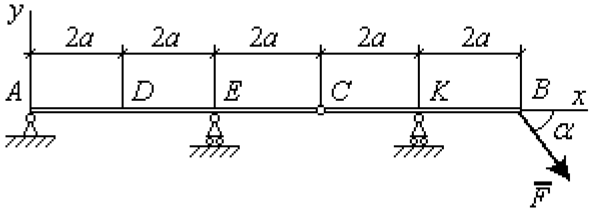


</td></tr>
<tr><td>

Задача Д5б

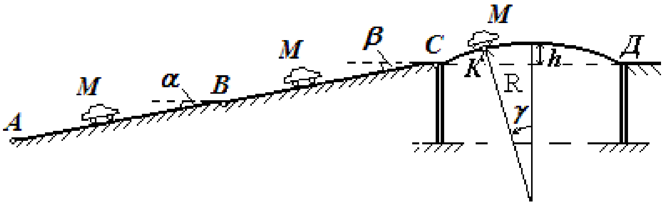
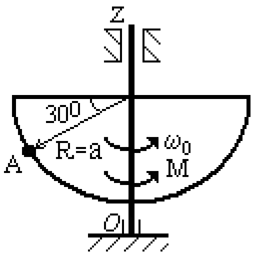
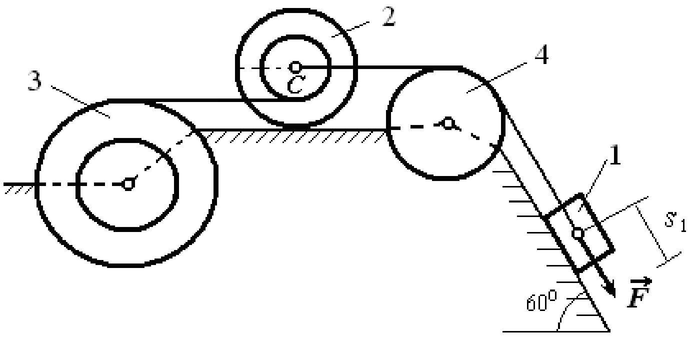
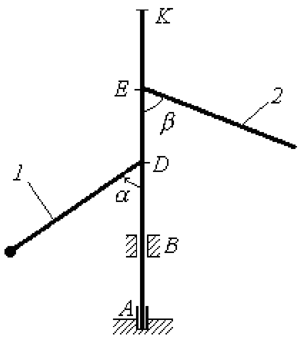
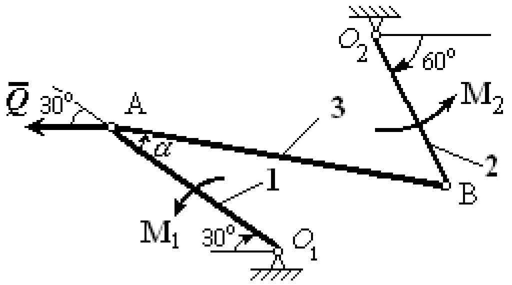
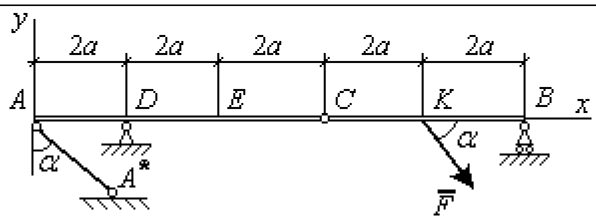
Определить $У_E$ и $У_K$

</td><td>

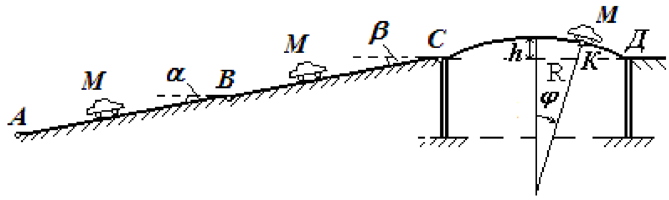
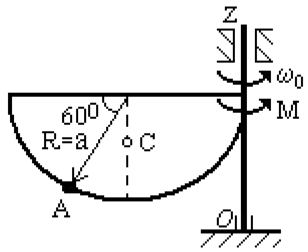
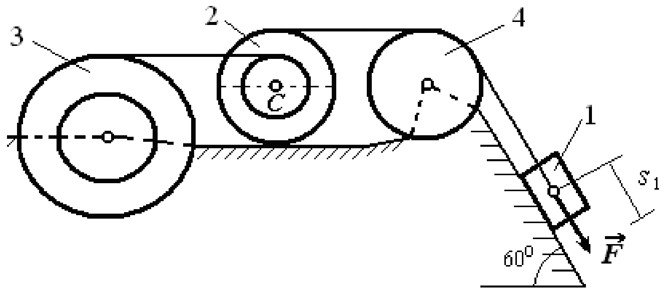
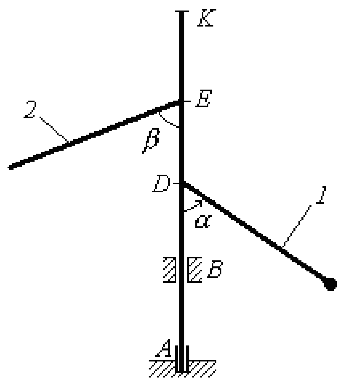
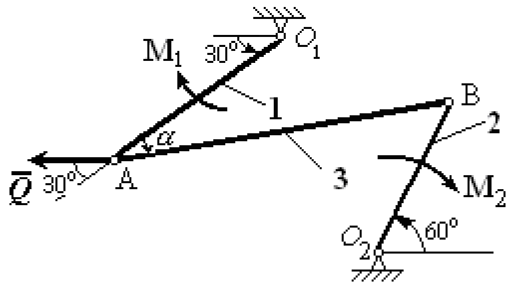
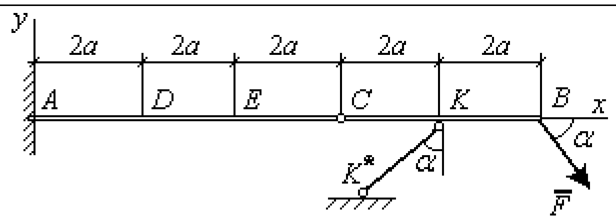


</td></tr>
</table>

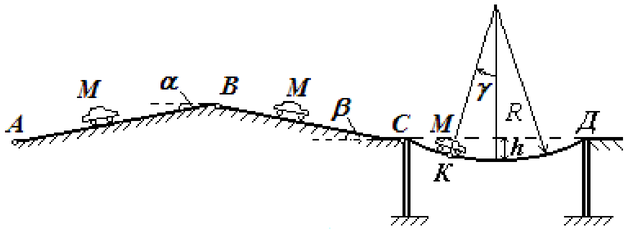
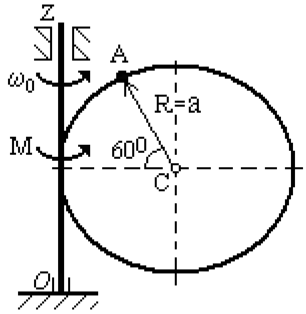
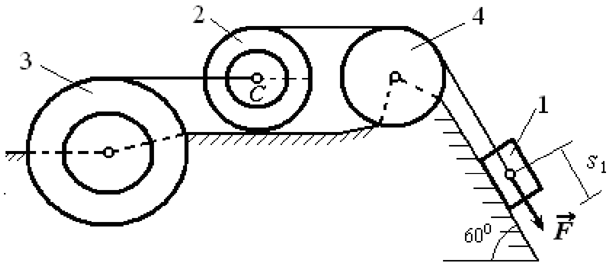
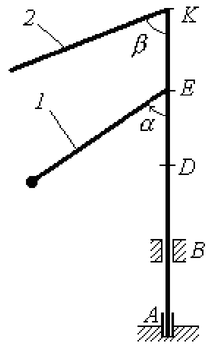
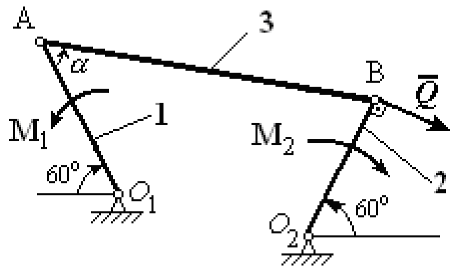
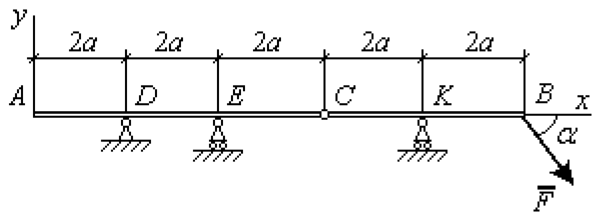
Продолжение таблицы 9

Вариант 11	
Задача Д1 R = 50 м. f = 0,05 F = 0	
Задача Д2 Осевой момент инерции пластины определяется на основе данных таблицы 4.	
Задача Д3 тело 2 – ступенчатый каток с радиусом инерции $\rho_2 = 0{,}8\,R_2$ тело 3 – масса шкива распределена по ободу радиуса r_3 тело 4 – сплошной однородный диск радиуса R_4	
Задача Д4 *1* - невесомый стержень с точечной массой m_1 на конце; *2* - однородный стержень массой m_2	
Задача Д5а Длины стержней 1 и 2 соответственно l_1 = 0,5 м, l_2 = 0,7 м. Длина стержня 3 произвольная.	
Задача Д5б Определить Y_B и реакцию невесомого стержня AA^*	

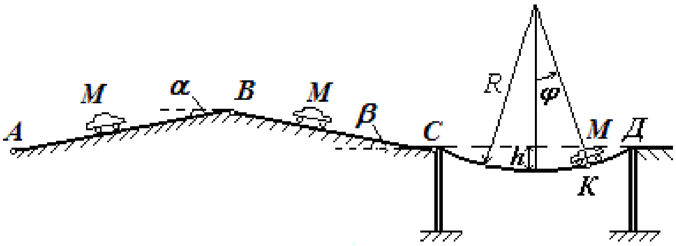
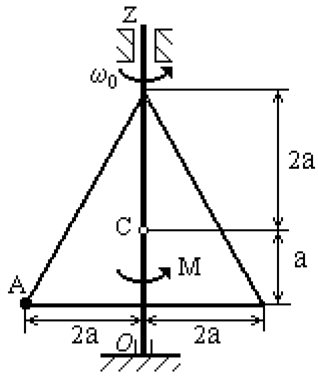
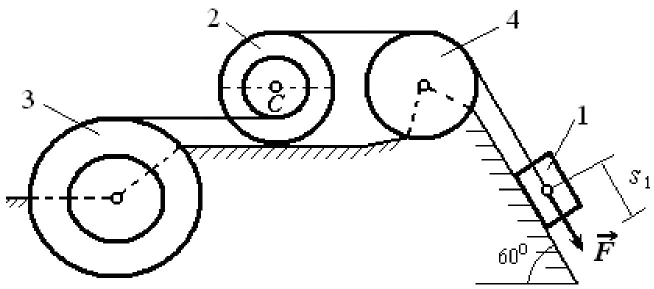
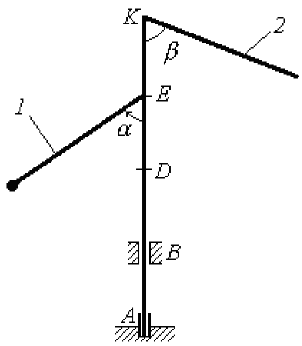
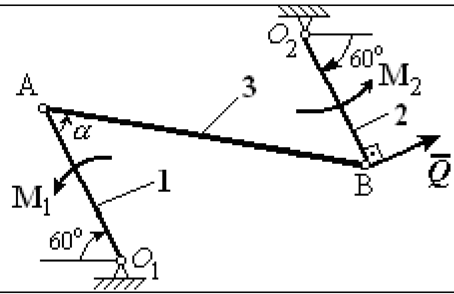
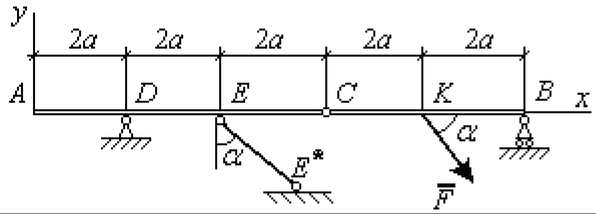
Продолжение таблицы 9

Вариант 12	
Задача Д1 R = 50 м. f = 0,05 F = 0	
Задача Д2 Точка С – центр масс пластины. Осевой момент инерции пластины определяется на основе данных таблицы 4 и теоремы Гюйгенса – Штейнера	
Задача Д3 тело 2 – масса катка распределена по ободу радиуса r_2 тело 3 – ступенчатый шкив с радиусом инерции $\rho_3 = 0{,}8\ R_3$ тело 4 – масса диска распределена по ободу радиуса R_4	
Задача Д4 *1* - невесомый стержень с точечной массой m_1 на конце; *2* - однородный стержень массой m_2	
Задача Д5а Длины стержней 1 и 2 соответственно l_1 = 0,8 м, l_2 = 0,3 м. Длина стержня 3 произвольная.	
Задача Д5б Определить реакцию невесомого стержня KK^* и реактивный момент в заделке А	

