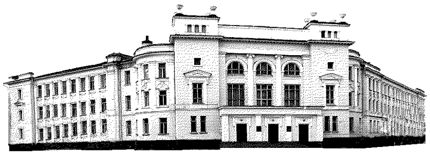
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ



ТЮМЕНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ

КАФЕДРА "СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА"

СЕКЦИЯ "СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ"

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ.

СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ.

ДЛЯ СТУДЕНТОВ ДНЕВНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

290300 – "ПРОМЫШЛЕННОЕ И ГРАЖДАНСКОЕ СТРОИТЕЛЬСТВО"

Тюмень – 2004 год

Методические указания по теме "Расчеты на прочность и жесткость при центральном растяжении-сжатии. Статически определимые задачи" разработаны ассистентами Огородновой Ю.В. и Воронцовым В.В.

Методические указания предназначены для студентов второго курса специальности ПГС.

Тюмень, ТюмГАСА, 2004 г., методические указания – издание 1.

Рецензент: к.ф-м.н., доцент Е.Ю. Куриленко

Учебно-методический материал утвержден на заседании кафедры:

Протокол № ______ от "____" ___________________ 2004 г.

Учебно-методический материал утвержден УМС академии:

Протокол № ______ от "____" ___________________ 2004 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

ВВЕДЕНИЕ

<u>*Центральное (осевое) растяжение-сжатие*</u> –это такой вид напряженно-деформированного состояния, при котором все нагрузки (сосредоточенные силы, распределенные нагрузки) лежат на оси стержня (рис. 1, а).

К конструкциям, работающим на центральное растяжение-сжатие, относятся: колонны, стойки, столбы, элементы ферм, элементы подкрановых конструкций (подвески), элементы строповки строительных конструкций и т.д.

Расчет и проектирование любой конструкции или ее элемента начинается с определения возникающих в ней под действием нагрузки внутренних усилий. При центральном растяжении-сжатии возникает только одно внутреннее усилие –продольная сила N [кН]. Напомним правило знаков: продольная сила считается положительной, если она вызывает растяжение стержня (направлена от рассматриваемого сечения), в противном случае она считается отрицательной (рис. 1, б).

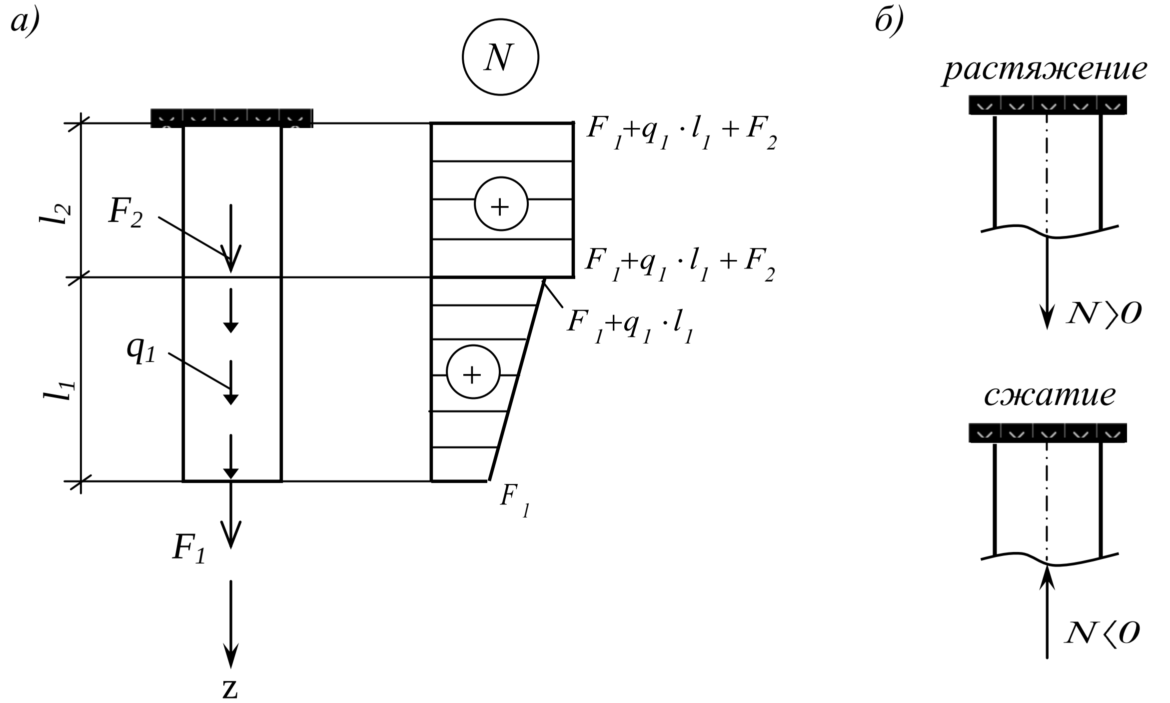


Рис. 1

Для того, чтобы правильно запроектировать конструкцию необходимо произвести расчеты на прочность и жесткость, а в некоторых случаях и на устойчивость.

Прочность –это способность конструкции не разрушаться под действием нагрузки. Прочность –это, прежде всего характеристика материала. Ведь одна и та же конструкция, например колонна, под действием одних и тех же нагрузок, но изготовленная из разных материалов, будет иметь разную прочность.

Жесткость – это способность конструкции не деформироваться под действием нагрузки.

Устойчивость – это способность конструкции сохранять вплоть до разрушения первоначальную форму равновесия.

Расчет на прочность сводится к требованию, чтобы наибольшие напряжения в элементах конструкции не превышали некоторой допустимой для данного материала величины. То есть при расчете на прочность нужно определить максимальное по абсолютной величине напряжение и сравнить его с нормируемой (заданной) величиной.

Напряжение – это внутреннее усилие, распределенное по площади сечения элемента, т.е. это величина внутреннего усилия, отнесенная к единице площади.

В поперечных сечениях стержней могут возникать два вида напряжений: нормальные, направленные по нормали к сечению, и касательные, направленные по касательной к сечению. Изучение данных напряжений выявило, что при центральном растяжении-сжатии в поперечных сечениях стержней касательные напряжения равны нулю.

Нормальные напряжения $\sigma_z \left[\frac{МН}{м^2} = МПа\right]$ в произвольном поперечном сечении конструкции (стержня) при растяжении - сжатии определяются по формуле:

$$\sigma_z = \frac{N}{A}, \tag{1}$$

где: N, $[МН]$ - значение продольной силы в рассматриваемом поперечном сечении; A, $[м^2]$ - площадь рассматриваемого поперечного сечения. Правило знаков для напряжений совпадает с правилом для продольных сил: сжимающие напряжения – отрицательные, растягивающие – положительные.

Поперечное сечение стержня, в котором возникает наибольшее по абсолютной величине напряжение, называется *опасным сечением*.

Рассмотрим стержень, защемленный одним концом и загруженный растягивающей силой F (рис. 2.).

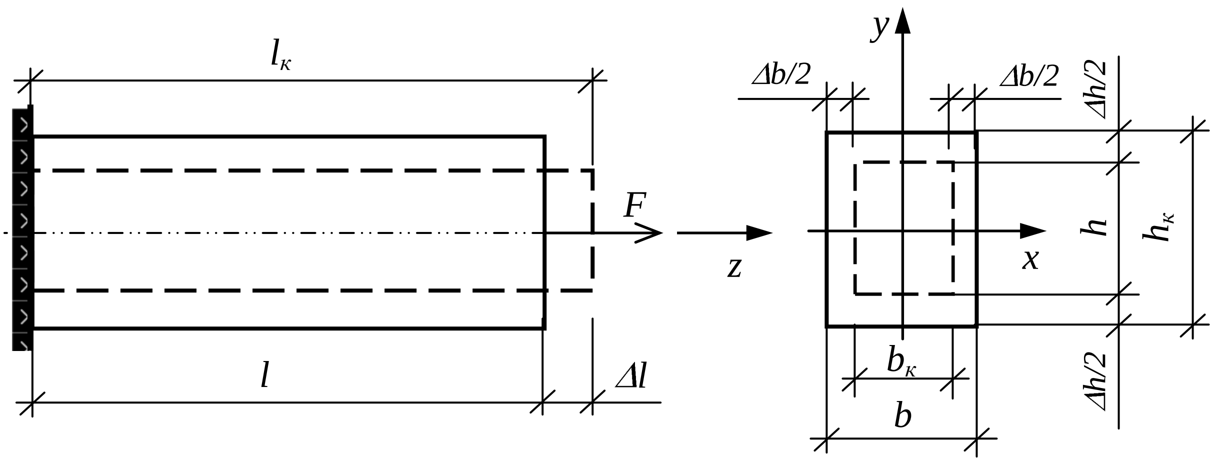


Рис. 2

В результате действия нагрузки длина стержня увеличится на величину $\Delta l = l_к - l$, которая называется ***абсолютной продольной деформацией*** или ***удлинением*** стержня.

