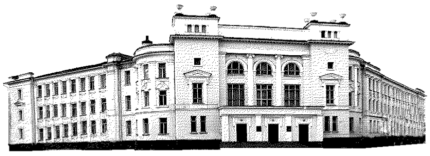
Министерство образования Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию



ГОУ ВПО «ТЮМЕНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ»

КАФЕДРА "СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА"

СЕКЦИЯ "СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ"

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ.

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ.

ДЛЯ СТУДЕНТОВ ДНЕВНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

290300 – "ПРОМЫШЛЕННОЕ И ГРАЖДАНСКОЕ СТРОИТЕЛЬСТВО"

Тюмень – 2004 год

Методические указания по теме "Расчеты на прочность и жесткость при центральном растяжении-сжатии. Статически неопределимые задачи" разработаны доцентом кафедры «Строительная механика» Огородновой Ю.В. и доцентом кафедры «Строительные конструкции» Баем В.Ф. Методические указания предназначены для студентов второго курса специальности ПГС.

Тюмень, ТюмГАСА, 2004 г., методические указания – издание 1.

Рецензент: к.ф-м.н., доцент Е.Ю. Куриленко

Учебно-методический материал утвержден на заседании кафедры:

Протокол № ______ от "____" ___________________ 2004 г.

Учебно-методический материал утвержден УМС академии:

Протокол № ______ от "____" ___________________ 2005 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

<u>Центральное (осевое) растяжение-сжатие</u> –это такой вид напряженно-деформированного состояния, при котором все нагрузки (сосредоточенные силы, распределенные нагрузки) лежат на оси стержня (рис. 1, а).

К конструкциям, работающим на центральное растяжение-сжатие, относятся: колонны, стойки, столбы, элементы ферм, элементы подкрановых конструкций (подвески), элементы строповки строительных конструкций и т.д.

Расчет и проектирование любой конструкции или ее элемента начинается с определения возникающих в ней под действием нагрузки внутренних усилий. При центральном растяжении-сжатии возникает только одно внутреннее усилие –продольная сила N [кН]. Напомним правило знаков: продольная сила считается положительной, если она вызывает растяжение стержня (направлена от рассматриваемого сечения), в противном случае она считается отрицательной (рис. 1, б).