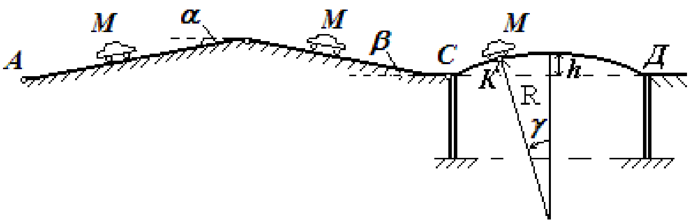
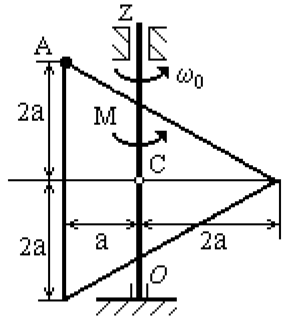
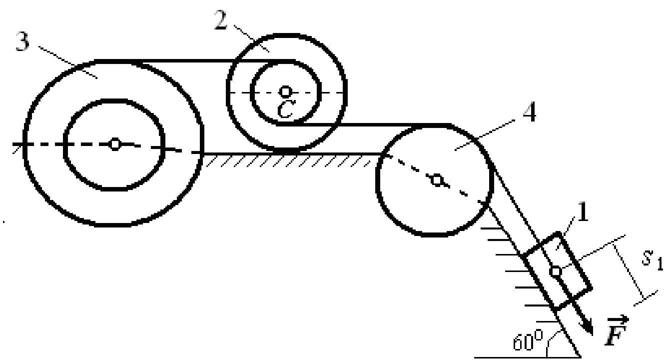
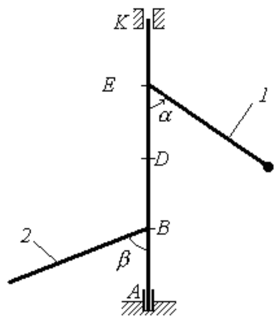
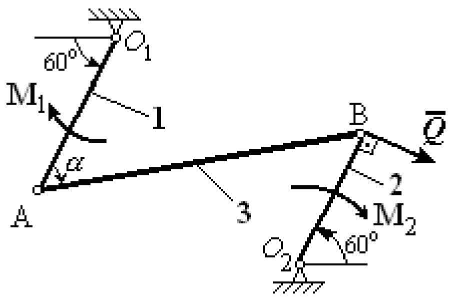
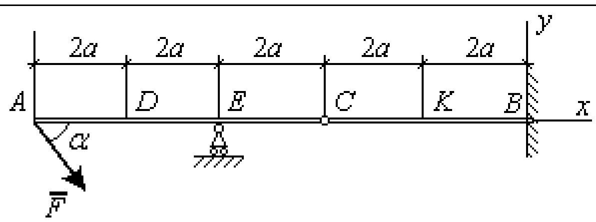
Продолжение таблицы 9

Вариант 13	
Задача Д1 R = 50 м. f = 0,05 F = 0	
Задача Д2 Точка С – центр масс пластины. Осевой момент инерции пластины определяется на основе данных таблицы 4 и теоремы Гюйгенса – Штейнера.	
Задача Д3 тело 2 – масса катка распределена по ободу радиуса R_2 тело 3 – ступенчатый шкив с радиусом инерции $\rho_3 = 0{,}6\,R_3$ тело 4 – сплошной однородный диск радиуса R_4	
Задача Д4 *1* - невесомый стержень с точечной массой m_1 на конце; *2* - однородный стержень массой m_2	
Задача Д5а Длины стержней 1 и 2 соответственно $l_1 = 0{,}7$ м, $l_2 = 0{,}3$ м. Длина стержня 3 произвольная.	
Задача Д5б Определить $У_{\text{Е}}$ и $У_{\text{К}}$	

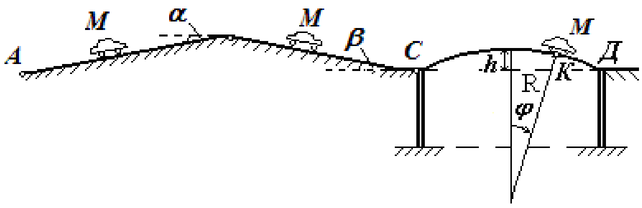
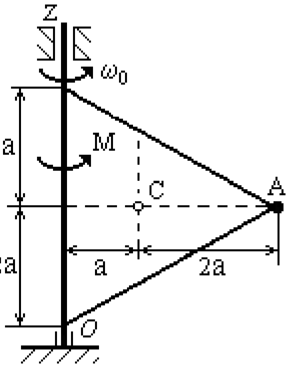
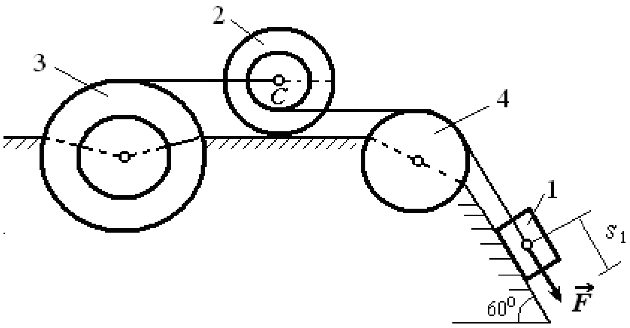
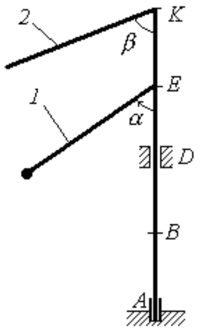
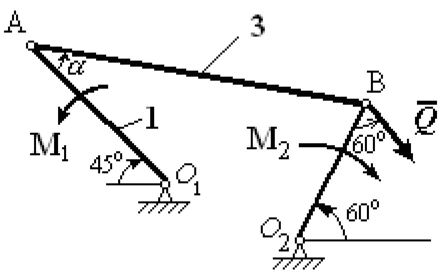
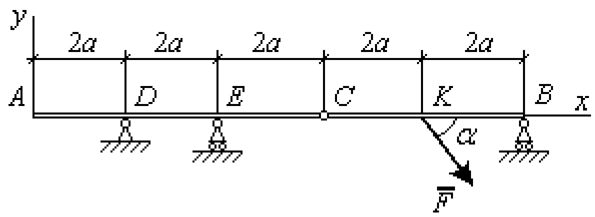
Продолжение таблицы 9

Вариант 14	
Задача Д1 R = 50 м. f = 0,05 F = 0	
Задача Д2 Точка С – центр масс пластины. Осевой момент инерции пластины определяется на основе данных таблицы 4.	
Задача Д3 тело 2 – ступенчатый каток с радиусом инерции $\rho_2 = 0{,}6\ R_2$ тело 3 – масса шкива распределена по ободу радиуса R_2 тело 4 – сплошной однородный диск радиуса R_4	
Задача Д4 *1* - невесомый стержень с точечной массой m_1 на конце; *2* - однородный стержень массой m_2	
Задача Д5а Длины стержней 1 и 2 соответственно $l_1 = 0{,}6$ м, $l_2 = 0{,}4$ м. Длина стержня 3 произвольная.	
Задача Д5б Определить Y_B и реакцию невесомого стержня EE^*	

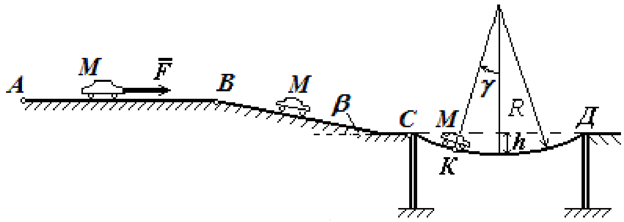
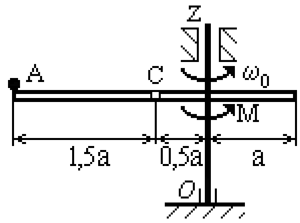
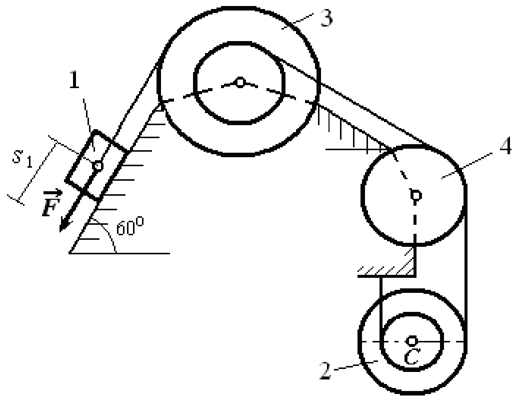
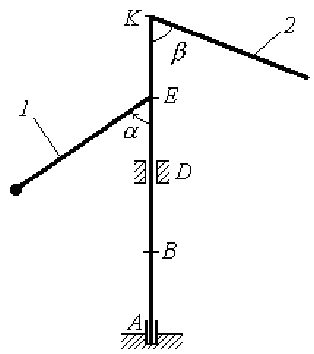
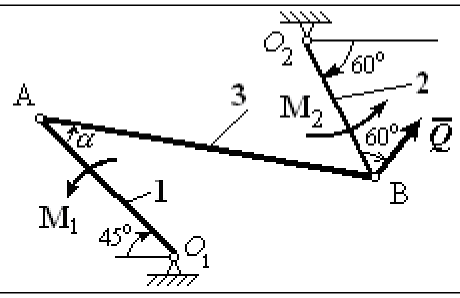
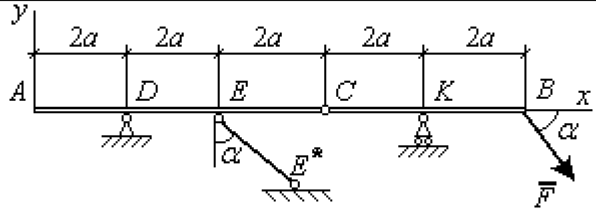
Продолжение таблицы 9

Вариант 15	
Задача Д1 R = 50 м. f = 0,05 F = 0	
Задача Д2 Точка С – центр масс пластины. Осевой момент инерции пластины определяется на основе данных таблицы 4.	
Задача Д3 тело 2 – масса катка распределена по ободу радиуса R_2 тело 3 – ступенчатый шкив с радиусом инерции $\rho_3 = 0,8\ R_3$ тело 4 – сплошной однородный диск радиуса R_4	
Задача Д4 *1* - невесомый стержень с точечной массой m_1 на конце; *2* - однородный стержень массой m_2	
Задача Д5а Длины стержней 1 и 2 соответственно l_1 = 0,8 м, l_2 = 0,6 м. Длина стержня 3 произвольная.	
Задача Д5б Определить реакцию $У_E$ и реактивный момент в заделке В	

Продолжение таблицы 9

Вариант 16	
Задача Д1 R = 50 м. f = 0,05 F = 0	
Задача Д2 Точка С – центр масс пластины. Осевой момент инерции пластины определяется на основе данных таблицы 4 и теоремы Гюйгенса – Штейнера.	
Задача Д3 тело 2 – масса катка распределена по ободу радиуса r_2 тело 3 – ступенчатый шкив с радиусом инерции $\rho_3 = 0{,}8\ R_3$ тело 4 –диск с радиусом инерции $\rho_4 = 0{,}71 R_4$	
Задача Д4 *1* - невесомый стержень с точечной массой m_1 на конце; *2* - однородный стержень массой m_2	
Задача Д5а Длины стержней 1 и 2 соответственно $l_1 = 0{,}5$ м, $l_2 = 0{,}6$ м. Длина стержня 3 произвольная.	
Задача Д5б Определить $У_E$ и $У_B$	

Продолжение таблицы 9

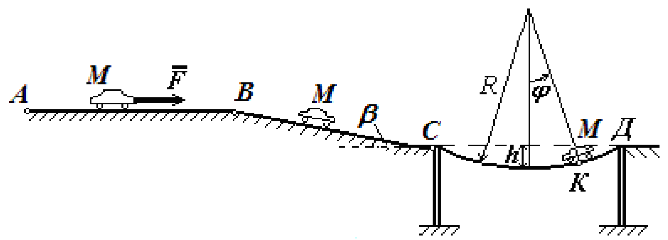
Вариант 17	
Задача Д1 R = 50 м. f = 0,05 F = 0,9 кН (действует на участке трассы АВ)	
Задача Д2 Ось Oz перпендикулярна к стержню. Точка С – центр масс стержня. Осевой момент инерции стержня определяется на основе данных таблицы 4 и теоремы Гюйгенса – Штейнера.	
Задача Д3 тело 2 – масса блока распределена по ободу радиуса R_2 тело 3 – ступенчатый шкив с радиусом инерции $\rho_3 = 0{,}7\ R_3$ тело 4 – сплошной однородный диск	
Задача Д4 *1* - невесомый стержень с точечной массой m_1 на конце; *2* - однородный стержень массой m_2	
Задача Д5а Длины стержней 1 и 2 соответственно $l_1 = 0{,}3$ м, $l_2 = 0{,}6$ м. Длина стержня 3 произвольная.	
Задача Д5б Определить $У_К$ и реакцию невесомого стержня EE^*	

Продолжение таблицы 9

<table>
<tr><th colspan="2">Вариант 18</th></tr>
<tr><td>

Задача Д1

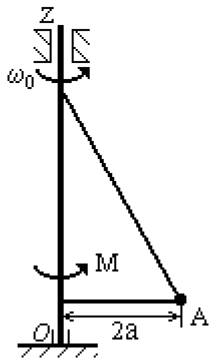
R = 50 м.
f = 0,05
F = 0,9 кН
(действует на участке трассы AB)

</td><td>


</td></tr>
<tr><td>

Задача Д2

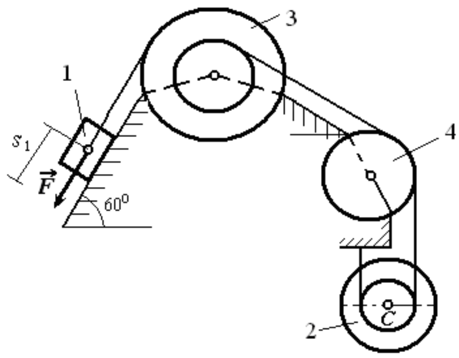
Осевой момент инерции пластины определяется на основе данных таблицы 4.