Из определения относительной линейной деформации следует:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{прод} = \frac{\Delta l}{l}, \qquad (2)$$

где l [м] - длина стержня до приложения нагрузки; $l_к$ [м] - длина стержня после приложения нагрузки.

Кроме продольной деформации стержень испытывает на себе и поперечные деформации, которые определяются по формулам:

$$\Delta b = b_к - b, \quad \Delta h = h_к - h, \qquad (3)$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{попер} = -\frac{\Delta b}{b}, \ \ \varepsilon_y = \varepsilon_{попер} = -\frac{\Delta h}{h}, \qquad (4)$$

где $\Delta b, \Delta h$ [м] - абсолютные поперечные деформации; где $b, \ h$ [м] - соответственно ширина и высота сечения до приложения к стержню нагрузки;

$b_к$, $h_к$ $[м]$ - соответственно ширина и высота сечения после приложения нагрузки. Знак "минус" в формулах (4) указывает на уменьшение размера (укорочение).

Как показывают эксперименты, между продольными и поперечными деформациями существует линейная зависимость:

$$\varepsilon_{прод.} = -\nu \cdot \varepsilon_{попер}, \text{ или } \varepsilon_z; \quad \varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_x, \qquad (5)$$

где: ν – коэффициент Пуассона (безразмерная величина), зависит от материала стержня, $0 \le \nu \le 0{,}5$.

Согласно одной из гипотез механики деформируемого твердого тела, между напряжениями и деформациями существует линейная зависимость (закон Гука, 1676 г.):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \qquad (6)$$

где: E – модуль упругости $[МПа]$, механическая характеристика материала.

Если подставить в формулу (6) выражения (1) и (2), то можно получить другую форму записи закона Гука:

$$\frac{N}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l},$$

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \qquad (7)$$

Величина EA $[кН]$ называется *жесткостью при растяжении-сжатии*.

Все конструкции промышленных и гражданских зданий и сооружений рассчитываются *методом предельных состояний*.

Предельным называется состояние, при котором конструкция перестает удовлетворять требованиям эксплуатации.

В строительных нормах и правилах (СНиП) установлены 2 группы предельных состояний.

I группа предельных состояний – непригодность к эксплуатации в результате потери несущей способности – прочности или устойчивости (расчет на прочность).

__II группа предельных состояний__ – непригодность к нормальной эксплуатации вследствие возникновения чрезмерно больших деформаций или колебаний сооружения (расчет на жесткость).

В сооружении не должно возникать ни одно предельное состояние, только тогда будет обеспечиваться его надежность.

Как уже отмечалось выше, для грамотного проектирования и расчета любой конструкции необходимо произвести ее расчет на прочность и жесткость. Для этого необходимо проверить выполнение двух условий: условия прочности и условия жесткости.

Условие прочности заключается в том, чтобы максимальные напряжения, возникающие в сечениях стержня, не превышали некоторой заданной нормами предельной величины, которая зависит от материала стержня. Условие жесткости требует, чтобы максимальные деформации стержня не превышали некоторой предельной величины, которая зависит от ответственности конструкции здания, то есть от ее роли в работе сооружения.

__Условие прочности при центральном растяжении – сжатии__ имеет вид:

$$\sigma_z^{max} \le R \cdot \gamma_c , \tag{8}$$

где σ^{max} $[МПа]$ - максимальные нормальные напряжения, возникающие в поперечном сечении стержня; R $[МПа]$ - расчетное сопротивление материала стержня; γ_c - коэффициент условий работы конструкции здания. В дальнейшем, во всех задачах будем принимать коэффициент $\gamma_c = 1$.

__Условия жесткости при центральном растяжении – сжатии__ могут иметь следующие записи:

$$\Delta l^{max} \le [\Delta l] , \tag{9}$$

$$\Delta b^{max} \le [\Delta b] , \tag{10}$$

$$\Delta h^{max} \le [\Delta h] , \tag{11}$$

$$\varepsilon^{max} \le [\varepsilon] , \tag{12}$$

где Δl^{max}, Δb^{max}, Δh^{max} - максимальные абсолютные деформации стержня, $[\mu]$; $[\Delta l]$, $[\Delta b]$, $[\Delta h]$ - предельные значения для деформаций стержня, зависящие от вклада конструкции в работу здания, $[\mu]$; ε^{max} - максимальная относительная деформация стержня; $[\varepsilon]$ - предельно допустимое значение для абсолютной деформации стержня.

Расчет на прочность (жесткость) включает в себя следующие типы задач:

1. *Проверка прочности (жесткости) стержня* – по заданной нагрузке и заданным размерам стержня проверяется его прочность (жесткость).
2. *Проектирование стержня (подбор сечения)* – по заданной нагрузке и материалу стержня подбираются его размеры, удовлетворяющие условию прочности (жесткости).
3. *Определение грузоподъемности стержня* – по заданным размерам и материалу стержня подбирается нагрузка, которую он способен выдержать не разрушаясь.

I. РАСЧЕТЫ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕЙ.

I.I. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ.

Статически определимый стержень – это стержень, который можно рассчитать, используя только уравнения равновесия (уравнения статики).

В любой науке, которая называется «точной» и в которой используются аналитические методы описания состояний и явлений, не обойтись без моделей. В нашем случае при решении различных задач мы каждый раз будем выбирать для рассматриваемого объекта расчетную схему.

Расчетная схема – это упрощенная схема конструкции или ее элементов, освобожденная от несущественных в данной задаче особенностей. При этом расчетная схема должна отражать все наиболее существенное для характера работы данной конструкции и не содержать второстепенных факторов, мало влияющих на результаты ее расчета. Построение и обоснование расчетной схемы – ответственный этап проектирования и расчета конструкции.

Перейдем к рассмотрению конкретных примеров.

ПРИМЕР 1.

Чугунная труба-стойка высотой $H = l = 3м$ с наружным диаметром $D = 25см$ и внутренним диаметром $d = 20см$ нагружена сжимающей силой $F = 50т$, модуль упругости чугуна $E = 1 \cdot 10^5 МПа$. Найти напряжение σ_z в поперечном сечении колонны, абсолютное Δl и относительное укорочения ε_z.

Как уже говорилось выше, решение задачи начинается с выбора расчетной схемы. В данном случае стойка изображается как вертикальный стержень длиной $H = l = 3м$, жестко закрепленный в нижней части (условное изображение фундамента или земли). К верхней части стержня приложена сосредоточенная сжимающая сила (направление к стержню). При этом линия действия силы должна совпадать с осью стержня. Кроме того, рядом необходимо изобразить поперечное сечение стойки с указанием основных размеров. В данном примере – это кольцо. Расчетная схема для решения задачи изображена на рис. 3, а.

Далее строим эпюру продольной силы и определяем максимальное внутреннее усилие, возникающее в колонне. Поскольку внешняя нагрузка постоянна по высоте, то возникает только одна сжимающая продольная сила $N^{max} = -F = -50т = -500кН$.