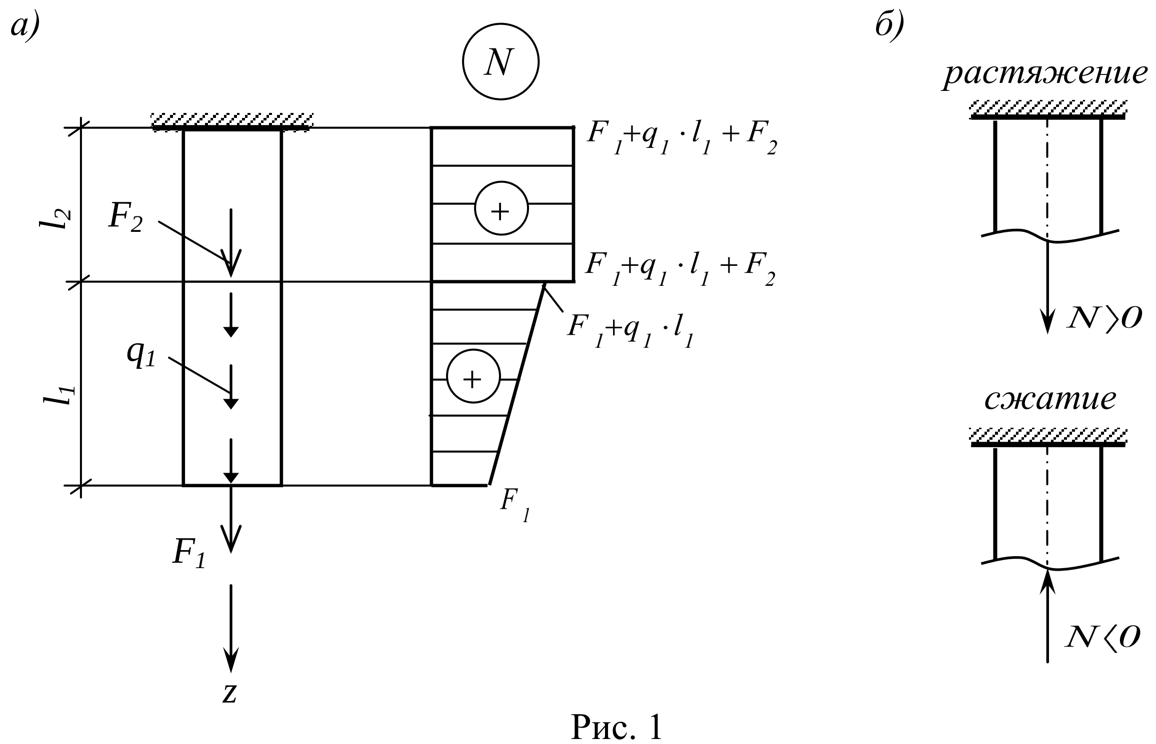


Рис. 1

Для того чтобы правильно запроектировать конструкцию необходимо прежде всего произвести ее расчет на прочность.

Прочность –это способность конструкции не разрушаться под действием нагрузки. Прочность – это, прежде всего характеристика материала. Ведь одна и та же конструкция, например колонна, под действием одних и тех же нагрузок, но изготовленная из разных материалов, будет иметь разную прочность.

Расчет на прочность сводится к требованию, чтобы наибольшие напряжения в элементах конструкции не превышали некоторой допустимой для данного материала величины. То есть при расчете на прочность нужно определить максимальное по абсолютной величине напряжение и сравнить его с нормируемой (заданной) величиной.

Напряжение – это внутреннее усилие, распределенное по площади сечения элемента, т.е. это величина внутреннего усилия, отнесенная к единице площади.

В поперечных сечениях стержней могут возникать два вида напряжений: нормальные, направленные по нормали к сечению, и касательные, направленные по касательной к сечению. Изучение данных напряжений выявило, что при центральном растяжении-сжатии в поперечных сечениях стержней касательные напряжения равны нулю.

Нормальные напряжения σ_z $\left[\frac{МН}{м^2} = МПа\right]$ в произвольном поперечном сечении конструкции (стержня) при растяжении - сжатии определяются по формуле:

$$\sigma_z = \frac{N}{A}, \tag{1}$$

где: N, $[МН]$ - значение продольной силы в рассматриваемом поперечном сечении; A, $[м^2]$ - площадь рассматриваемого поперечного сечения. Правило знаков для напряжений совпадает с правилом для продольных сил: сжимающие напряжения – отрицательные, растягивающие – положительные.

Поперечное сечение стержня, в котором возникает наибольшее по абсолютной величине напряжение, называется <u>*опасным сечением*</u>.

Рассмотрим стержень, защемленный одним концом и загруженный растягивающей силой F (рис. 2.1).

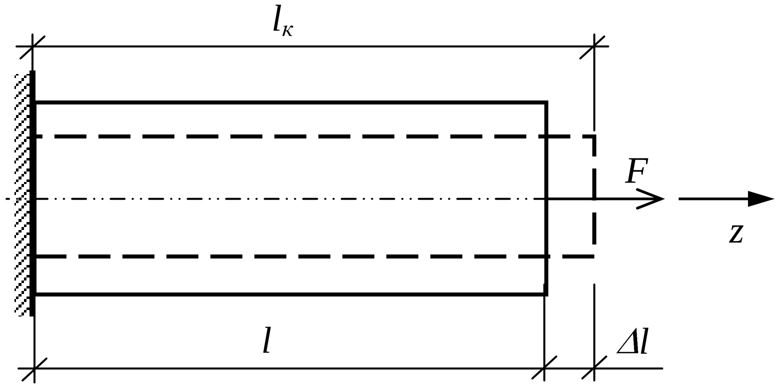


Рис. 2.1

В результате действия нагрузки длина стержня увеличится на величину $\Delta l = l_к - l$, которая называется <u>***абсолютной продольной деформацией***</u> или <u>***удлинением***</u> стержня.