</td><td>


</td></tr>
<tr><td>

Задача Д3

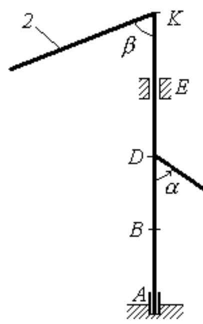
тело 2 – ступенчатый блок с радиусом инерции $\rho_3 = 0{,}6\,R_2$
тело 3 – масса шкива распределена по ободу радиуса R_3
тело 4 –диск с радиусом инерции $\rho_4 = 0{,}71R_4$

</td><td>


</td></tr>
<tr><td>

Задача Д4

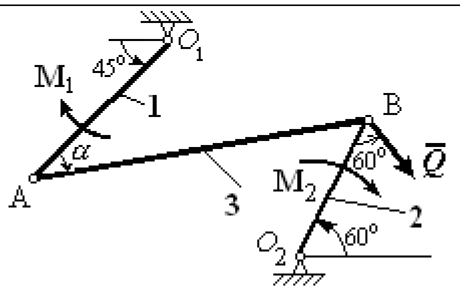
1 - невесомый стержень с точечной массой m_1 на конце;
2 - однородный стержень массой m_2

</td><td>


</td></tr>
<tr><td>

Задача Д5а

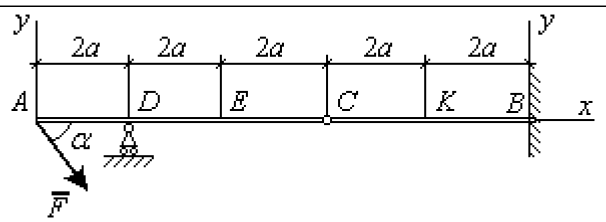
Длины стержней 1 и 2 соответственно
$l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 0{,}8$ м.
Длина стержня 3 произвольная.

</td><td>


</td></tr>
<tr><td>

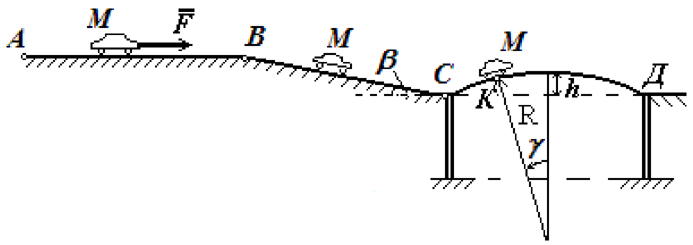
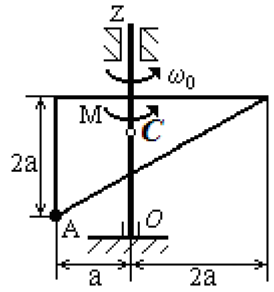
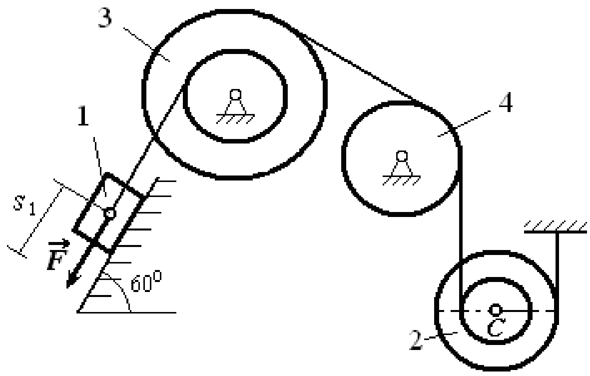
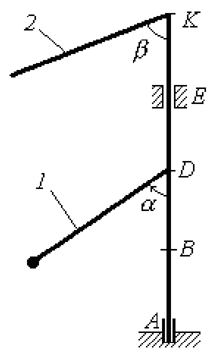
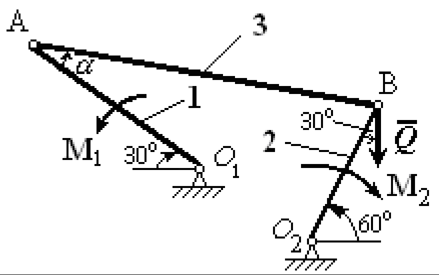
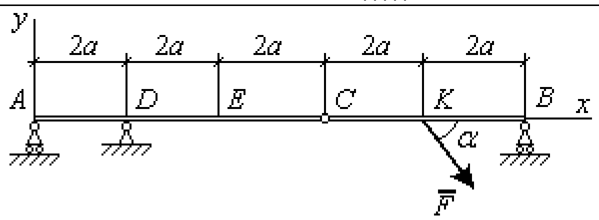
Задача Д5б

Определить реакцию $У_E$ и реактивный момент в заделке B

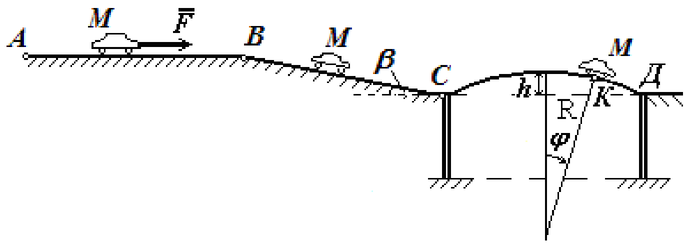
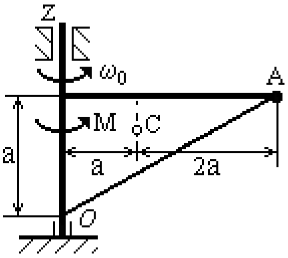
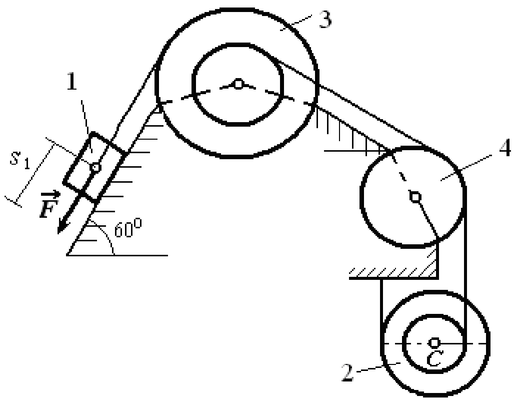
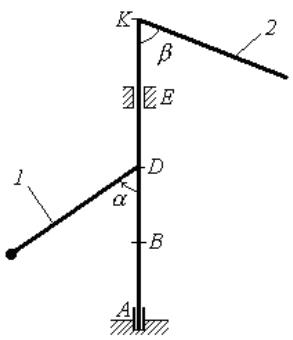
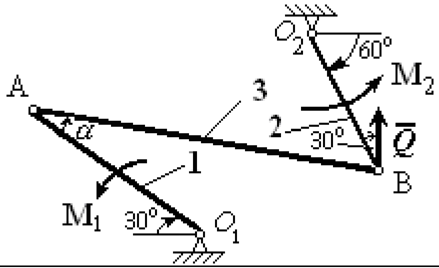
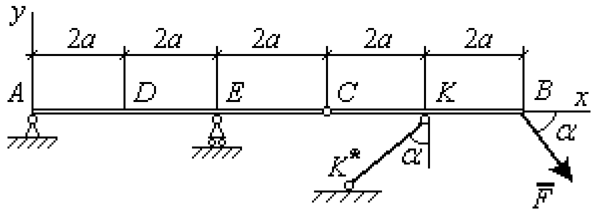
</td><td>


</td></tr>
</table>

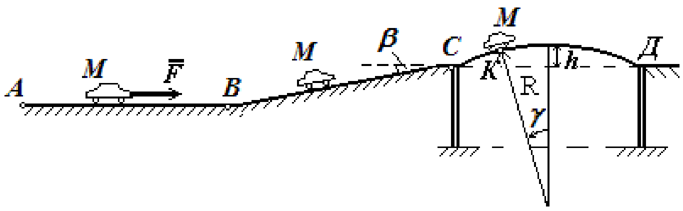
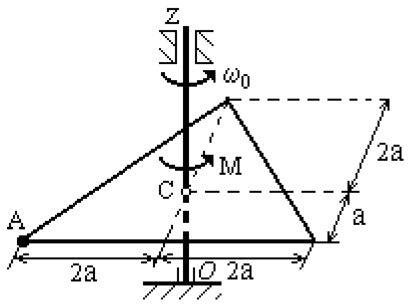
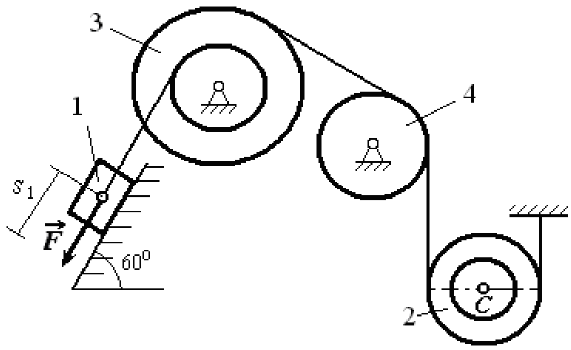
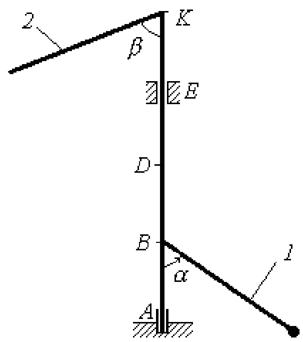
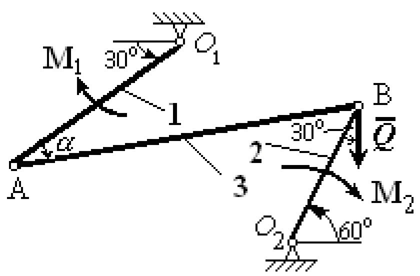
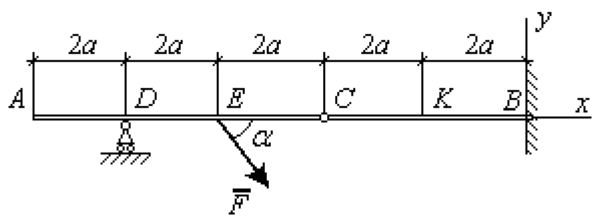
Продолжение таблицы 9

Вариант 19	
Задача Д1 R = 50 м. f = 0,05 F = 0,9 кН (действует на участке трассы АВ)	
Задача Д2 Точка С – центр масс пластины. Осевой момент инерции пластины определяется на основе данных таблицы 4.	
Задача Д3 тело 2 – ступенчатый блок с радиусом инерции $\rho_2 = 0{,}8\,R_2$, тело 3 – масса шкива распределена по ободу радиуса r_3, тело 4 – сплошной однородный диск	
Задача Д4 *1* - невесомый стержень с точечной массой m_1 на конце; *2* - однородный стержень массой m_2	
Задача Д5а Длины стержней 1 и 2 соответственно $l_1 = 0{,}7$ м, $l_2 = 0{,}4$ м. Длина стержня 3 произвольная.	
Задача Д5б Определить $У_A$ и $У_B$	

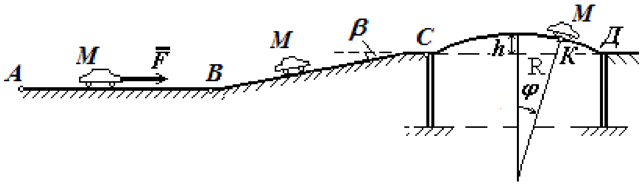
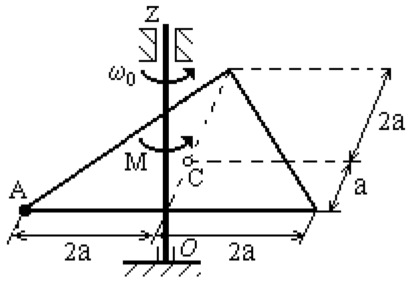
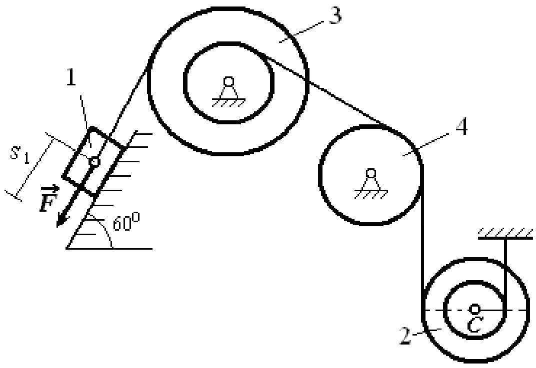
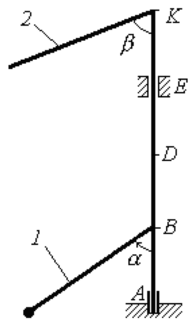
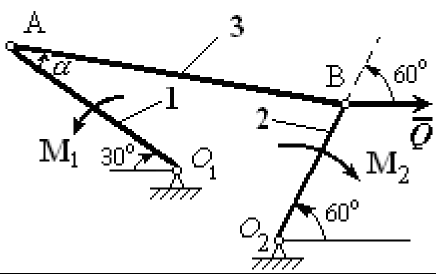
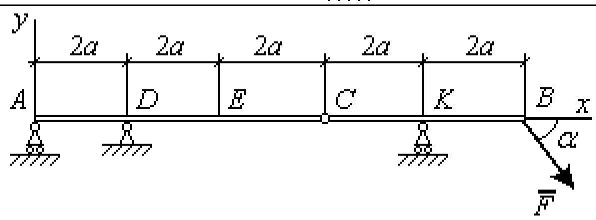
Продолжение таблицы 9