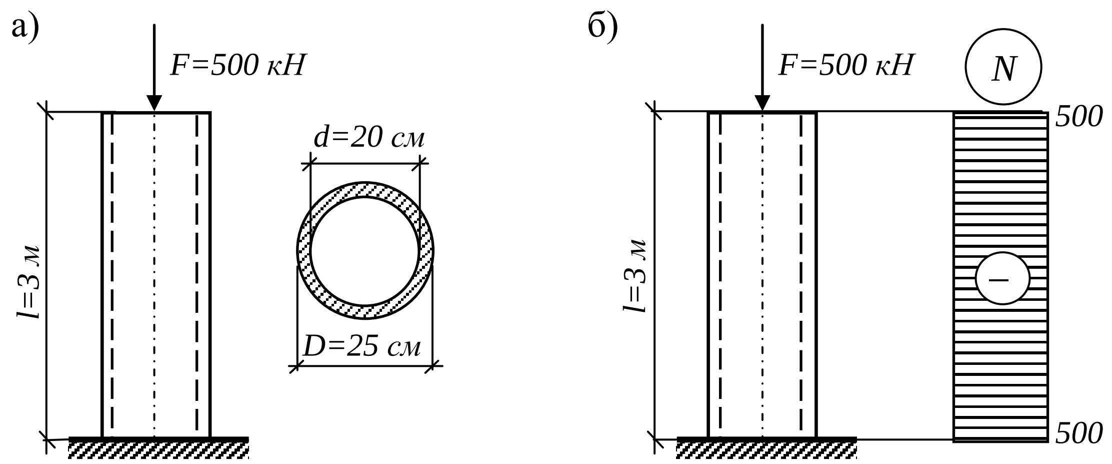


Рис. 3.

Максимальное нормальное напряжение $\sigma_z^{max}\ [МПа]$ определяется по формуле (1):

$$\sigma_z^{max} = \frac{N^{max}}{A}, \tag{13}$$

где $A\ [м^2]$ – площадь трубы:

$$A = \frac{\pi\left(D^2 - d^2\right)}{4} = \frac{3{,}14\cdot 10^{-4}\left(25^2 - 20^2\right)}{4} = 176{,}6\cdot 10^{-4}\ м^2.$$

тогда:

$$\sigma_z^{max} = \frac{500\cdot 10^{-3}\ МН}{176{,}6\cdot 10^{-4}\ м^2} = 28{,}3МПа.$$

Абсолютное и относительное укорочения стойки определяем по формулам (7) и (2):

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = -\frac{500\cdot 10^{-3}\ МН\cdot 3м}{1\cdot 10^5\ МПа\cdot 176{,}6\cdot 10^{-4}\ м^2} = -8{,}5\cdot 10^{-4}\ м;$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = -\frac{-8{,}5\cdot 10^{-4}\ м}{3м} - 2{,}8\cdot 10^{-4}.$$

Знак "минус" обозначает уменьшение размера (укорочение).

ПРИМЕР 2.

Стальной стержень круглого сечения растягивается усилием $F = 10т$. Относительное удлинение не должно превышать $\frac{1}{2000}$, а напряжение – $1200кг/см^2$. Найти наименьший диаметр, удовлетворяющий этим условиям, если модуль упругости стали $E = 2 \cdot 10^5 МПа$. Как и ранее, решение задачи начинается с изображения расчетной схемы и построения эпюра продольных сил (рис. 4).

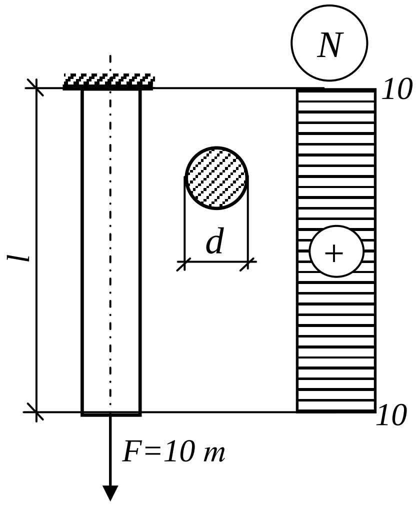


Рис. 4.

По условию задачи напряжение не должно превышать $1200кг/см^2$, в связи с чем данная величина может быть принята за расчетное сопротивление материала стойки на растяжение, то есть $R_{раст} = 1200кг/см^2 = 120МПа$. По аналогии заданное относительное удлинение можно принять за предельно допустимое для данной стойки, то есть $[\varepsilon] = \frac{1}{2000}$. В результате необходимо подобрать диаметр стойки, удовлетворяющий условию прочности и условию жесткости.

Условие прочности при центральном растяжении-сжатии имеет вид:

$$\sigma^{max} \le R_{раст}. \qquad (14)$$

Продольное растягивающее усилие равно по величине внешней нагрузке, действующей на стержень $N = 10т = 0{,}1МН$. Подставляя теперь в формулу (14) формулу (1), получим:

$$\frac{N^{max}}{A} \leq R_{раст}.$$

Отсюда требуемая площадь поперечного сечения колонны из условия прочности будет определяться выражением:

$$A_{тр} = \frac{N}{R_{раст}} = \frac{0{,}1МН}{120МПа} = 8{,}3 \cdot 10^{-4}\, м^2.$$

Зная требуемую площадь, выразим необходимый из условия прочности диаметр:

$$A_{тр} = \frac{\pi d_{тр}^2}{4}, \Rightarrow \quad d_{тр} = \sqrt{\frac{4A_{тр}}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 8{,}3 \cdot 10^{-4}\, м^2}{3{,}14}} = 0{,}032м = 3{,}2см.$$

Условие жесткости при центральном растяжении-сжатии:

$$\varepsilon^{max} \leq [\varepsilon]. \tag{15}$$

Подставляя теперь в формулу (15) выражения (2) и (7), получим:

$$\frac{\Delta l^{max}}{l} \leq \frac{1}{2000}, \quad \frac{Nl}{EAl} \leq \frac{1}{2000},$$

$$\frac{N}{EA} \leq \frac{1}{2000}. \tag{16}$$

Выражаем из предельного неравенства (16) требуемую из условия жесткости площадь поперечного сечения:

$$A_{тр} = \frac{2000N}{E} = \frac{2000 \cdot 0{,}1МН}{2 \cdot 10^5 МПа} = 100 \cdot 10^{-5}\, м^2 = 0{,}001м^2.$$

Диаметр стойки из условия жесткости определим по формуле:

$$d_{тр} = \sqrt{\frac{4A_{тр}}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}001м^2}{3{,}14}} = 0{,}036м = 3{,}6см.$$

Окончательно принимаем из двух диаметров **больший**, $d = 3{,}6см.$

ПРИМЕР 3.

Определить грузоподъемность и удлинение балки, если $R = 160МПа$; $A = 12см^2$; $E = 2 \cdot 10^5 МПа$.

Расчетная схема бруса и эпюра продольных сил изображены на рис. 5.

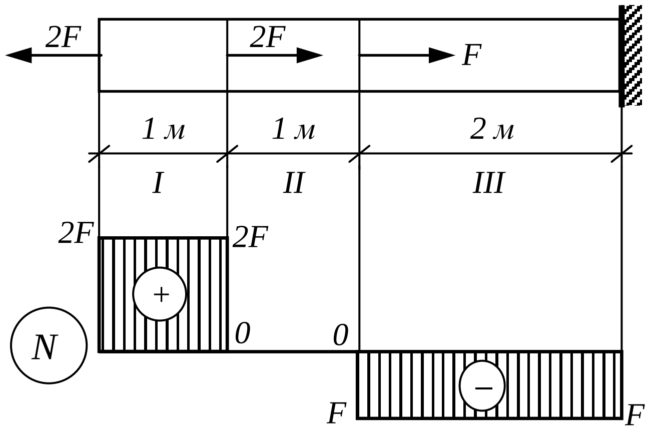


Рис. 5.