Из определения относительной линейной деформации следует:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l}, \qquad (2)$$

где l $[м]$ - длина стержня до приложения нагрузки; $l_к$ $[м]$ - длина стержня после приложения нагрузки.

Согласно одной из гипотез механики деформируемого твердого тела, между напряжениями и деформациями существует линейная зависимость (закон Гука, 1676 г.):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \qquad (3)$$

где: E – модуль упругости $[МПа]$, механическая характеристика материала.

Если подставить в формулу (3) выражения (1) и (2), то можно получить другую форму записи закона Гука:

$$\frac{N}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l},$$

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \tag{4}$$

Величина EA [кН] называется <u>*жесткостью при растяжении-сжатии*</u>.

Как уже отмечалось выше, для грамотного проектирования и расчета любой конструкции необходимо произвести ее расчет на прочность. Для этого необходимо проверить выполнение условия прочности.

<u>*Условие прочности при центральном растяжении – сжатии*</u> имеет вид:

$$\sigma_z^{max} \leq R \cdot \gamma_c, \tag{5}$$

где σ^{max} [МПа] - максимальные нормальные напряжения, возникающие в поперечном сечении стержня; R [МПа] - расчетное сопротивление материала стержня; γ_c - коэффициент условий работы конструкции здания. В дальнейшем, во всех задачах будем принимать коэффициент $\gamma_c = 1$.

I. РАСЧЕТЫ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СЖАТЫХ И РАСТЯНУТЫХ СТЕРЖНЕЙ.

Статически неопределимый стержень - это стержень, в котором неизвестные реакции опор и внутренние усилия нельзя определить только из уравнений равновесия.

Для расчета таких стержней, кроме уравнений равновесия, составляют дополнительные уравнения – *уравнения совместности деформаций.*

В нашем случае, когда все силы лежат на оси стержня, статика позволяет составить только одно уравнение равновесия (равенство нулю суммы проекций всех сил на ось стержня – ось Z):

$$\sum F_{kz} = 0. \tag{6}$$

Наиболее важным этапом расчета статически неопределимых стержней является составление дополнительных уравнений.

Способы их составления рассмотрим на примерах решения различных задач.

ПРИМЕР 1.

Короткая железобетонная стойка имеет размеры поперечного сечения $25 \times 25 см$. Она армирована (снабжена) четырьмя продольными стержнями диаметром $d = 20 мм$, симметрично расположенными в плоскости поперечного сечения. Стойка нагружена продольной сжимающей силой $F = 60 т$. Модуль упругости бетона $E_б$ принять в 10 раз меньшим модуля упругости стали (арматуры) $E_а$. Определить напряжения в бетоне $\sigma_б$ и в арматуре $\sigma_а$.

Расчетная схема для решения задачи изображена на рис. 2.2, *а*.

От действия внешней нагрузки F в колонне возникают внутренние усилия. Поскольку стойка сделана из разных материалов – бетона и четырех стальных стержней, то под действием внешней нагрузки F в каждом материале возникает свое внутреннее усилие: в бетоне - $N_б$, в одном арматурном стержне (стали) - $N_{ст}$.(рис. 2.2, б).