<table>
<tr><th colspan="2">Вариант 20</th></tr>
<tr><td>Задача Д1
R = 50 м.
f = 0,05
F = 0,9 кН (действует на участке трассы AB)</td><td></td></tr>
<tr><td>Задача Д2
Точка С – центр масс пластины. Осевой момент инерции пластины определяется на основе данных таблицы 4 и теоремы Гюйгенса – Штейнера.</td><td></td></tr>
<tr><td>Задача Д3
тело 2 – масса блока распределена по ободу радиуса R_2
тело 3 – ступенчатый шкив с радиусом инерции $\rho_3 = 0,8\,R_3$
тело 4 – сплошной однородный диск</td><td></td></tr>
<tr><td>Задача Д4
1 - невесомый стержень с точечной массой m_1 на конце;
2 - однородный стержень массой m_2</td><td></td></tr>
<tr><td>Задача Д5а
Длины стержней 1 и 2 соответственно
$l_1 = 0,6$ м, $l_2 = 0,9$ м.
Длина стержня 3 произвольная.</td><td></td></tr>
<tr><td>Задача Д5б
Определить Y_E и реакцию невесомого стержня KK^*</td><td></td></tr>
</table>

Продолжение таблицы 9

Вариант 21	
Задача Д1 R = 50 м. f = 0,05 F = 0,9 кН (действует на участке трассы AB)	
Задача Д2 Точка С – центр масс пластины. Ось Oz перпендикулярна к пластине. Осевой момент инерции пластины определяется на основе данных таблицы 4.	
Задача Д3 тело 2 – масса блока распределена по ободу радиуса $0{,}7R_2$ тело 3 – ступенчатый шкив с радиусом инерции $\rho_3 = 0{,}7\ R_3$ тело 4 – сплошной однородный диск	
Задача Д4 *1* - невесомый стержень с точечной массой m_1 на конце; *2* - однородный стержень массой m_2	
Задача Д5а Длины стержней 1 и 2 соответственно l_1 = 0,5 м, l_2 = 0,7 м. Длина стержня 3 произвольная.	
Задача Д5б Определить реакцию $У_E$ и реактивный момент в заделке В	

Продолжение таблицы 9

Вариант 22	
Задача Д1 R = 50 м. f = 0,05 F = 0,9 кН (действует на участке трассы AB)	
Задача Д2 Точка С – центр масс пластины. Ось Oz перпендикулярна к пластине. Осевой момент инерции пластины определяется на основе данных таблицы 4 и теоремы Гюйгенса – Штейнера.	
Задача Д3 тело 2 – масса блока распределена по ободу радиуса R_2 тело 3 – ступенчатый шкив с радиусом инерции $\rho_3 = 0{,}9\,R_3$ тело 4 – сплошной однородный диск	
Задача Д4 *1* - невесомый стержень с точечной массой m_1 на конце; *2* - однородный стержень массой m_2	
Задача Д5а Длины стержней 1 и 2 соответственно $l_1 = 0{,}6$ м, $l_2 = 0{,}7$ м. Длина стержня 3 произвольная.	
Задача Д5б Определить Y_A и Y_K	

V. Примеры выполнения задач

Пример решения задачи Д1

Автомобиль M массой $m = 1$ т, имея в точке A начальную скорость $V_0 = 15$ м/с, движется по трассе ABC и по мосту $CД$ (рисунок 22); участок трассы AB горизонтальный, имеет длину $l = 20$ м, а участок BC составляет угол $\beta = 8^0$ с горизонтом. На участке трассы AB действует постоянная сила $F = 2$ кН. На участке трассы BC на автомобиль действует постоянная сила трения $\vec{F}_{тр}$ (значение коэффициента трения скольжения $f = 0{,}05$). В точках B и C автомобиль не изменяет модуля своей скорости. Мост образует дугу окружности радиуса $R = 50$ м. Максимальная выпуклость моста $h = 8$ м.

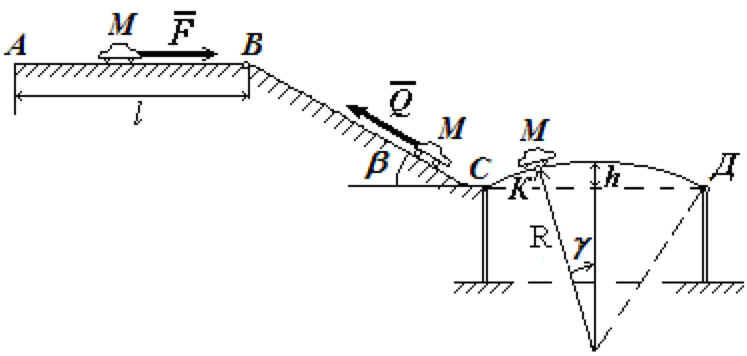


Рисунок 22 – Движение автомобиля по трассе и мосту

Считая автомобиль материальной точкой, определить:

1. скорости автомобиля в точках B, C трассы и в точке K моста, если заданы:
   - время движения $t_2 = 5$ сек по участку BC,
   - угол, определяющий положение точки K, $\gamma = 15^0$;
2. силу давления автомобиля на мост, когда он находится в точке K, и установить, находится или нет автомобиль в точке K в отрыве от моста.

Решение.

1. Найдем скорость автомобиля в точке B (рисунок 23).

Так как задана длина участка, целесообразно применить теорему об изменении кинетической энергии точки в конечной форме, принимая за начальную точку A, а за конечную – точку B

$$\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = \sum A_k$$

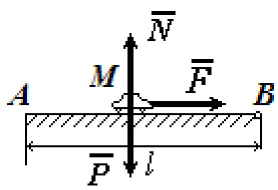


Рисунок 23 – Движение по участку AB

или применительно к данной задаче

$$\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = A_P + A_N + A_F,$$

где A_P - работа силы тяжести на перемещении AB, A_N – работа нормальной реакции на том же перемещении, A_F – работа силы $\vec{F}$.

Вычислим работы сил:

$A_P = A_N = 0$, так как силы $\vec{P}$ и $\vec{N}$ перпендикулярны к направлению перемещения.

$A_F = F \cdot l$, так как сила $\vec{F}$ совпадает с направлением перемещения.

По теореме об изменении кинетической энергии точки

$$\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = F \cdot l.$$

Из этого выражения получим

$$V_B = \sqrt{V_A^2 + 2 \cdot F \cdot l / m} = \sqrt{225 + 80} = 17{,}46 \text{ м/с}.$$

2. Определим скорость автомобиля в точке C (рисунок 24).

Так как задано время движения по участку BC, целесообразно применить теорему об изменении количества движения точки

$$m\vec{V}_C - m\vec{V}_B = \sum \vec{S}_k.$$

Или применительно к данной задаче

$$m\vec{V}_C - m\vec{V}_B = \vec{S}_P + \vec{S}_{mp} + \vec{S}_N,$$

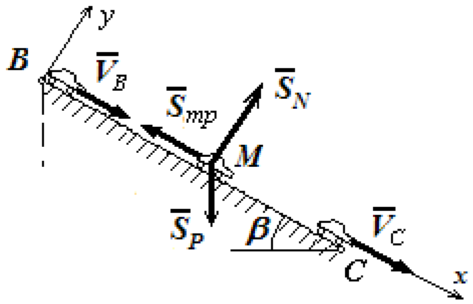


Рисунок 24 – Движение по участку ВС

где $\vec{S}_P = \vec{P} \cdot t_2$ - импульс постоянной силы тяжести $\vec{P}$,

$\vec{S}_{mp} = \vec{F}_{mp} \cdot t_2$ – импульс постоянной силы $\vec{F}_{mp}$,

$\vec{S}_N = \vec{N} \cdot t_2$ – импульс постоянной силы $\vec{N}$.

В проекции на ось x получим

$$mV_{Cx} - m\,V_{Bx} = S_{Px} + S_{mpx} + S_{Nx}. \qquad (*)$$

Для постоянных сил вычислим проекции импульсов на ось x,

$$S_{Px} = mg \cos 82^0 \cdot t_2, \quad S_{mpx} = -F_{mp} \cdot t_2 = -f \cdot N \cdot t_2, \quad S_{Nx} = 0.$$

Составляя уравнение равновесия сил в проекции на ось y найдем, что $N = mg \cdot \cos 8^0$ и тогда выражение (*) с учетом проекций импульсов запишется в виде

$$mV_C = m\,V_B + mg \cos 82^0 \cdot t_2 - f \cdot mg \cdot \cos 8^0 \cdot t_2$$

Упростив, найдем

$$V_C = V_B + g \cdot t_2 \cdot (\cos 82^0 - f \cdot \cos 8^0).$$

Подставив в это выражение числовые значения, получим

$$V_C = 17{,}46 + 9{,}8 \cdot 5 \cdot (0{,}14 - 0{,}05 \cdot 0{,}99) = 21{,}89 \text{ м/с}.$$

3. Определим скорость автомобиля в точке *К* моста (рисунок 25).

Применим теорему об изменении кинетической энергии точки в конечной форме на участке *СК*

$$\frac{mV_K^2}{2} - \frac{mV_C^2}{2} = \sum A_k$$

или применительно к данной задаче

$$\frac{mV_K^2}{2} - \frac{mV_C^2}{2} = A_P + A_N, \qquad (**)$$

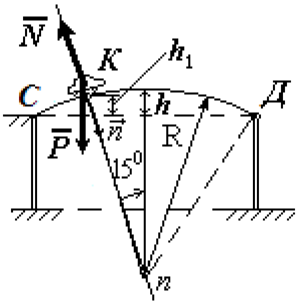


Рисунок 25 – Движение по мосту

где A_P - работа силы тяжести на перемещении *СК*, A_N – работа нормальной реакции на том же перемещении.

Вычислим работу сил.

$$A_P = -m\,g \cdot h_1 = -m\,g \cdot (\,R\cos 15^0 - (R-h)),$$

$A_N = 0$, так как реакция $\vec{N}$ перпендикулярна к направлению перемещения.

Подставляя эти выражения в формулу (**) и поделив на m, найдем

$$V_K = \sqrt{V_C^2 - 2 \cdot g \cdot (R\cos 15^0 - (R-h))} = 18{,}86 \text{ м/с}.$$

4. Найдем реакцию моста при нахождении автомобиля в точке *К*.

Основной закон динамики для точки, находящейся на мосту в положении *К*, имеет вид

$$m\vec{a}_K = \vec{P} + \vec{N}.$$

Или в проекции на нормаль $\vec{n}$ (рисунок 26)

$$ma_{Kn} = P \cdot \cos 15^0 - N.$$

Откуда, учитывая, что $a_{Kn} = mV_K^2/R$, для нормальной реакции N получим

$$N = mg \cdot \cos 15^0 - m\,V_K^2\,/\,R = 1000\,(\,9{,}8 \cdot 0{,}97\ - 18{,}86^2\,/50) = 2392 \text{ Н} = 2{,}39 \text{ кН}.$$

Сила давления автомобиля на мост на основании закона равенства действия и противодействия будет равна по модулю реакции $\vec{N}$ и направлена в противоположную сторону.

Таким образом, в точке *К* отрыва автомобиля от моста не происходит.

Пример решения задачи Д2

Однородная круглая пластина радиуса $R = a = 2$м и массы $m_1 = 40$кг вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью $\omega_0 = 10$ с $^{-1}$. С пластиной жестко связан точечный груз A массы $m_2 = 8$кг (рисунок 26). В момент времени $t_0 = 0$ на пластину начинает действовать пара сил с постоянным моментом $M = -120$ нм.

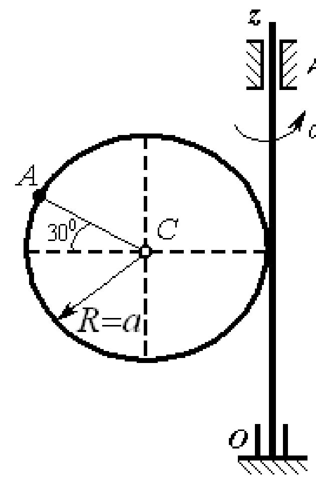


Рисунок 26 – Схема механизма

Определить угловую скорость пластины в момент времени $T = 2$с.