<u>*Грузоподъемность бруса*</u> – это максимальная нагрузка, которую он может выдержать, не разрушаясь. Таким образом, необходимо определить требуемую нагрузку из условия прочности:

$$\sigma_z^{max} \le R \;\; или \;\; \frac{N^{max}}{A} \le R. \tag{17}$$

Согласно эпюре $N^{max} = 2F$, тогда условие прочности примет вид:

$$\frac{2F}{A} \le R. \tag{18}$$

Отсюда грузоподъемность бруса будет равна:

$$F = \frac{R \cdot A}{2}, \tag{19}$$

$$F = \frac{160 \cdot 10^3 \, [кПа] \cdot 12 \cdot 10^{-4} \, [м^2]}{2} = 96 кН = 9600 кг.$$

Для определения удлинения стержня Δl разбиваем его на участки. Участок, в пределах которого можно применять формулу (7), должен иметь постоянную жесткость EA и величину продольной силы. Таким образом, для данного бруса получаем три участка (на рис. 5 они обозначены римскими цифрами), тогда абсолютная деформация в общем виде будет определяться выражением:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3, \tag{20}$$

в котором каждое слагаемое определяется отдельно по формуле (7):

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} + \frac{N_3 \cdot l_3}{E_3 \cdot A_3}, \tag{21}$$

где $N_1,\ N_2,\ N_3$ - значения продольных сил соответственно на первом, втором и третьем участках; $l_1,\ l_2,\ l_3$ - длины соответственно первого, второго и третьего участков; $E_1,\ E_2,\ E_3$ - значения модулей упругости материалов бруса для каждого участка; $A_1,\ A_2,\ A_3$ - площади поперечных сечений стержня на первом, втором и третьем участках.

Поскольку жесткости всех трех участков одинаковые (балка изготовлена из одного материала и имеет постоянное по всей длине поперечное сечение), можно обозначить $E_1A_1 = E_2A_2 = E_3A_3 = EA$ и вынести этот множитель за скобки. В результате получим выражение (21) в виде:

$$\Delta l = \frac{1}{E \cdot A}\left(N_1 \cdot l_1 + N_2 \cdot l_2 + N_3 \cdot l_3\right) \tag{22}$$

$$\Delta l = \frac{1}{2 \cdot 10^8 \cdot 12 \cdot 10^{-4}}\left(2F \cdot 1 + 0 \cdot 1 - F \cdot 2\right) = 0,$$

где $N_1 = 2F кН$, $N_2 = 0 кН$, $N_3 = -F кН$, $l_1 = l_2 = 1 м$, $l_3 = 3 м$.

I.2. УЧЕТ СОБСТВЕННОГО ВЕСА.

До сих пор при рассмотрении растяжения-сжатия стержня принималась во внимание только внешняя нагрузка. Если длина стержня велика, и он изготовлен из массивного материала (камень, бетон), то его собственный вес может вызвать значительные дополнительные напряжения, которые необходимо учитывать в расчетах.

В случае, когда ось бруса вертикальна, его собственный вес вызывает центральное растяжение (брус закреплен верхним концом, см. рис. 6) или сжатие (закреплен нижний конец бруса). На расчетных схемах собственный вес вертикальных брусьев представляют как равномерно распределенную вдоль оси бруса внешнюю нагрузку $q_\gamma\left[\frac{кН}{м}\right]$ (рис. 6), которая определяется по формуле:

$$q_\gamma = \gamma \cdot A, \tag{23}$$

где $\gamma\left[\frac{кн}{м^3}\right]$ - объемный (удельный) вес материала стержня; $A\,[м^2]$ - площадь поперечного сечения бруса.

Продольная сила $N_z\,[Н]$ в поперечном сечении $z-z$ бруса (рис. 6) (на расстоянии z от его нижнего конца) равна весу нижележащей части бруса, то есть

$$N_z = \gamma \cdot A \cdot z\,. \tag{24}$$

Максимальные нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса возникают на расстоянии $z = l$ от нижнего конца и определяются по формуле:

$$\sigma_z = \frac{N_{z=l}}{A} = \frac{\gamma \cdot A \cdot l}{A} = \gamma \cdot l \tag{25}$$

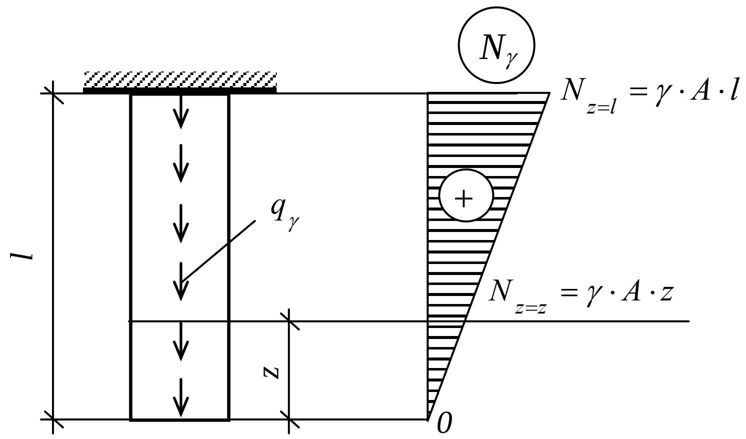


Рис. 6

Удлинение бруса Δl определяется выражением:

$$\Delta l = \frac{N_{q\gamma} \cdot l}{2EA} = \frac{q_\gamma l^2}{2EA} = \frac{\gamma \cdot A \cdot l^2}{2EA} = \frac{\gamma \cdot l^2}{2E}\,, \tag{26}$$

где $E\,[МПа]$ - модуль упругости материала бруса.

ПРИМЕР. 4.

Определить объем кладки мостовой опоры высотой *42 м,* нагруженной сжимающей силой *F=400 т,* для двух вариантов:

1 вариант - опора постоянного сечения;

2 вариант - опора ступенчатая из трех частей одинаковой высоты.

Объемный вес материала кладки $\gamma = 2{,}2т/м^3$, расчетное сопротивление материала кладки на сжатие $R_{сж} = 12кг/см^2$.

Объем кирпичной кладки вычисляется по формуле:

$$V = A \cdot H\,, \tag{27}$$

где $A\ [м^2]$ - площадь поперечного сечения столба; $H\ [м]$ - высота столба.

Таким образом, для решения задачи необходимо знать площади поперечных сечений мостовой опоры.

__1.ВАРИАНТ__. Расчетная схема и эпюра внутренних усилий для данного варианта изображена на рис. 7.

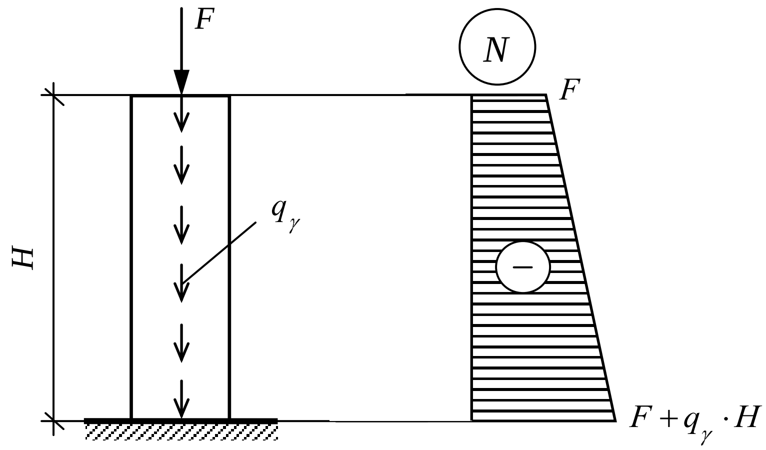


Рис. 7

Максимальная сжимающая продольная сила возникает у основания опоры и определяется выражением (для удобства будем подставлять значения внутренних усилий по абсолютной величине):

$$N^{max} = F + q_\gamma \cdot H = F + \gamma \cdot A \cdot H\,, \tag{28}$$

$$N^{max} = 4000 + 22 \cdot 42 \cdot A = 4000 + 924 \cdot A \quad [кН]. \tag{29}$$

Записываем условие прочности:

$$\sigma_z^{max} = \frac{N^{max}}{A} \le R_{сж} \tag{30}$$

Подставляя теперь в (30) выражение (29), а также значение $R_{сж} = 12\dfrac{кг}{см^2} = 1200\dfrac{кН}{м^2} = 1200кПа$ получим:

$$\frac{4000 + 924 \cdot A}{A} = 1200\,кПа. \qquad (31)$$

Отсюда требуемая площадь из условия прочности кладки на сжатие равна:

$$A = \frac{4000}{278} = 14{,}4\,м^2.$$

Объем кладки для первого варианта будет равен:

$$V_{1вар} = A \cdot H = 14{,}4 \cdot 42 = 604{,}8\,м^3.$$

2 ВАРИАНТ. Расчетная схема и эпюра внутренних усилий для данного варианта изображена на рис. 8.