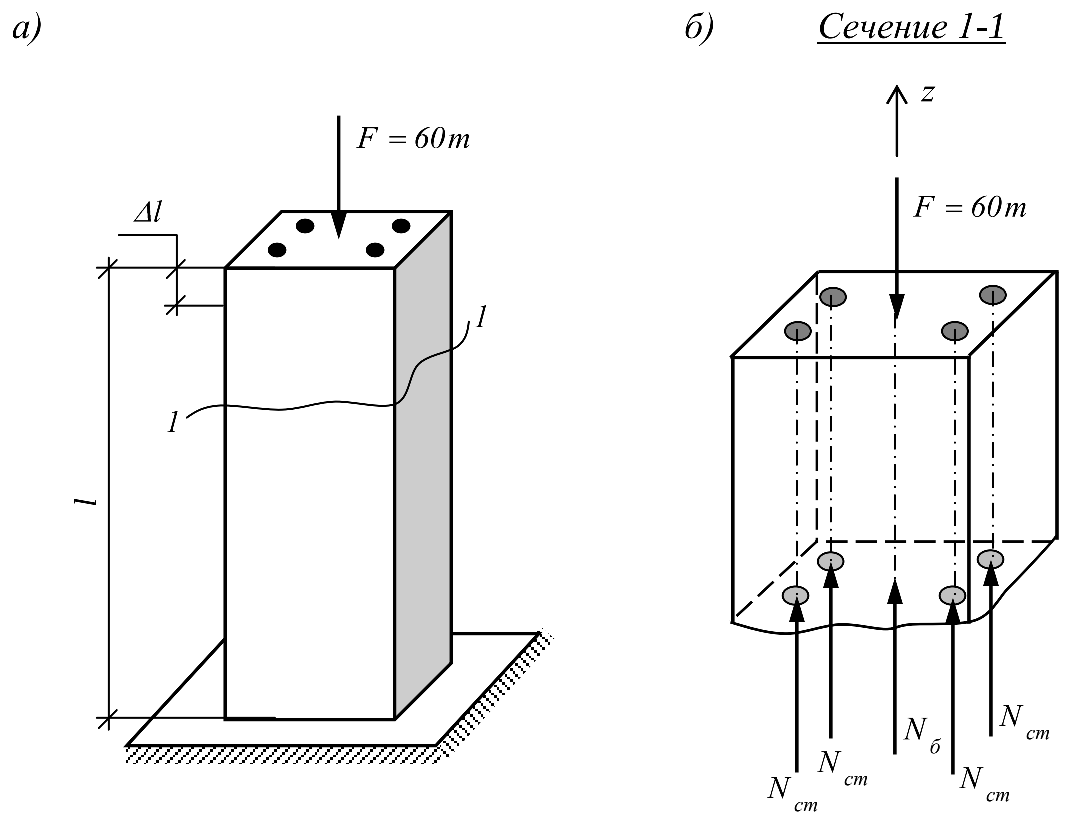


Рис. 2.2.

Для определения двух неизвестных усилий можно использовать только одно уравнение равновесия (6), которое для данной задачи примет вид:

$$N_б + 4N_{ст} = F. \tag{7}$$

Таким образом, стержень является один раз статически не определимым и необходимо составить дополнительное уравнение.

Под действием сжимающей силы F стойка укорачивается на величину Δl. Поскольку сцепление между арматурой и бетоном абсолютно жесткое (что следует из названия стойки – "железобетонная"), то и бетон, и каждый арматурный стержень в ней также укорачивается на величину Δl, что приводит к записи:

$$\Delta l = \Delta l_б = \Delta l_{ст},$$

или

$$\Delta l_б = \Delta l_{ст}. \tag{8}$$

Выражение (8) является уравнением совместности деформаций для решения данной задачи. Расписывая левую и правую часть выражения (8) по формуле (4) получим закон Гука в виде:

$$\frac{N_б l_б}{E_б A_б} = \frac{N_{ст} l_{ст}}{E_{ст} A_{ст}}, \tag{9}$$

где $N_б$, $N_{ст}$, $[кН]$ - усилие, возникающее соответственно в бетоне и в стальных стержнях стойки; $l_б = l_{ст} = l$, $[м]$ - длина соответственно бетонного и стального элементов, что согласно данной задаче, соответствует длине всей стойки; $E_б, E_{ст}$, $[МПа]$ - соответственно модуль упругости бетона и стали; $A_б, A_{ст}$, $[м^2]$ - площади соответственно бетона и стали (арматуры).