Решение.

1. Рассмотрим механическую систему, состоящую из пластины и точечного груза.

Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента относительно оси вращения Oz

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z(\vec{F}_k^e) \qquad (1)$$

2. Вычислим сумму моментов внешних сил, действующих на систему. Приложим к системе внешние силы (рисунок 27): силу тяжести пластины $\vec{P}_1$, силу тяжести груза $\vec{P}_2$, вращающий момент M, а также реакции подпятника $\vec{R}_0$ и подшипника $\vec{R}_Д$.

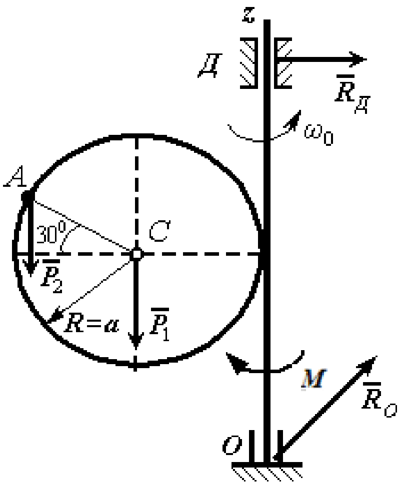


Рисунок 27 – Внешние силы системы

Тогда

$$\sum m_z(\vec{F}_k^e) = m_z(\vec{P}_1) + m_z(\vec{P}_2) + m_z(\vec{R}_o) + m_z(\vec{R}_Д) - M. \qquad (2)$$

Вычислим моменты внешних сил, входящие в выражение (2)

$m_z(\vec{P}_1) = m_z(\vec{P}_2) = 0,$ так как силы $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ параллельны оси Oz;

$m_z(\vec{R}_o) = m_z(\vec{R}_Д) = 0,$ так как силы $\vec{R}_0$ и $\vec{R}_Д$ пересекают ось Oz.

Следовательно, вместо выражения (2) имеем

$$\sum m_z(\vec{F}_k^e) = -M. \qquad (3)$$

Вычислим кинетический момент системы

$$K_Z = K_{Z\text{пласт}} + K_{Z\text{груз}}. \qquad (4)$$

Пластина совершает вращательное движение, поэтому

$$K_{Z\text{пласт}} = J_Z \cdot \omega$$

Осевой момент инерции пластины найдем по теореме Гюйгенса

$$J_Z = J_{ZC} + m_1 \cdot d^2 = m_1 \cdot R^2 / 4 + m_1 \cdot R^2 = 5\, m_1 \cdot R^2 / 4,$$

где J_{ZC} – определенный по данным справочной таблицы 4 момент инерции пластины относительно оси Cz, проходящей параллельно оси Oz и отстающей от нее на расстоянии $d = R$ (рисунок 28).

Таким образом

$$K_{Z\text{пласт}} = J_Z \cdot \omega = 1{,}25\, m_1 \cdot R^2 \cdot \omega \qquad (5)$$

Осевой момент инерции груза A относительно оси Oz равен моменту количества движения $m_1\vec{V}_A$ (рисунок 28), то есть

$$K_{Z\text{груз}} = M_Z(m_1\vec{V}_A) = m_1 V_A \cdot R_A$$

или, учитывая, что

$$V_A = \omega \cdot R_A \text{ и } R_A = (R + R\cos 30^0),$$

получим

$$K_{Z\text{груз}} = m_1\,\omega \cdot R_A^{\,2} = m_1 R^2 (1+\cos 30^0)^2 \cdot \omega \qquad (6)$$

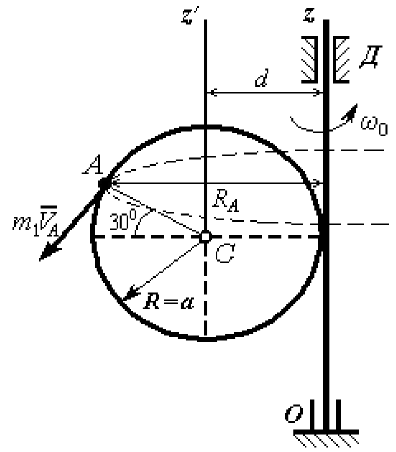


Рисунок 28 – Определение кинетического момента системы

Подставляя выражения (5) и (6) в формулу (4), найдем кинетический момент системы

$$K_Z = K_{Z\text{пласт}} + K_{Z\text{груз}} = (1{,}25 + (1+\cos 30^0)^2)\, m_1 R^2\, \omega = 758{,}31\,\omega. \qquad (7)$$

Подставляя выражения (7) и (3) в уравнение (1), имеем

$$758{,}31\frac{d\omega}{dt} = -120 \quad \text{или} \quad \frac{d\omega}{dt} = -0{,}16$$

Решая это дифференциальное уравнение, найдем

$$\int_{\omega_0}^{\omega_T} d\omega = -0{,}16\int_0^T dt$$

или

$$\omega_T - \omega_0 = -\,0{,}16 \cdot T.$$

Откуда получим

$$\omega_T = \omega_0 - 0{,}16 \cdot T = 10 - 0{,}16 \cdot 2 = 9{,}68 \text{ с}^{-1}.$$

Ответ $\omega_T = 9{,}68$ с$^{-1}$.

Пример решения задачи Д3

Механическая система (рисунок 29) состоит из груза 1, ступенчатых шкивов 2 и 3 с радиусами ступеней соответственно $R_2 = 3r_2 = 0{,}6$ м, $R_3 = 2r_3 = 0{,}4$ м, блока 4 радиуса $R_4 = 0{,}8$ м. Массы тел $m_1 = 15$ кг, $m_2 = 8$ кг, $m_3 = 6$ кг, $m_4 = 1$ кг. Радиус инерции второго шкива $\rho_2 = 0{,}5\ R_2$. Масса шкива 3 равномерно распределена по ободу радиуса R_3. Тело 4 – сплошной однородный цилиндр. Коэффициент трения груза 1 о плоскость $f = 0{,}1$. Тела системы соединены друг с другом нитями параллельными соответствующим плоскостям. Под действием постоянной силы $F = 20$ Н система приходит в движение из состояния покоя. При движении на шкив 3 действует постоянный момент сопротивления $M = 10$ Н·м.

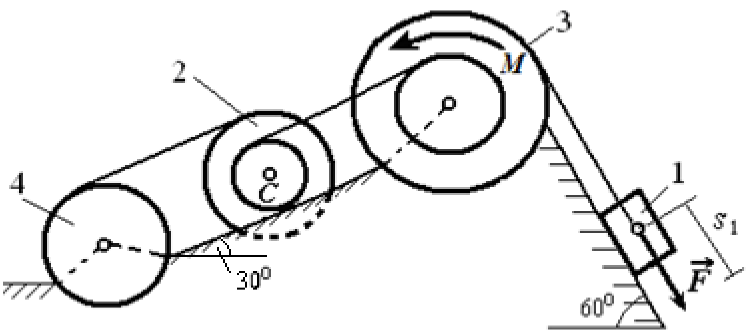


Рисунок 29 ─ Механическая система

Определить угловую скорость блока 4 ω_4 в тот момент времени, когда перемещение тела 1 станет равным $s_1 = 2$ м. Все катки (шкивы), катятся по плоскостям без скольжения.

Решение

1. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из тел 1, 2, 3, 4 соединенных нитями (рисунок 29).

2. Для определения ω_4 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии для неизменяемой системы

$$T - T_0 = \sum A_k^e \tag{1}$$

3. Вычислим кинетическую энергию системы T_0 в начале движения.

Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$.

4. Вычислим кинетическую энергию системы T в конечном положении системы (когда тело *1* – переместилось на расстояние $s = s_1$).

Величина T будет равна сумме кинетических энергий всех тел, входящих в систему

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4\,. \tag{2}$$

Учитывая, что тело 1 движется поступательно, тело 2 совершает плоское движение, а тела 3, 4 – совершают вращательное движение, найдем

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2;\ T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_C^2 + \frac{1}{2} J_C\, \omega_2^2;\ T_3 = \frac{1}{2} J_{C3}\, \omega_3^2;\ T_4 = \frac{1}{2} J_{C4}\, \omega_4^2. \tag{3}$$

6. Выразим все входящие в формулы (3) скорости через искомую угловую скорость ω_4.

Блок 4 совершает вращательное движение, поэтому (рисунок 30)

$$V_К = \omega_4 R_4 = 0{,}8\ \omega_4. \qquad (4)$$

Нить КЕ совершает поступательное движение, следовательно

$$V_Е = V_К = 0{,}8\ \omega_4. \qquad (5)$$

Шкив 2 совершает плоское движение. М.ц.с. шкива в точке Р, поэтому

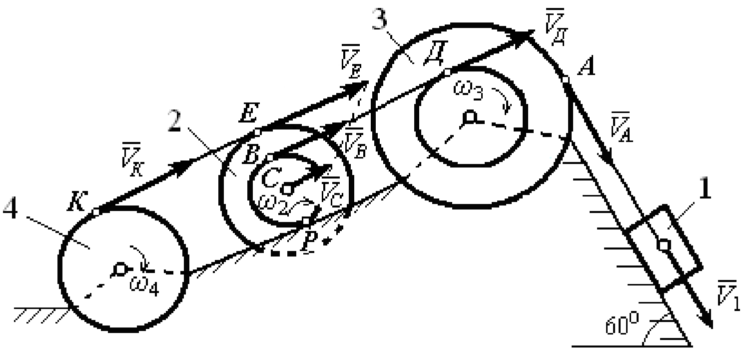


Рисунок 30 ─ Скорости точек система

$$\omega_2 = V_Е / (R_2 + r_2) = \omega_4. \qquad (6)$$

Скорость центра масс С шкива 2

$$V_С = r_2\, \omega_2 = 0{,}2\ \omega_4. \qquad (7)$$

Скорость точки *B* шкива 2

$$V_В = 2\, r_2\, \omega_2 = 0{,}4\ \omega_4. \qquad (8)$$

Нить ДВ совершает поступательное движение, следовательно

$$V_В = V_Д \text{ или } 0{,}4\ \omega_4 = \omega_3\, r_3$$

Откуда

$$\omega_3 = 2\ \omega_4\ . \qquad (9)$$

Шкив 3 находится во вращательном движении, следовательно

$$V_А = \omega_3 R_3 = 2\ \omega_4 \cdot 0{,}4 = 0{,}8\ \omega_4 \qquad (10)$$

Нить, соединяющая тела 1 и 3 находится в поступательном движении (рисунок 30), поэтому

$$V_1 = V_А = 0{,}8\ \omega_4. \qquad (11)$$

7. Вычислим моменты инерции, входящие в выражения (3)

Для шкива 2 задан радиус инерции $\rho_2 = 0{,}5\ R_2$, следовательно

$$J_С = m_2\, \rho_2^{\,2} = 8 \cdot 0{,}09 = 0{,}72 \text{ кг м}^2. \qquad (12)$$

Масса шкива 3 равномерно распределена по его ободу, поэтому

$$J_{C3} = m_3 R_3^2 = 6 \cdot 0{,}16 = 0{,}96 \text{ кг м}^2. \tag{13}$$

Блок 4 сплошной однородный цилиндр, для которого

$$J_{C4} = m_4 R_4^2 / 2 = 1 \cdot 0{,}8^2 / 2 = 0{,}32 \text{ кг м}^2. \tag{14}$$

Выразим кинетическую энергию T через искомую величину ω_4.

Подставив выражения (6) – (11), (12) – (14) в равенство (3) и далее в формулу (2), окончательно получим

$$T = (4{,}8 + 0{,}16 + 0{,}36 + 1{,}92 + 0{,}16)\,\omega_4^2 = 7{,}4\,\omega_4^2. \tag{15}$$

9. Найдем сумму работ всех действующих внешних сил при том перемещении, которое будет иметь система, когда тело 1 пройдет путь s_1.

Изобразим действующие на систему внешние силы (рисунок 31):

активные $\vec{F}$, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3, \vec{P}_4$;

реакции связей $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, $\vec{R}_3$, $\vec{R}_4$; $\vec{F}_{тр}$, $\vec{F}_{сц}$,

момент сопротивления M.

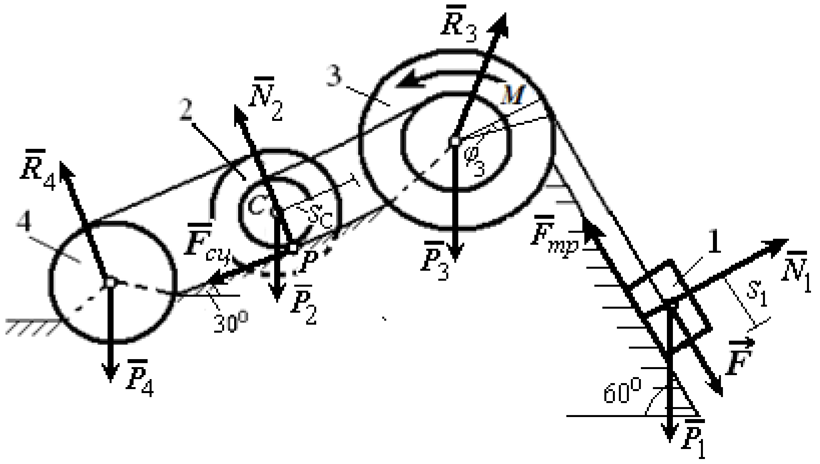


Рисунок 31 ─ Внешние силы и перемещения

Тогда сумма работ внешних сил, действующих на систему, будет

$$\Sigma A_k^e = A_F + A_{P_1} + A_{тр} + A_{P_2} + A_{P_3} + A_{P_4} + A_{N_1} + A_{N_2} + A_{R_3} + A_{R_4} + A_{сц} + A_M. \tag{16}$$

Обозначим: s_C – перемещение центра шкива 2 (рисунок 31); φ_3 – угол поворота шкива 3 и вычислим работы всех сил входящих в выражение (16).