Мостовая опора состоит из трех ступеней, высота каждой $h_1 = h_2 = h_3 = H / 3 = 14\,м$. Площади поперечных сечений ступеней соответственно A_1, A_2, A_3, в связи с чем в пределах каждой ступени от действия собственного веса будут возникать различные по величине продольные силы и напряжения.

Таким образом, для решения задачи необходимо рассмотреть условие прочности для каждой ступени отдельно.

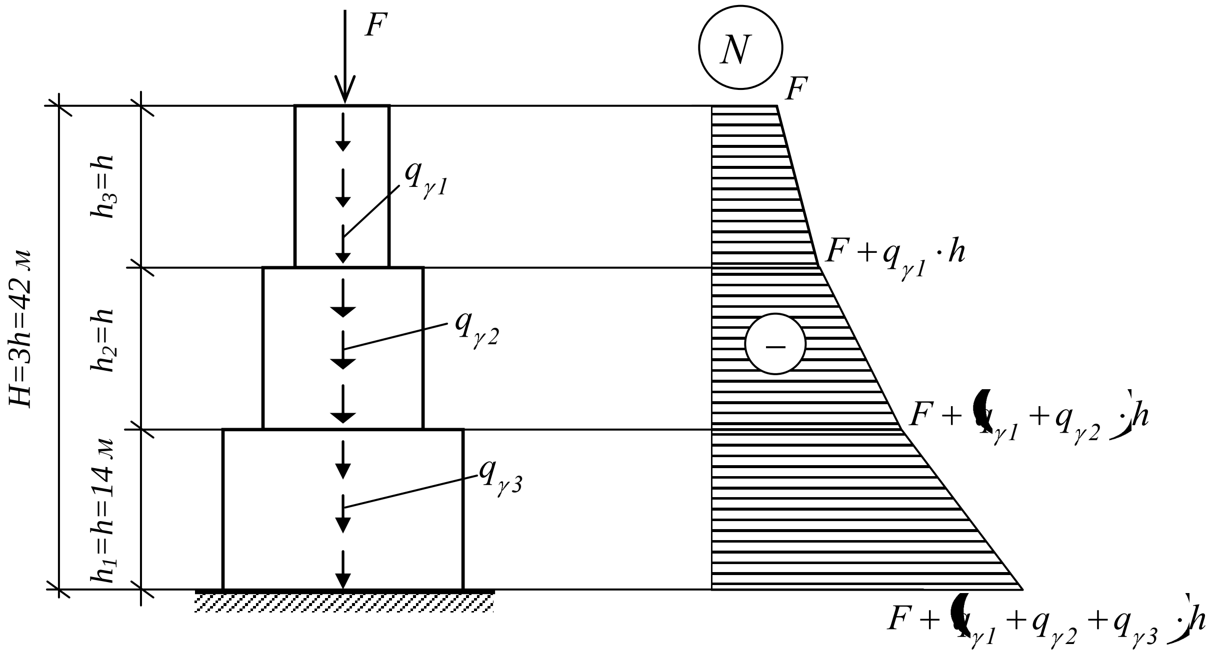


Рис. 8

1-я ступень. Максимальная сжимающая продольная сила для первой ступени (рис. 8):

$$N_1^{max} = F + q_{\gamma,1} \cdot h_1 = F + \gamma \cdot A_1 \cdot h_1, \qquad (32)$$

$$N_1^{max} = 4000 + 22 \cdot A_1 \cdot 14 = 4000 + 308 \cdot A_1 \quad [кН]. \qquad (33)$$

По аналогии с *вариантом 1*, записываем для первой ступени условие прочности и подставляем в него исходные данные и выражение (33):

$$\sigma_{z,1}^{max} \le R_{сж}, \qquad (34)$$

$$\frac{N_1^{max}}{A_1} = \frac{4000 + 308 A_1}{A_1} = 1200 кПа. \qquad (35)$$

Требуемая площадь первой ступени из выражения (35) равна:

$$A_1 = \frac{4000}{892} = 4,5 м^2.$$

2-я ступень. Максимальная сжимающая продольная сила для второй ступени (рис. 8):

$$N_2^{max} = F + q_{\gamma,1} \cdot h_1 + q_{\gamma,2} \cdot h_2 = F + \gamma \cdot A_1 \cdot h_1 + \gamma \cdot A_2 \cdot h_2 = F + \gamma \cdot h (A_1 + A_2), \qquad (36)$$

$$N_2^{max} = 4000 + 22 \cdot 14 (4,5 + A_2) = 4000 + 308 \cdot (4,5 + A_1) \; [кН]. \qquad (37)$$

Записываем для второй ступени условие прочности и подставляем в него исходные данные и выражение (37):

$$\sigma_{z,2}^{max} \le R_{сж}, \qquad (38)$$

$$\frac{N_2^{max}}{A_2} = \frac{4000 + 308 (4,5 + A_2)}{A_2} = 1200 кПа. \qquad (39)$$

Требуемая площадь второй ступени из выражения (39) равна:

$$A_2 = \frac{5386}{892} = 6,04 м^2.$$

3-я ступень. Максимальная сжимающая продольная сила для третьей ступени (рис. 8):

$$N_3^{max} = F + q_{\gamma,1} \cdot h_1 + q_{\gamma,2} \cdot h_2 + q_{\gamma,3} \cdot h_3 = F + \gamma \cdot h (A_1 + A_2 + A_3), \qquad (40)$$

$$N_3^{max} = 4000 + 308 \cdot (4,5 + 6,04 + A_3) = 4000 + 308 \cdot (10,54 + A_3) \; [кН]. \qquad (41)$$

Записываем для третьей ступени условие прочности, из которого по аналогии с предыдущими записями определяем требуемую площадь поперечного сечения:

$$\sigma_{z,3}^{max} \le R_{сж}, \tag{42}$$

$$A_3 = \frac{7246,3}{892} = 8,12 м^2.$$

Объем кладки мостовой опоры для второго варианта определяется выражением:

$$V_{2вар} = V_1 + V_2 + V_3 = h\left(A_1 + A_2 + A_3\right) = 14\left(4,5 + 6,04 + 8,12\right) = 261,2 м^3.$$

Таким образом, мостовая опора, состоящая из ступеней различной площади, выгоднее по расходу материала, чем опора постоянного по всей высоте сечения.

ПРИМЕР. 5.

Определить полное удлинение стержня, с учетом собственного веса, а также перемещение сечения *m-n*. Площадь поперечного сечения – A, модуль упругости – E, объемный вес материала - γ. Расчетная схема стержня изображена на рис. 9.

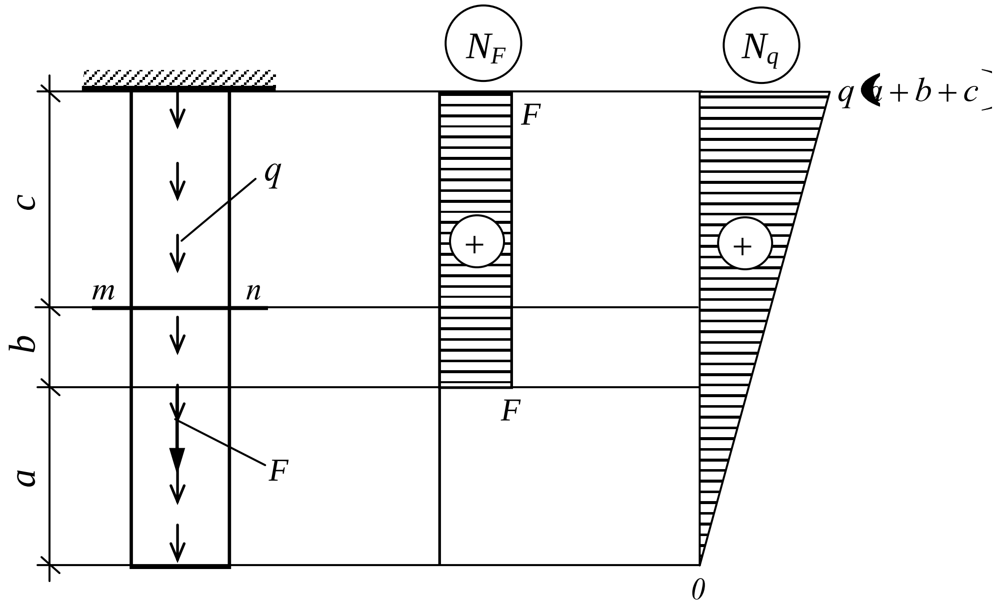


Рис. 9.