Подставляя теперь в выражение (9) исходные данные, имеем:

$$l_б = l_{ст} = l;\ E_{ст} = 10E_б;$$

$$A_{ст} = \frac{3{,}14 \cdot 2^2}{4} = 3{,}14 \cdot 10^{-4} м^2;\ A_б = 25^2 - 4 \cdot 3{,}14 = 612{,}4 \cdot 10^{-4} м^2;$$

$$\frac{N_б l}{E_б \cdot 612{,}4 \cdot 10^{-4}} = \frac{N_{ст} l}{10E_б \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-4}},$$

или

$$\frac{N_б}{612{,}4} = \frac{N_{ст}}{31{,}4}. \tag{10}$$

В результате получили систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} N_б + 4N_{ст} = F, \\ 31{,}4N_б = 612{,}4N_{ст}. \end{cases} \tag{11}$$

Решая систему (11), определяем величину усилий:

$$\begin{cases} N_б = 498 кН, \\ N_{ст} = 25{,}5 кН. \end{cases}$$

Согласно формуле (1) напряжения в бетоне и в арматурной стали будут равны:

$$\begin{cases} \sigma_б = -\dfrac{N_б}{A_б} = -\dfrac{498}{612{,}4\cdot 10^{-4}} = -8100 кПа = -8{,}1 МПА, \\ \sigma_а = -\dfrac{N_а}{A_а} = -\dfrac{25{,}5}{3{,}14\cdot 10^{-4}} = -81200 кПа = -81{,}2 МПА. \end{cases}$$

Знак «минус» указывает на то, что в стойке возникают сжимающие напряжения.

В качестве проверки такого типа задач используется соотношение, являющееся следствием из закона Гука – отношение напряжений в арматуре и в бетоне должно быть равно отношению модулей упругости соответствующих материалов:

$$\frac{\sigma_а}{\sigma_б} = \frac{E_а}{E_б} = 10.$$

ПРИМЕР 2.

Определить усилия в сечениях стержня N_1, N_2, N_3, изображенного на рис. 3. Первый участок выполнен из меди $E_1 = 1\cdot 10^8$ $[кПа]$ и имеет площадь поперечного сечения $A_1 = A$ $[м^2]$; второй участок – из стали $E_2 = 2\cdot 10^8$ $[кПа]$ с той же площадью $A_2 = A$ $[м^2]$; третий участок также изготовлен из стали $E_3 = 2\cdot 10^8$ $[кПа]$ с площадью поперечного сечения $A_3 = 2A$ $[м^2]$. Все участки стержня одинаковой длины $l_1 = l_2 = l_3 = a$ $[м]$.

Под действием нагрузки F в точках закрепления стержня возникает <u>две реакции</u> R_1 и R_2, для определения которых можно использовать только <u>одно независимое уравнение равновесия</u> (равенство нулю суммы проекций всех сил на ось стержня – ось z):

$$\sum F_{kz} = F - R_1 - R_2 = 0, \text{ или } F = R_1 + R_2 \qquad (12)$$

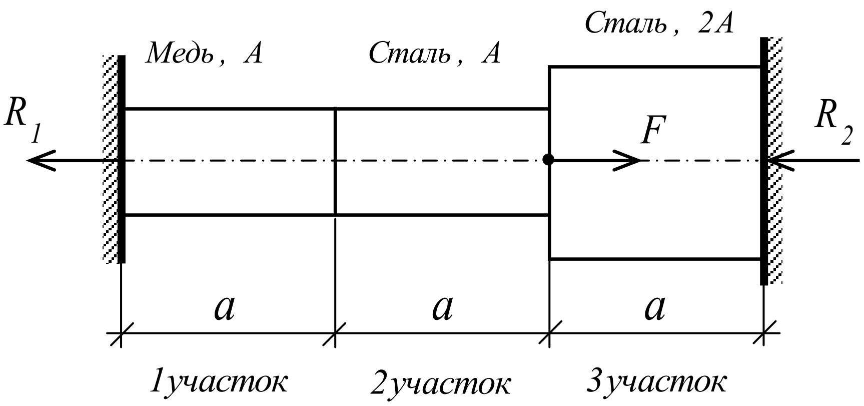


Рис. 3.