$A_F = F \cdot s_1$ ─ так как сила F постоянная и совпадает с направлением перемещения;

$A_{P_1} = P_1 \cdot h_1 = m_1 g \cdot s_1 \cdot \cos 30^0$, где h_1 – вертикальное смещение груза 1;

$A_{P_2} = -P_2 \cdot h_C = -m_2 g \cdot s_C \cdot \sin 30^0$, где h_C - вертикальное смещение точки С;

$A_{тр} = -F_{тр}\, s_1 = -f N_1 s_1 = -f m_1 g\, s_1 \cdot \cos 60^0$;

$A_{P_3} = A_{P_4} = 0$, так как эти силы приложены к неподвижным точкам;

$A_{N_1} = 0$, так как эта сила перпендикулярна к направлению перемещения;

$A_{N_2} = 0$, так как эта сила приложена к неподвижной точке (м.ц.с.);

$A_{сц} = 0$, так как эта сила приложена к неподвижной точке (м.ц.с.);

$A_{R_3} = A_{R_4} = 0$, так как эти силы приложены к неподвижным точкам;

$A_M = -M \cdot \varphi_3$ – работа момента сопротивления.

Таким образом, вместо выражения (16), получим

$$\Sigma A_k^e = F \cdot s_1 + m_1\, g \cdot s_1 \cdot \cos 30^0 - f\, m_1\, g\, s_1 \cdot \cos 60^0 - m_2\, g \cdot s_C \cdot \sin 30^0 - M \cdot \varphi_3. \quad (17)$$

Выразим перемещения s_C и φ_3 через перемещение s_1 используя идентичность зависимостей между скоростями и соответствующими перемещениями.

Определяя ω_4 из выражений (7) и (11), найдем

$$\omega_4 = 5\, V_C \quad \text{и} \quad \omega_4 = 1{,}25\, V_1.$$

Откуда

$$V_C = 0{,}25\, V_1.$$

Правило. Если зависимость между скоростями точек системы сохраняется во все время движения, то зависимость между перемещениями этих точек идентична.

Применяя это правило установим связь скоростями точки С и тела 1

$$s_C = 0{,}25\, s_1. \quad (18)$$

Определяя ω_3 из выражений (10) и (11), найдем

$$V_1 = \omega_3\, R_3 \quad \text{или} \quad \omega_3 = V_1 / R_3$$

Откуда

$$\omega_3 = 2{,}5\, V_1.$$

Согласно приведенному выше правилу зависимость углового перемещения φ_3 от линейного перемещения s_1 определится выражением

$$\varphi_3 = 2{,}5\, s_1. \quad (19)$$

Подставляя соотношения (18) и (19) в выражение (17), найдем

$$\Sigma A_k^e = F \cdot s_1 + m_1\, g \cdot s_1 \cdot \cos 30^0 - f\, m_1\, g\, s_1 \cdot \cos 60^0 - m_2\, g \cdot 0{,}25 s_1 \cdot \sin 30^0 - M \cdot 2{,}5 s_1 =$$

$$= 20 \cdot 2 + 2 \cdot 9{,}8 \cdot (15 \cdot 0{,}86 - 0{,}1 \cdot 15 \cdot 0{,}5 - 8 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}5) - 10 \cdot 2{,}5 \cdot 2 = \quad (20)$$

$$= 40 + 19{,}6 \cdot (12{,}9 - 0{,}75 - 1) - 50 = 208{,}54 \text{ Дж}.$$

Подставляя выражения (15) и (20) в уравнение (1), получим

$$7{,}4\, \omega_4^2 = 208{,}54$$

Откуда найдем

$$\omega_4 = 5{,}31 \text{ с}^{-1}.$$

Ответ: угловая скорость $\omega_4 = 5{,}58$ с$^{-1}$.

Пример решения задачи Д4

Вертикальный вал AB (рисунок 32), вращающийся с постоянной угловой скоростью ω, закреплен подпятником в точке A и цилиндрическим подшипником в точке B. К валу в точке K жестко прикреплен невесомый стержень KD длиной l_1 с точечной массой m_1 на конце и однородный стержень EL, массой m_2 и длиной l_2; оба стержня лежат в одной плоскости.

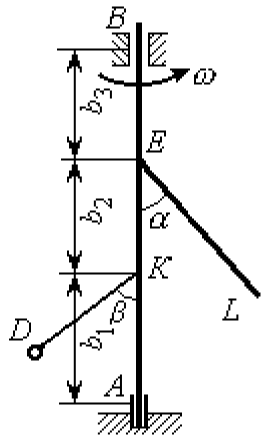


Рисунок 32 – Вращение вала

Дано: $b_1 = 0{,}6$ м, $b_2 = 0{,}2$ м, $b_3 = 0{,}2$ м, $\alpha = 30^0$, $\beta = 60^0$, $l_1 = 0{,}5$ м, $l_2 = 0{,}8$ м, $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 4$ кг, $\omega = 4$ с$^{-1}$.

Определить: реакции подпятника A и подшипника B.

Решение

1. Для решения задачи воспользуемся принципом Даламбера. Рассмотрим механическую систему, состоящую из вала AB, стержня EL и груза D (рисунок 32).

2. Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, составляющие $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ реакции подпятника и реакцию $\overline{X}_B$ подшипника (рисунок 33).

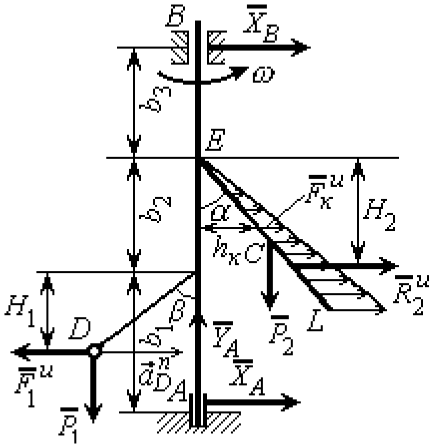


Рисунок 33 – Система сил, приложенная к валу

3. Вычислим силы инерции.

Массу имеют два тела: груз D и однородный стержень EL.

3.1 Вычислим силу инерции груза D.

Так как вращение системы равномерное, то точка D имеет только нормальное ускорение $\vec{a}_D^n$ (рисунок 33). Тогда сила инерции груза D

$$\vec{F}_1^u = -m_1 \cdot \vec{a}_D = -m_1 \cdot \vec{a}_D^n .$$

То есть она будет направлена в сторону противоположную ускорению $\vec{a}_D^n$, и численно равна

$$F_1^u = m_1 \cdot a^n_D = m_1 \cdot \omega^2\, l_1 \sin\beta = 2 \cdot 4^2 \cdot 0{,}5 \cdot \sqrt{3}/2 = 8 \cdot 1{,}73 = 13{,}86 \text{ Н}.$$

3.2 Вычислим силы инерции стержня EL.

Так как вал вращается равномерно (ω = const), то элементы стержня имеют только нормальные ускорения $\vec{a}_{nk}$ (рисунок 33), направленные к оси вращения и численно равные $a_{nk} = \omega^2 \cdot h_k$, где h_k – расстояние элемента от оси (рисунок 33). Тогда силы инерции $\vec{F}_k^u$, будут направлены от оси вращения и численно $F_k^и = \Delta m \cdot a_{nk} = \Delta m \cdot \omega^2 \cdot h_k$, где $\Delta\, m$ – масса элемента.

Поскольку все силы инерции $\vec{F}_k^и$ пропорциональны h_k, то эпюра этих параллельных сил образует треугольник и их можно заменить равнодействующей $\vec{R}_2^и$, линия действия которой проходит через центр тяжести этого треугольника, то есть на расстоянии H_2 от вершины E, где $H_2 = \ l_2 \cdot 2/3 \cdot \cos\alpha$ (рисунок 33).

Равнодействующая любой системы параллельных сил равна главному вектору, а главный вектор сил инерции стержня $R^и{}_2 = m_2 \cdot a_C$, где a_C – ускорение центра масс стержня; при этом

$$a_C = a_{Cn} = \omega^2 \cdot h_C = \omega^2 \cdot l_2 /2 \cdot \sin\alpha.$$

В результате получим

$$R^и{}_2 = m_2 \cdot \omega^2 \cdot l_2 \cdot \sin\alpha \ / 2 = 4 \cdot 4^2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 12{,}8 \text{ Н}.$$

4. Применим принцип Даламбера для механической системы.

Согласно принципу, приложенные внешние силы и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составим для этой плоской системы сил (рисунок 33) три уравнения равновесия, получим

$$\begin{aligned}
&\sum F_{kx} = 0; && X_A + X_B + R^и{}_2 - F^и{}_1 = 0;\\
&\sum F_{ky} = 0; && Y_A - P_1 - P_2 = 0;\\
&\sum m_A(\overline{F}_k) = 0; && -X_B \cdot (b_1 + b_2 + b_3) + P_1 \cdot l_1 \cdot \sin\beta - P_2 \cdot l_2/2 \cdot \sin\alpha - \\
& && - R^и{}_2 \cdot (b_1 + b_2 - H_2) + F^и{}_1 \cdot (b_1 - H_1) = 0.
\end{aligned} \qquad (5)$$

Подставив сюда числовые значения всех заданных и вычисленных величин, и решив эту систему уравнений, найдем искомые реакции.

Ответы: X_A = - 6,74 Н, Y_A = 65,54 Н, X_B = 58,8 Н.

Знак минус указывает, что сила $\overline{X}_A$ направлена противоположно показанной на рисунке 33.

Пример решения задачи Д5а

Механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, находится под действием приложенных сил в равновесии. Положение механизма определяется углами, указанными на рисунке 34. Длины стержней механизма (кривошипов) l_1 = 0,5 м, l_2 = 0,8 м и размер l_3 произвольный. На шарнир A механизма действует сила Q = 30 Н, а на шарнир B – сила F = 40 Н. На кривошип O_2B – наложена пара сил с моментом M.

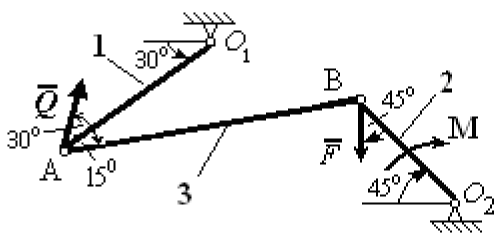


Рисунок 34 – Равновесие механизма

Определить, чему равна величина момента пары сил M.

Решение

Для решения задачи применим принцип возможных перемещений.

1. Сообщим системе возможное перемещение (рисунок 35).

Связи, наложенные на стержни *1* и *2*, допускают поворот вокруг осей, проходящих соответственно через точки O_1 и O_2. Соответствующие угловые перемещения этих стержней обозначим $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$ (рисунок 35). При этом точки *A* и *B* получат перемещения δs_A и δs_B.

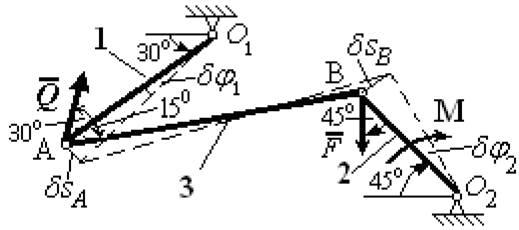


Рисунок 35 – Возможное перемещение

2. Составим уравнение возможных работ применительно к данной задаче

$$\sum \delta A^a{}_k = \delta A_Q + \delta A_F + \delta A_M = 0. \qquad (*)$$

3. Вычислим работы активных сил, входящих в уравнение (*)

$$\delta A_Q = -M_{O_1}(\vec{Q}) \cdot \delta\varphi_1 = -Q \cdot \sin 30^0 \cdot l_1 \cdot \delta\varphi_1 = -30 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot \delta\varphi_1 = -7{,}5\ \delta\varphi_1;$$

$$\delta A_F = -M_{O_2}(\vec{F}) \cdot \delta\varphi_2 = -F \cdot \sin 45^0 \cdot l_2 \cdot \delta\varphi_2 = -40 \cdot 0{,}5 \cdot \sqrt{2}\ 0{,}8 \cdot \delta\varphi_2 = -22{,}2\ \delta\varphi_2;$$

$$\delta A_M = M \cdot \delta\varphi_2.$$

С учетом этих выражений уравнение (*) примет вид

$$-7{,}5\ \delta\varphi_1 - 22{,}2\ \delta\varphi_2 + M \cdot \delta\varphi_2 = 0. \qquad (**)$$

4. Выразим $\delta\varphi_1$ через $\delta\varphi_2$.