Для решения задачи используем принцип независимости действия сил, а именно: отдельно построим эпюры продольных сил от действия сосредоточенной силы F и от действия собственного веса, то есть от равномерно распределенной продольной нагрузки $q = \gamma \cdot A$. Расчетная схема и эпюры продольных сил N_F и N_q изображены на рис. 9.

Полное удлинение стержня Δl будет складываться из удлинения, полученного стержнем от действия сосредоточенной силы F и от действия собственного веса:

$$\Delta l = \Delta l_F + \Delta l_q . \tag{43}$$

Если подставить теперь вместо Δl_F формулу (7), а вместо Δl_q - формулу (26), то выражение (43) примет вид:

$$\Delta l = \frac{N_F \cdot l_F}{EA} + \frac{N_q \cdot l_q}{2EA} = \frac{F(a+c)}{EA} + \frac{\gamma \cdot A(a+b+c)^2}{2EA} = \frac{F(a+c)}{EA} + \frac{\gamma(a+b+c)^2}{2E} . \tag{44}$$

Для того, чтобы определить перемещение сечения *m-n* отбрасываем часть стержня ниже сечения *m-n,* а ее действие заменяем сосредоточенной силой F', равной продольной силе в сечении *m-n:*

$$F' = N_{m-n} = F + q(a+b). \tag{45}$$

В результате получаем новую расчетную схему, которая приведена на рис. 10.

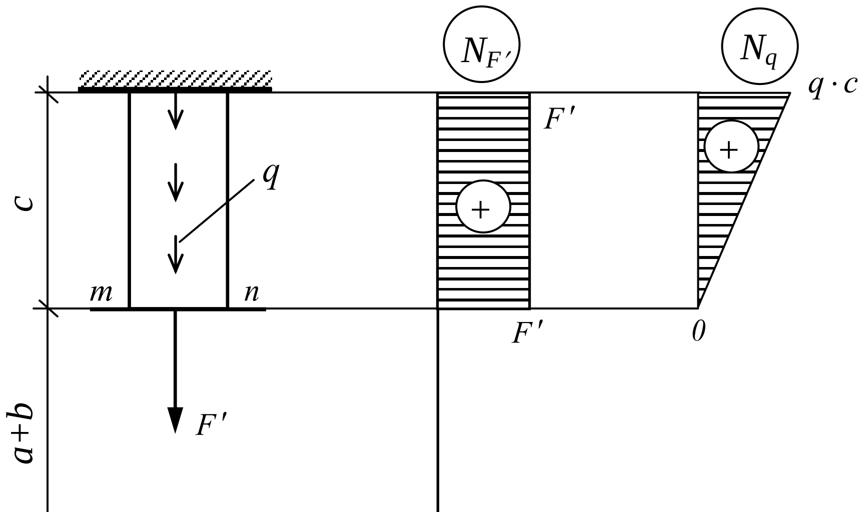


Рис.10.

А теперь решаем новую задачу о нахождении полного удлинения Δl_{m-n} уже для данного стержня (рис. 10):

$$\Delta l_{m-n} = \Delta l_{m-n,F'} + \Delta l_{m-n,q} , \tag{46}$$

$$\Delta l_{m-n} = \frac{N_{F'} \cdot l_{F'}}{EA} + \frac{N_q \cdot l_q}{2EA} = \frac{\left[F + q\left(a+b\right)\right]c}{EA} + \frac{\gamma \cdot A \cdot c^2}{2EA} = \frac{F \cdot c}{EA} + \frac{\gamma \cdot c\left(a+b\right)}{E} + \frac{\gamma \cdot c^2}{2E}. \quad (47)$$

II. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ.

Статически определимая стержневая система – это система, в которой все неизвестные реакции опор и внутренние усилия можно определить из уравнений равновесия (статики).

Для «решения» любой стержневой системы необходимо выделить в ней объект равновесия. В связи с этим, все системы можно разделить на два типа:

1 тип – системы, состоящие из абсолютно жестких (недеформируемых) стержней и одиночных невесомых (деформируемых) стержней. Для стержневых систем этого типа объектами равновесия являются недеформируемые стержни.

2 тип – системы, состоящие из нескольких деформируемых стержней, соединенных в одной точке. Точки соединения двух и более стержней называются узлами, которые и являются объектами равновесия для систем 2-го типа.

Все соединения в элементах систем шарнирные, однако существуют определенные правила, по которым вводятся реакции и усилия в стержнях:

- в шарнире, соединяющем абсолютно жесткий элемент системы с «землей» или с другой конструкцией, всегда возникают две реакции – горизонтальная H и вертикальная R;
- в шарнире, соединяющем деформируемый стержень с абсолютно жестким стержнем или с другой конструкцией, всегда возникает одна реакция, направленная вдоль этого стержня и равная по величине усилию, возникающему в нем.

<u>В абсолютно жестких стержнях никогда не возникает внутренних усилий, они не деформируются!</u>

- в шарнире, соединяющем несколько деформируемых стержней (узловой шарнире), возникают усилия, направленные вдоль этих стержней и сходящиеся в этом узле.

ПРИМЕР 6.

Рассмотрим стержневую систему, состоящую из абсолютно жесткого (недеформируемого) стержня AC, шарнирно закрепленного в точке A и невесомого (деформируемого) стержня BD, шарнирно закрепленного по концам, загруженную в точке C сосредоточенной силой F (рис. 11).

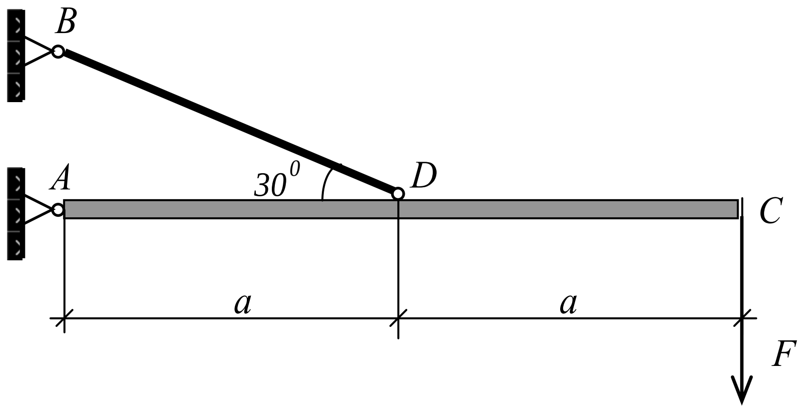


Рис. 11.

Объектом равновесия в данном случае будет являться стержень AC, для которого и будем составлять уравнения равновесия.

Под действием внешней нагрузки, на основании введенных выше правил, в точке A будут возникать две реакции R_A и H_A, а в стержне BD возникает усилие N_{BD}, направленное по стержню (рис. 12).

Определим несущую способность (грузоподъемность) заданной системы, то есть допустимую нагрузку F, если площадь сечения стержня $A_{BD} = 5 см^2$, расчетное сопротивление материала стержня $R = 200 МПа$.