Выразим возможное перемещение δs_A через угловое перемещение $\delta\varphi_1$

$$\delta s_A = l_1 \cdot \delta\varphi_1,$$

а перемещение δs_B через угловое перемещение $\delta\varphi_2$

$$\delta s_B = l_2 \cdot \delta\varphi_2.$$

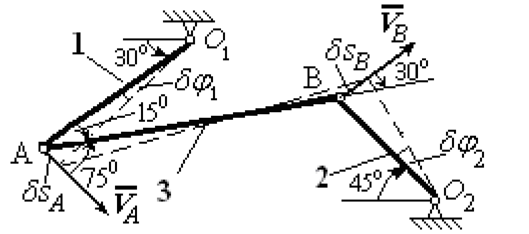


Рисунок 36 – Зависимость $\delta\varphi_1$ от $\delta\varphi_2$

Перемещения δs_A и δs_B в силу их малости направлены также как и соответствующие скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$. Поэтому, если выразить V_A через V_B, то δs_A выразится через δs_B идентично.

По теореме о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры (рисунок 36) получим

$$V_A \cdot \cos 75^0 = V_B \cdot \cos 30^0.$$

Откуда

$$V_A = V_B \cdot \cos 30^0 / \cos 75^0$$

или

$$\delta s_A = \delta s_B \cdot \cos 30^0 / \cos 75^0.$$

Заменяя здесь δs_A и δs_B их выражениями через угловые перемещения, получим

$$l_1 \cdot \delta\varphi_1 = l_2 \cdot \delta\varphi_2 \cdot \cos 30^0 / \cos 75^0$$

или

$$\delta\varphi_1 = l_2 \cdot \delta\varphi_2 \cdot \cos 30^0 / (\cos 75^0 \cdot l_1).$$

С учетом последнего соотношения уравнение (**) примет вид

$$-7{,}5 \cdot l_2 \cdot \delta\varphi_2 \cdot \cos 30^0 / (\cos 75^0 \cdot l_1) - 22{,}2 \cdot \delta\varphi_2 + M \cdot \delta\varphi_2 = 0.$$

Поделив это соотношение на $\delta\varphi_2 \neq 0$, найдем величину момента M

$$M = 7{,}5 \cdot l_2 \cdot \cos 30^0 / \cos 75^0 / l_1 + 22{,}2.$$

Производя вычисления, найдем

$$M = 7{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}86 / 0{,}26 / 0{,}5 + 22{,}2 = 39{,}69 \text{ Нм}.$$

Ответ: $M = 39{,}69$ Нм.

Пример решения задачи Д5б

Составная балка AB находится под действием приложенных сил и связей в равновесии. Балка состоит из двух частей AC и CB, соединенных между собой в точке C цилиндрическим шарниром (рисунок 37). Размеры указаны на рисунках, где $a = 2$ м.

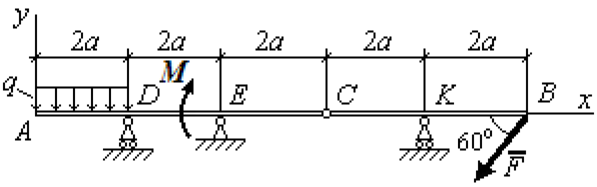


Рисунок 37 – Составная балка

На балку действуют: равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q = 2$ кН/м; сосредоточенная наклонная сила $F = 6$ кН; пара сил с моментом $M = 8$ кНм.

Определить реакции $У_Е$ и $R_К$ внешних связей, наложенных на балку AB, и убедиться в верности их нахождения (сделать проверку).

Решение

Предварительно заменим равномерно распределенную нагрузку сосредоточенной силой $\vec{Q}$, которая приложена к середине участка распределения (рисунок 38). Модуль силы $\vec{Q}$

$$Q = q \cdot l = q \cdot 2a = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \text{ кН}.$$

I. Определим реакцию $R_К$.

1. Используя аксиому связей освободимся от подвижного шарнира K, заменяя его одной реакцией, направленной перпендикулярно опорной плоскости (рисунок 38).

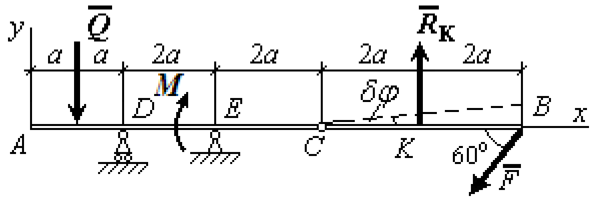


Рисунок 38 – Возможное перемещение балки при определении реакции $R_К$

2. Сообщим системе возможное перемещение (рисунок 38). Связи, наложенные в точках D и E не допускают у части балки AC никаких перемещений. Правая часть балки CB может поворачиваться вокруг точки С.

3. Подсчитаем сумму возможных работ всех сил и пар сил, приложенных к балке, и приравняем ее к нулю исходя из принципа возможных перемещений

$$\Sigma\delta A_{\text{k}} = \delta A\,(\vec{Q}\,) + \delta A\,(M) + \delta A\,(\vec{R}_K\,) + \delta A\,(\vec{F}\,) = 0, \qquad (*)$$

где

$\delta A\,(\vec{Q}\,)$ – возможная работа силы $\vec{Q}$;

$\delta A\,(M)$ – возможная работа момента M;

$\delta A\,(\vec{R}_K\,)$ – возможная работа реакции $\vec{R}_K$ подвижного шарнира;

$\delta A\,(\vec{F}\,)$ – возможная работа силы $\vec{F}$.

Вычислим элементарные работы сил, входящие в уравнение (*):

$\delta A\,(\vec{Q}\,) = 0$, так как сила $\vec{Q}$ приложена к неподвижной части AD балки;

$\delta A\,(M) = 0$, так как момент M приложен к неподвижной части AD балки;

для вычисления работы силы $\vec{R}_K$ воспользуемся формулой для элементарной работы силы, приложенной к вращающемуся телу $\delta A_{\text{вр}} = M_{\text{z}}\,(\overline{F}\,)\cdot\delta\varphi$, тогда

$$\delta A\,(\vec{R}_K\,) = M_{\text{C}}\,(\vec{R}_K\,)\cdot\delta\varphi = R_K\cdot 2a\cdot\delta\varphi.$$

Элементарную работу силы $\vec{F}$ найдем аналогично

$$\delta A\,(\vec{F}\,) = -F\cdot\cos30^0\cdot 4a\cdot\delta\varphi.$$

Подставляя найденные значения в уравнение (*), получим

$$R_K\cdot 2a\cdot\delta\varphi - F\cdot\cos30^0\cdot 4a\cdot\delta\varphi = 0.$$

$\delta\varphi \neq 0$, следовательно

$$R_K\cdot 2 - F\cdot\cos30^0\cdot 4 = 0.$$

Откуда найдем

$$R_K = F\cdot\cos30^0\cdot 2 = 6\sqrt{3} = 10{,}39 \text{ кН}.$$

II. Определим реакцию $У_{\text{E}}$.

1. Используя аксиому связей заменим неподвижный шарнир E подвижным шарниром и реакцией $\vec{У}_{\text{E}}$ (рисунок 39).

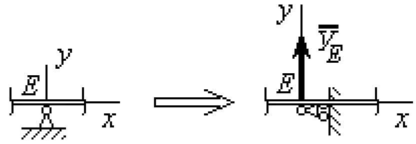


Рисунок 39 – Замена неподвижного шарнира на подвижный

2. Сообщим системе одно из ее возможных перемещений (рисунок 40).

Большее количество связей наложено на часть балки AC, поэтому начнем с нее. Мгновенный центр скоростей для этой части балки находится в точке D, поэтому возможным перемещением части балки AC будет поворот на угол $\delta\varphi_1$ вокруг точки D (рисунок 40).

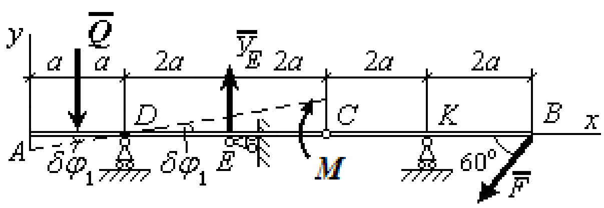


Рисунок 40 – Возможное перемещение части балки АС при определении реакции

Мгновенный центр скоростей для части балки *CB* находится в точке *К*, поэтому возможным перемещением части балки *CB* будет поворот на угол $\delta\varphi_2$ вокруг точки *К* (рисунок 41).

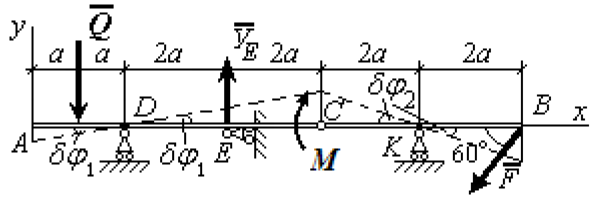


Рисунок 41 – Возможное перемещение балки при определении реакции $У_{\text{E}}$

3. Составим уравнение возможных работ всех сил и пар сил, приложенных к балке, и приравняем ее к нулю исходя из принципа возможных перемещений

$$\Sigma\delta A_{\text{k}} = \delta A\,(\vec{Q}\,) + \delta A\,(M) + \delta A\,(\vec{У}_E\,) + \delta A\,(\vec{F}\,) = 0, \qquad (**)$$

где

$\delta A\,(\vec{Q}\,)$ – возможная работа силы $\vec{Q}$;

$\delta A\,(M)$ – возможная работа момента M;

$\delta A\,(\vec{У}_E)$ – возможная работа вертикальной реакции $\vec{У}_E$ неподвижного шарнира *E*;

$\delta A\,(\vec{F}\,)$ – возможная работа силы $\vec{F}$.

4. Вычислим элементарные работы сил, входящие в уравнение (**), используя формулу для элементарной работы силы, приложенной к вращающемуся телу $\delta A_{\text{вр}} = M_{\text{z}}\,(\overline{F}\,)\cdot\delta\varphi$:

$$\delta A\,(\vec{Q}\,) = M_{\text{D}}\,(\vec{Q}\,)\cdot\delta\varphi_1 = Q\cdot a\cdot\delta\varphi_1;$$

$$\delta A\,(M) = -M\cdot\delta\varphi_1;$$

$$\delta A\,(\vec{У}_E) = M_{\text{D}}\,(\vec{У}_E)\cdot\delta\varphi_1 = У_{\text{E}}\cdot 2a\cdot\delta\varphi_1;$$

$$\delta A\,(\vec{F}\,) = F\cdot\cos 30^0\cdot 2a\cdot\delta\varphi_2.$$

Подставляя найденные значения в уравнение (**), получим

$$Q\cdot a\cdot\delta\varphi_1 - M\cdot\delta\varphi_1 + У_{\text{E}}\cdot 2a\cdot\delta\varphi_1 + F\cdot\cos 30^0\cdot 2a\cdot\delta\varphi_2 = 0. \qquad (***)$$

Для нахождения реакции $У_{\text{E}}$ необходимо угловое перемещение $\delta\varphi_2$ выразить через перемещение $\delta\varphi_1$

5. Найдем зависимость между перемещениями, входящими в уравнение работ (***).

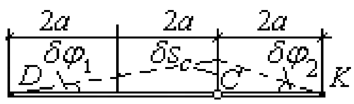


Рисунок 42 – Связь между $\delta\varphi_2$ и $\delta\varphi_1$

В силу малости возможных перемещений элементарное перемещение δs_{c} можно считать дугой окружности (рисунок 42), одновременно опирающейся на углы $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$, тогда

$$\delta s_{\text{c}} = 4a\cdot\delta\varphi_1 \;\text{ и }\; \delta s_{\text{c}} = 4a\cdot\delta\varphi_1.$$

Откуда $4a\cdot\delta\varphi_1 = 2a\cdot\delta\varphi_2$ или $\delta\varphi_2 = 2\,\delta\varphi_1$.

6. Найдем реакцию $У_{\mathrm{E}}$.

Подставляя последнее соотношение в уравнение (***), получим

$$Q \cdot a \cdot \delta\varphi_1 - M \cdot \delta\varphi_1 + У_{\mathrm{E}} \cdot 2a \cdot \delta\varphi_1 + F \cdot \cos 30^0 \cdot 2a \cdot 2\,\delta\varphi_1 = 0.$$

Поделив это выражение на величину $a \cdot \delta\varphi_1$, найдем

$$Q - M/a + 2У_{\mathrm{E}} + 4F \cdot \cos 30^0 = 0.$$

Откуда имеем

$$У_{\mathrm{E}} = -(Q - M/a + 4F \cdot \cos 30^0)/2 = -(8 - 4 + 4 \cdot 6 \cdot \sqrt{3}/2)/2 = -12{,}39 \text{ кН}.$$

III. Проверка.

Заменим все внешние опоры, наложенные на балку, их реакциями (рисунок 43)

Составим уравнение моментов относительно точки $D \Sigma M_D(\overline{F}_k) = 0$.