Для этого можно составить следующие уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum M_A = 0. \end{cases} \tag{48}$$

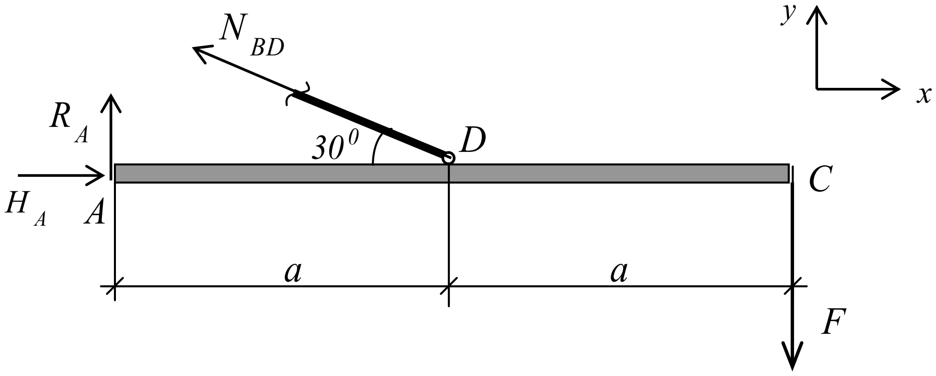


Рис. 12

Поскольку в конечном итоге решение задачи будет сводиться к определению усилия в стержне BD, то оставляем в рассмотрении уравнение равновесия, содержащее только N_{BD}, то есть уравнение моментов относительно точки A. Распишем данное уравнение:

$$\sum M_A = F \cdot 2a - N_{BD} \cdot \sin 30 \cdot a = 0, \tag{49}$$

отсюда неизвестное усилие

$$N_{BD} = \frac{2F}{\sin 30} = 4F\ . \tag{50}$$

Записываем условие прочности (8) для стержня BD, подставляем в него выражение (50) и выражаем нагрузку F:

$$\frac{N_{BD}}{A_{BD}} \le R\,, \tag{51}$$

$$\frac{4F}{A_{BD}} = R, \ \Rightarrow \ F = \frac{R \cdot A_{BD}}{4}, \tag{52}$$

$$F = \frac{200 \cdot 10^3\ [Па] \cdot 5 \cdot 10^{-4}\ [м^2]}{4} = 25 кН\ .$$

ПРИМЕР 7.

Определить необходимые размеры поперечных сечений металлических тяг в стержневой системе из условия прочности, если тяга № 1 – из стали, расчетное сопротивление $R_{ст} = 210 МПа$, поперечное сечение - швеллер; тяга № 2 – из алюминия, расчетное сопротивление $R_{ал} = 130 МПа$, круглого поперечного сечения. Стержневая система изображена на рис. 13.

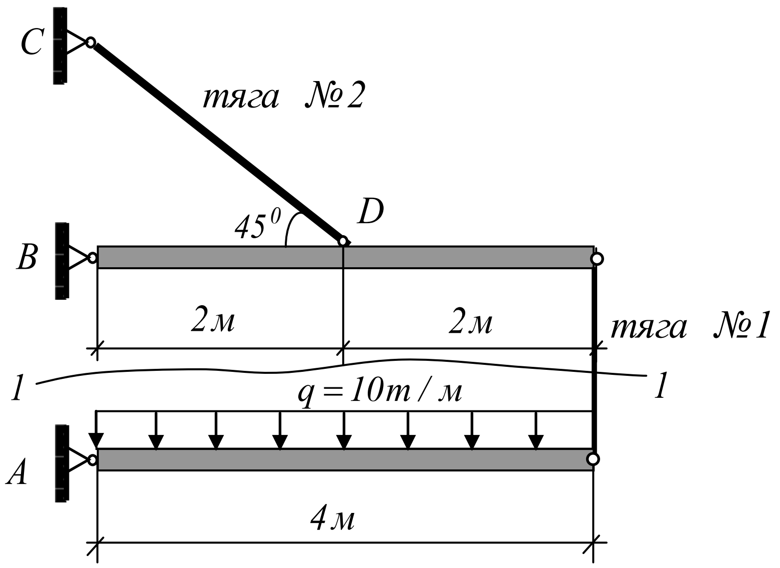


Рис. 13.

Под действием внешней нагрузки в точках опор системы A, B и C возникают реакции R_A, H_A, R_B, H_B, R_C, H_C. Кроме того, в тягах возникают усилия соответственно N_1 и N_2.

Для решения данной задачи необходимо по очереди рассмотреть равновесие двух абсолютно жестких стержней. Сначала рассекаем систему *сечением 1-1* по тяге № 1 и рассматриваем равновесие нижнего бруса (рис. 14, *б*), а затем - равновесие верхнего бруса (рис. 14, *а*). Из условий равновесия для нижней части будем находить усилие в первой тяге N_1, а из условия равновесия для верхней - N_2 (при этом усилие N_1 считается уже известным).

Для определения усилия N_1 необходимо записать уравнение моментов относительно точки A (рис. 14, *б*):

$$\sum M_A = 10 \cdot 4 \cdot 2 - N_1 \cdot 4 = 0, \tag{53}$$

отсюда $N_1 = 20т$ - усилие растяжения.

Теперь, считая усилие N_1 известным, необходимо рассмотреть равновесие средней части, для чего записать уравнение моментов относительно точки B (рис. 14, *а*):

$$\sum M_B = N_1 \cdot 4 - N_2 \cdot \sin 45^0 \cdot 2 = 0, \qquad (54)$$

$$N_2 = \frac{20 \cdot 4}{\sin 45^0 \cdot 2} = 56{,}3т.$$

отсюда $N_2 = 56{,}3т$ - усилие растяжения.

а)

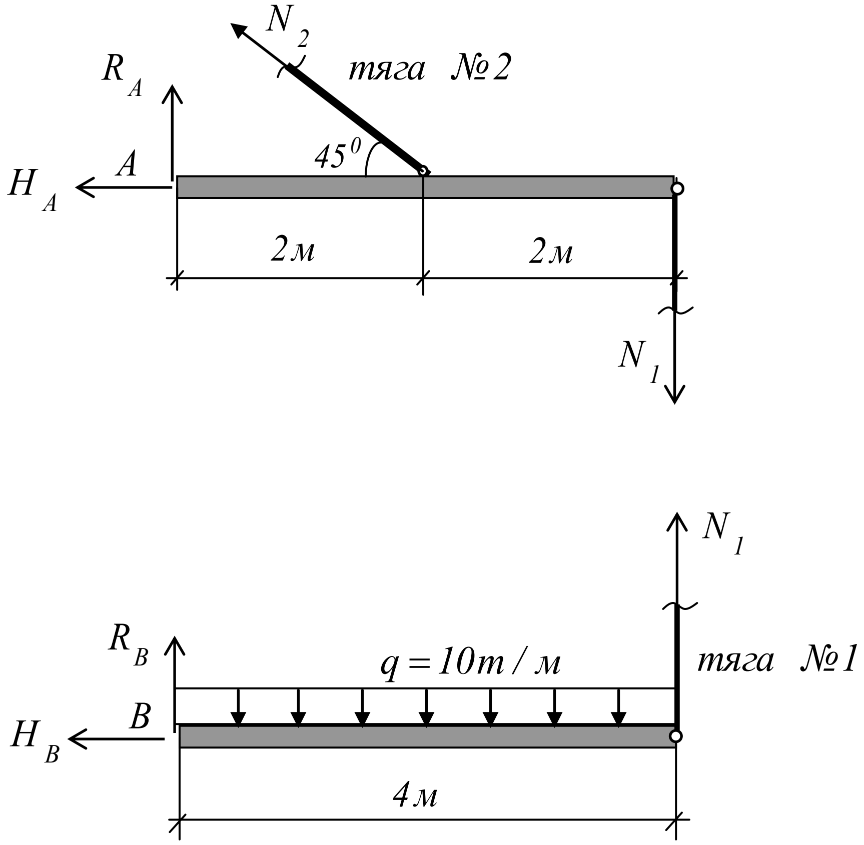


Рис. 14.

Далее, для каждой тяги записываем условие прочности и выражаем площади поперечных сечений A_1 - площадь тяги № 1, A_2 - площадь тяги № 2.

<u>ТЯГА № 1:</u>

$$\sigma_{z,1}^{max} = \frac{N_1}{A_1} \le R_{cm}, \qquad (55)$$

$$A_1^{треб} = \frac{N_1}{R_{ст}} = \frac{20\,[кН]}{210 \cdot 10^2\,[кН/м^2]} = 9{,}52 \cdot 10^{-4}\,м^2 = 9{,}52 см^2.$$

По сортаменту принимаем швеллер [10, $A_1 = 10{,}9 см^2$.