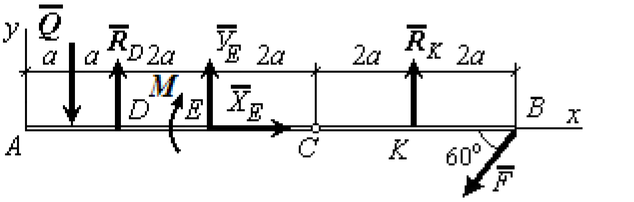


Рисунок 43 – Расчетная схема для проверки

В качестве моментной точки необходимо выбирать такую точку, в которой бы пересекались неизвестные реакции $\vec{R}_D$ и $\vec{X}_E$. В данном случае такой точкой является точка D (рисунок 43). Моменты реакций $\vec{R}_D$ и $\vec{X}_E$ относительно этой точки равны нулю и в проверочное уравнение войдут активные силы и искомые реакции R_K и $У_{\mathrm{E}}$.

$$\Sigma M_{\mathrm{D}}(\overline{F}_{\mathrm{k}}) = Q \cdot a + У_{\mathrm{E}} \cdot 2a - M + R_{\mathrm{K}} \cdot 6a - F \cdot \cos 30^0 \cdot 8a = 0.$$

Поделим это уравнение на величину a и подставим в него найденные реакции и заданные силы, получим

$$8 - 12{,}39 \cdot 2 - 8/2 + 10{,}39 \cdot 6 - 6 \cdot \sqrt{3} \cdot 8/2 =$$

$$70{,}34 - 70{,}35 = 0{,}01 \approx 0.$$

С относительной погрешностью менее 0,1% уравнение моментов удовлетворяется тождественно, что свидетельствует о правильности определения реакций R_{K} и $У_{\mathrm{E}}$.

О т в е т ы: $R_{\mathrm{K}} = 10{,}39$ кН, $У_{\mathrm{E}} = -12{,}39$ кН.

Примечание 1. При определении реактивного момента в жесткой заделке ее заменяют неподвижным шарниром и реактивным моментом (рисунок 44).

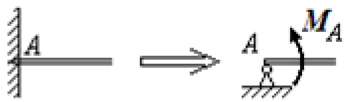


Рисунок 44 – Замена жесткой заделки

Примечание 2. При определении вертикальной реакции в жесткой заделке ее заменяют скользящей заделкой, допускающей только вертикальное перемещение и вертикальной реакцией (рисунок 45).

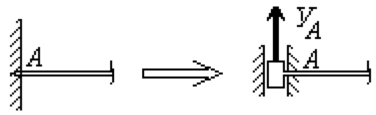


Рисунок 45– Скользящая заделка

Библиографический список

Основная литература

1. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Учеб. пособие для вузов: 13-е изд., исправ. - М.: Интеграл-Пресс, 2006. - 603с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов / С.М.Тарг. -15-е изд., стер. - М.: Высш. шк., 2005. - 415 с.
3. Бутенин Н.В. и др. Курс теоретической механики: Учеб.пособие для студ-ов вузов по техн.спец.: В 2-х т./ Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. СПб.: Лань. -5-е изд., испр. -1998. -729 с.
4. Диевский В.А. Теоретическая механика: Учеб. пособие. 3-е изд., испр. – СПб.: Изд-во «Лань», 2009. – 320 с.
5. Диевский В.А. Теоретическая механика. Сборник заданий: Учеб. пособие. 2-е изд., испр. / В.А. Диевский, И.А. Малышева – СПб.: Изд-во «Лань», 2009. – 192 с.
6. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике: Учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по техн.спец. / И.В. Мещерский; Под ред. В.А. Пальмова, Д.Д. Меркина. -45-е изд., стер. - СПб. и др.: Лань, 2006. - 447 с.
7. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособие для студ.втузов / [А.А. Яблонский, С. С.Норейко,С.А.Вольфсон и др.]; Под общ. ред. А. А. Яблонского. - 11-е изд., стер. - М.: Интеграл- Пресс, 2004. - 382 с.

Дополнительная литература

1. Бать М.И и др. Теоретическая механика в примерах и задачах. Учеб. пособ. для вузов. В 2-х т. / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон.-9-е изд., перераб. - М.: Наука,1990. - 670 с.
2. Курс теоретической механики: Учебник для вузов по направлению подгот.дипломир.специалистов в области техники и технологии/ [В.И.Дронг, В.В.Дубинин,М.М., Ильин и др.]; Под ред.К.С.Колесникова. -3-е изд., стер. М. : Изд- во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. -735 с.- (Механика в техническом университете: В 8 т.; Т.1)
3. Павловский М.А. и др. Теоретическая механика. Динамика: Учеб. для втузов / М.А. Павловский, Л.Ю. Акинфиева, О.Ф. Бойчук; Под общ. ред. М.А. Павловского. - Киев: Выща. шк.,1990. - 479 с.
4. Цывильский В.Л. Теоретическая механика: Учебник для втузов. - М.: Высшая школа, 2001. - 318 с.

Приложение А

Вопросы по темам 1,2
Введение в динамику. Законы динамики

1. Инертность тел. Количественная мера инертности материального тела.
2. Понятие материальной точки.
3. Закон инерции. Инерциальные системы отчета.
4. Второй закон динамики для свободной и несвободной материальной точки.
5. Закон равенства действия и противодействия.
6. Задачи динамики точки.
7. Системы единиц.
8. Понятие силы тяжести.
9. Понятие силы трения скольжения.
10. Понятие силы упругости.
11. Понятие силы вязкого трения.

Составление и интегрирование дифференциальных уравнений движения точки.

1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в координатной форме.
2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси естественного трехгранника.
3. Решение первой задачи динамики.
4. Общее решение второй задачи динамики в случае прямолинейного движения точки.
5. Общее решение второй задачи динамики в случае движения точки на плоскости.
6. Общее решение второй задачи динамики в случае движения точки в пространстве.
7. Начальные условий в случае прямолинейного движения точки.
8. Начальные условий в случае движения точки в плоскости.
9. Начальные условий в случае движения точки в пространстве.
10. Частное решение второй задачи динамики в случае прямолинейного движения точки.
11. Частное решение второй задачи динамики в случае движения точки на плоскости.
12. Частное решение второй задачи динамики в случае движения точки в пространстве.
13. Последовательность решения второй задачи динамики.

Приложение Б

Вопросы по теме 3

Общие теоремы динамики точки

1. Понятие количества движения точки.
2. Физический смысл количества движения точки.
3. Физический смысл импульса силы.
4. Понятие элементарного импульса силы.
5. Понятие импульса силы за конечный промежуток времени.
6. Вычисления импульса постоянной силы.
7. Теорема об изменении количества движения точки в дифференциальной форме.
8. Теорема об изменении количества движения точки в конечной форме.
9. Теорема об изменении количества движения точки в конечной форме в проекции на осьПонятие момента количества движения точки относительно центра. Понятие момента количества движения точки относительно оси.
12. Теорема об изменении момента количества движения точки относительно оси.
13. Следствие из теоремы моментов.
14. Физический смысл работы силы.
15. Понятие элементарной работы силы.
16. Формулы для вычисления элементарной работы силы.
17. Вычисление работы силы на конечном перемещении точки.
18. Вычисление работы постоянной силы.
19. Вычисление работы силы тяжести
20. Вычисление работы силы упругости пружины.
21. Вычисление работы силы трения.
22. Понятие кинетической энергии точки.
23. Терема об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме.
24. Терема об изменении кинетической энергии точки в конечной форме.
25. Теорема об изменении кинетической энергии точки в конечном виде при несвободном движении (случай движения без трения)
26. Физический смысл мощности.
27. Формула для вычисления мощности.
28. Мощность при равномерной работе.

Приложение В

Вопросы по темам 4,5,6

Прямолинейные колебания точки

1. Восстанавливающая сила.
2. Свободные колебания точки без учета силы сопротивления.
3. Дифференциальное уравнение свободных колебаний точки без учета силы сопротивления.
4. Две формы общего решения дифференциального уравнения свободных колебаний точки без учета силы сопротивления.
5. Понятие амплитуды и фазы свободных колебаний точки.
6. Понятие круговой частоты и периода свободных колебаний точки.
7. Свойства свободных колебаний точки.
8. Влияние постоянной силы на свободные колебания точки.
9. Определение свободных колебаний точки с учетом сил сопротивления.
10. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний точки.
11. Общее решение дифференциального уравнения затухающих колебаний точки.
12. Вынужденные колебания при отсутствии сопротивления.
13. Резонанс.

Относительное движение точки

1. Основной закон динамики относительного движения материальной точки.
2. Понятие кориолисовой и переносной сил инерции.
3. Основной закон динамики относительного движения точки при переносном поступательном движении.
4. Принцип относительности классической механики.
5. Уравнение относительного покоя.

Введение в динамику механической системы

1. Понятие механической системы.
2. Внешние и внутренние силы и их свойства.
3. Масса системы. Центр масс системы.
4. Понятие осевого момента инерции системы (тела).
5. Радиус инерции.
6. Моменты инерции некоторых однородных тел (стержня, кольца, круглой пластинки).
7. Теорема Гюйгенса.
8. Дифференциальные уравнения движения механической системы.

Приложение Г

Вопросы по темам 7,8,9,10

Общие теоремы динамики системы

Теорема о движении центра масс

1. Теорема о движении центра масс механической системы.
2. Дифференциальные уравнения движения центра масс системы в проекциях на оси декартовой системы координат. Закон сохранения движения центра масс системы.

Теорема об изменении количества движения системы

1. Понятие количества движения системы.
2. Вычисление главного вектора количества движения системы через скорость ее центра масс.
3. Теорема об изменении количества движения системы в дифференциальной форме.
4. Теорема об изменении количества движения системы в интегральной (конечной) форме.
5. Закон сохранения количества движения системы.

Теорема об изменении главного момента количества движения системы

1. Понятие главного момента количества движения (кинетического момента) системы относительно центра и оси.
2. Кинетический момент вращающегося тела.
3. Теорема моментов для механической системы относительно центра и оси.
4. Закон сохранения кинетического момента системы (общий случай).
5. Закон сохранения кинетического момента вращающейся системы.

Теорема об изменении кинетической энергии системы

1. Понятие кинетической энергии системы.
2. Вычисление кинетической энергии тела при его поступательном и вращательном движениях.
3. Вычисление кинетической энергии тела при его плоском движении.
4. Работа сил тяжести, действующих на механическую систему.
5. Работа сил, приложенных к вращающемуся телу.Работа сил трения, действующих на катящееся колесо.Теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме.
8. Теорема об изменении кинетической энергии системы в интегральной (конечной) форме.
9. Теорема об изменении кинетической энергии системы (случай неизменяемой системы).
10. Теорема об изменении кинетической энергии системы (случай системы с идеальными связями).

Приложение Д

Вопросы по темам 11,12

Потенциальное силовое поле

1. Понятие силового поля и силовой функции.
2. Понятие потенциального силового поля и основное его свойство.
3. Выражение проекций силы через силовую функцию.Определение потенциальной энергии точки и системы и ее физический смысл.
5. Выражения потенциальной энергии для некоторых потенциальных силовых полей (сил тяжести, сил упругости)
6. Закон сохранения механической энергии.
7. Понятие диссипативных систем и диссипативных сил.

Динамика твердого тела

1. Дифференциальные уравнения поступательного движения тела.
2. Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела.
3. Физический маятник.
4. Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.

Приложение Е

Вопросы по темам 13,14

Принципы механики

Принцип Даламбера

1. Понятие силы инерции точки.
2. Принцип Даламбера для материальной точки.
3. Принцип Даламбера для механической системы.
4. Понятие главного вектора сил инерции механической системы.
5. Понятие главного момента сил инерции механической системы относительно центра.
6. Вычисление главного вектора сил инерции механической системы.
7. Вычисление главного момента сил инерции механической системы относительно центра.
8. Приведение сил инерции механической системы к простейшему виду при ее поступательном движении.
9. Приведение сил инерции механической системы к простейшему виду при ее вращательном движении.
10. Приведение сил инерции механической системы к простейшему виду при ее плоском движении.

Принцип возможных перемещений и общее уравнение динамики

1. Стационарные и нестационарные связи.
2. Геометрические и кинематические связи.
3. Интегрируемые и неинтегрируемые связи.
4. Голономные и неголономные связи.
5. Удерживающие и неудерживающие связи.
6. Понятие возможных перемещений точки.
7. Число степеней свободы системы.
8. Понятие возможных перемещений механической системы.
9. Понятие идеальных связей.
10. Принцип возможных перемещений.
11. Общее уравнение динамики.

Приложение Ж

Вопросы по темам 15,16

Элементы аналитической механики.

1. Понятие обобщенных координат
2. Понятие обобщенных скоростей.
3. Понятие обобщенных сил.
4. Вычисление обобщенных сил.
5. Вычисление потенциальных обобщенных сил.
6. Условия равновесия системы в обобщенных координатах.
7. Уравнения Лагранжа 2-го рода.
8. Уравнения Лагранжа 2-го рода (случай потенциальных сил).

Элементарная теория удара

1. Основные определения теории удара.
2. Основное уравнение теории удара.
3. Основные выводы в теории удара.
4. Теорема об изменении количества движения системы при ударе.
5. Теорема об изменении главного момента количества движения системы (теорема моментов) при ударе.
6. Определение коэффициента восстановления при ударе.
7. Экспериментальное определение коэффициента восстановления при ударе.
8. Предельные случаи. Абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары.
9. Прямой центральный удар двух тел (удар шаров).
10. Теорема Карно.

Приложение Е.

Образец титульного листа

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ДИНАМИКЕ

Вариант №_____

Выполнил студент группы №_____________

____
Ф.И.О.

Семестр ____________20__/20__ учеб. года.
(весенний, осенний)

Принял ______________________________________

Тюмень, 2014