<u>Фактическая площадь сечения должна быть не меньше требуемой!</u>

<u>ТЯГА № 2:</u>

$$\sigma_{z,2}^{max} = \frac{N_2}{A_2} \le R_{ал}, \qquad (56)$$

$$A_2^{треб} = \frac{N_2}{R_{ал}} = \frac{56{,}3\,[кН]}{130 \cdot 10^2\,[кН/м^2]} = 43{,}3 \cdot 10^{-4} = 43{,}3 см^2.$$

Алюминиевая тяга имеет круглое сечение, тогда требуемый диаметр:

$$d_{ал}^{треб} = \sqrt{\frac{4A_2^{тр}}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 43{,}3}{3{,}14}} = 7{,}5 см.$$

Фактическая площадь круглого сечения:

$$A_2 = \frac{\pi d_{ал}^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot (7{,}5)^2}{4} = 44{,}2 см^2.$$

ПРИМЕР 8.

Определить усилия, возникающие в стержнях системы (рис. 15) под действием внешней нагрузки.

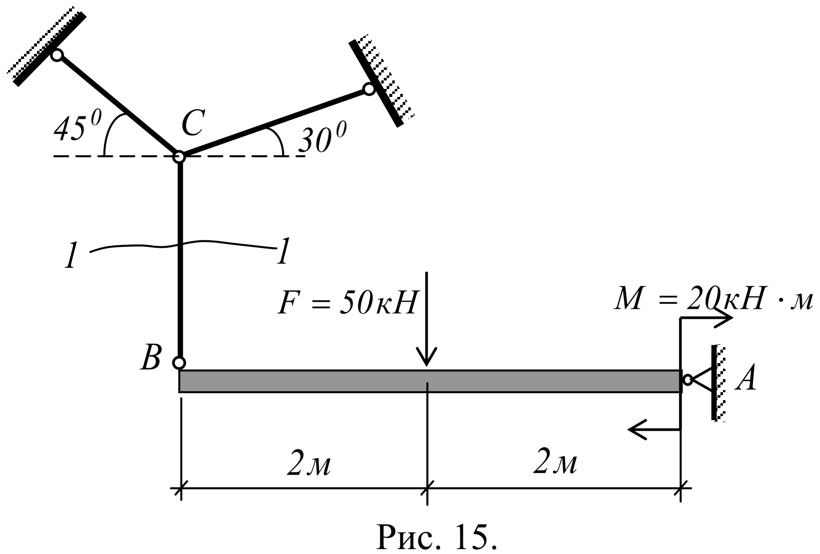


Рис. 15.

Под действием внешней нагрузки в точке опоры системы A возникают реакции R_A, H_A, а также усилия в стержнях N_{BC}, N_{CD}, N_{CE}.

В качестве объектов равновесия в этой задаче выступают абсолютно жесткий брус AB и узел C. Поэтому, для определения неизвестных усилий сначала рассекаем систему *сечением 1-1* по стержню BC и рассматриваем равновесие нижней части (рис. 16, *б*), а затем рассматриваем равновесие узла C (рис. 16, *а*).

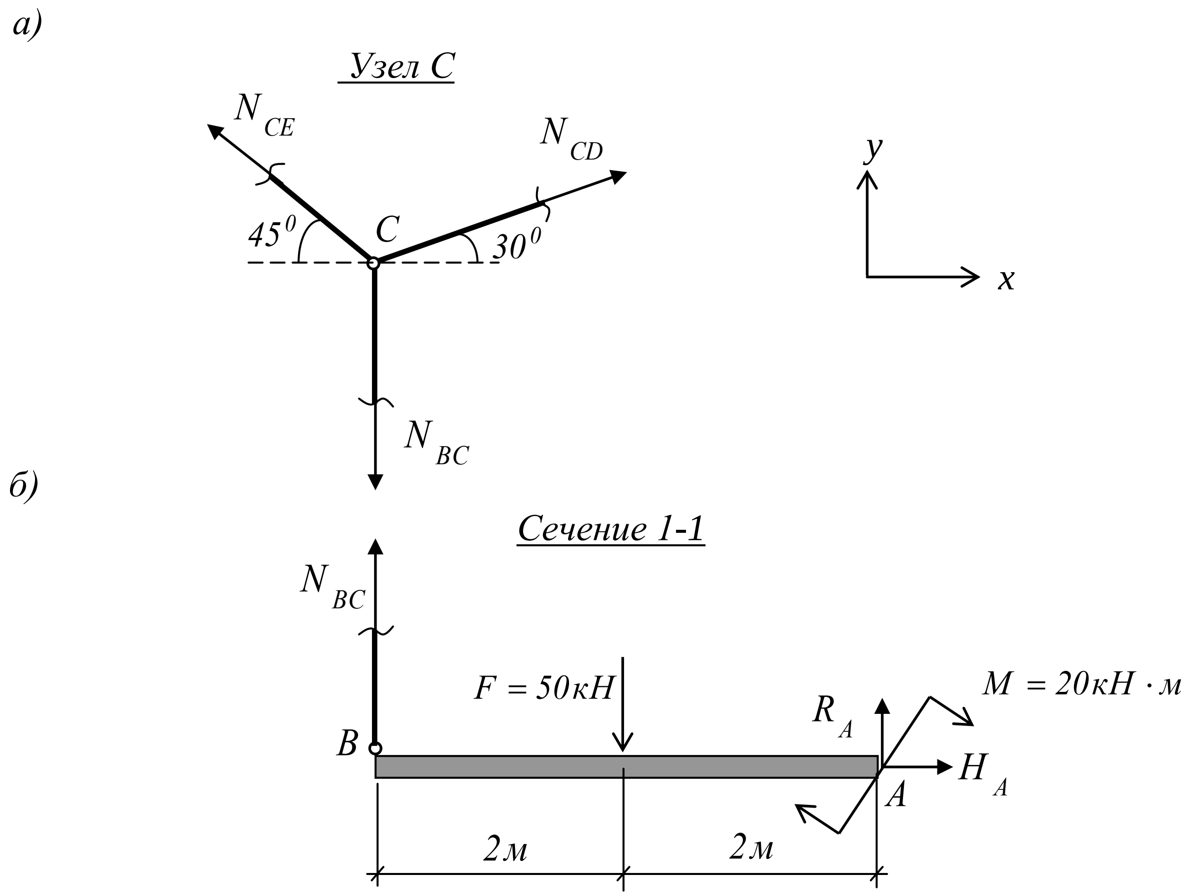


Рис. 16.

Для определения усилия N_{BC} необходимо записать уравнение моментов относительно точки A (рис. 16, *б*):

$$\sum M_A = -50 \cdot 2 + N_{BC} \cdot 4 + 20 = 0, \tag{57}$$

отсюда $N_{BC} = 20кН$ - усилие растяжения.

Теперь, считая усилие N_{BC} известным, необходимо рассмотреть равновесие узла C, для чего записать уравнения сумм проекций всех сил на вертикальную и горизонтальную оси (рис. 16, *а*):

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0. \end{cases} \tag{58}$$

$$\sum F_{kx} = N_{CD} \cdot \cos 30^0 - N_{CE} \cdot \cos 45^0 = 0, \tag{59}$$

$$\sum F_{ky} = N_{CD} \cdot \sin 30^0 + N_{CE} \cdot \sin 45^0 - N_{BC} = 0. \tag{60}$$

В результате получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} N_{CD} = 0{,}81 N_{CE}, \\ 0{,}5 N_{CD} + 0{,}71 N_{CE} = 20. \end{cases} \tag{61}$$

Решая систему (61) определяем усилия в стержнях CD и CE :

$$\begin{cases} N_{CD} = 14{,}5 кН, \\ N_{CE} = 17{,}9 кН. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. – М.: Издательство "Наука", 1965. - 856 с.

2. Варданян Г.С. и др. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. – М.: Издательство АСВ, 1995. - 575 с.

3. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. – М.: "Высшая школа", 1989. - 624 с.

4. Качурин В.К. Сборник задач по сопротивлению материалов. – М.: Издательство "Наука", 1970. - 432 с.

5. Саргсян А.Е. Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности. Основы теории с примерами расчетов. – М.: Издательство АСВ, 1998. - 240 с.

6. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Том 1. – М.: Издательство "Наука", 1965. - 363 с.

7. Пономарев А.Т., Зорин В.А. Сопротивление материалов. Курс лекций. Учебное пособие. – М.: Приор-издпт, 2002. – 336 с.

8. В.З. Васильев. Краткий курс сопротивления материалов с основами теории упругости. Учебное пособие. – СПб.: Иван Федоров, 2001. – 256 с.