Таким образом, стержень является <u>один раз статически не определимым.</u> Для составления дополнительного уравнения выразим продольные силы, возникающие на каждом участке, например, через реакцию R_1, то есть:

$$N_1 = R_1;\ \ N_2 = R_1;\ N_3 = R_1 - F. \tag{13}$$

Полная абсолютная деформация Δl для такого стержня будет складываться из деформаций каждого из участков

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 \tag{14}$$

и будет равна нулю, поскольку с обеих сторон он жестко закреплен, то есть:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0. \tag{15}$$

Выражение (15) – <u>уравнение совместности деформаций</u> для данной задачи.

Распишем теперь каждое слагаемое по формуле (4) и преобразуем его:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} + \frac{N_3 \cdot l_3}{E_3 \cdot A_3} = 0, \tag{16}$$

$$\frac{N_1 \cdot a}{1 \cdot 10^8 \cdot A} + \frac{N_2 \cdot a}{2 \cdot 10^8 \cdot A} + \frac{N_3 \cdot a}{2 \cdot 10^8 \cdot 2A} = 0,$$

$$\frac{R_1}{1} + \frac{R_1}{2} + \frac{(R_1 - F)}{4} = 0,$$

$$R_1 = \frac{F}{7}$$

Таким образом, усилия на участках стержня согласно (13) равны:

$$N_1 = N_2 = \frac{F}{7} \text{ - усилие растяжения;}$$

$$N_3 = F - \frac{F}{7} = -\frac{6F}{7} \text{ - усилие сжатия.}$$

Тогда реакции в жестких заделках будут равны:

$$R_1 = \frac{F}{7}; \quad R_2 = \frac{6F}{7}.$$

Для проверки строим эпюру продольных сил, которая приведена на рис. 4.

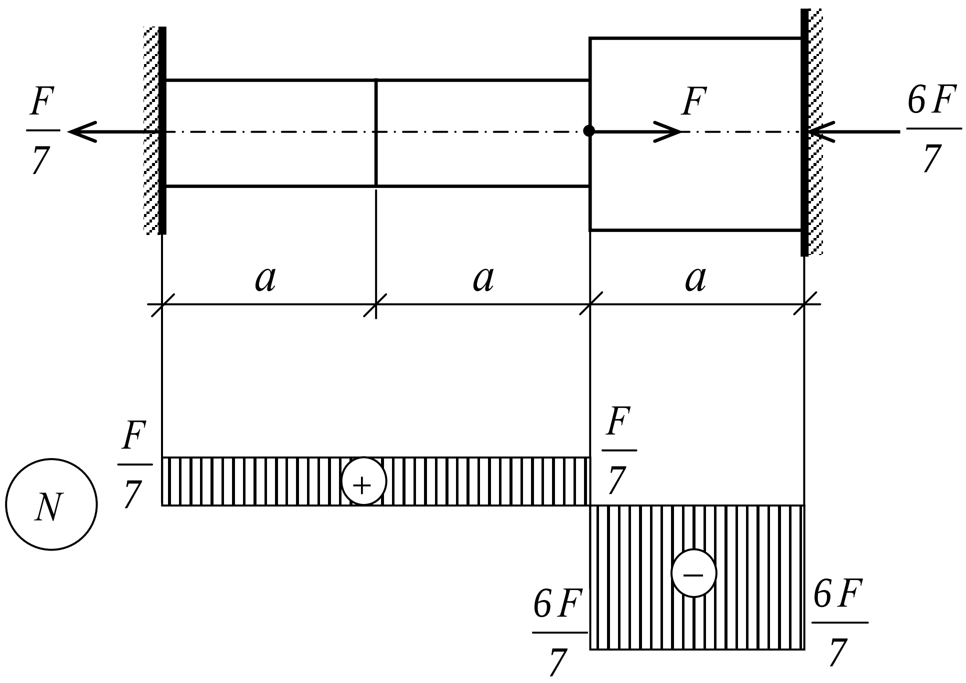


Рис. 4.

ПРИМЕР 3.

Определить напряжения на участках составного стержня, изображенного на рис. 5, если $a = 0{,}5 м$; $A = 100 см^2$; $F = 150 т$; $\delta = 0{,}1 мм$. Зазор δ имеет указанный размер до приложения нагрузки F, после ее приложения он закрывается. Весь стержень изготовлен из стали, $E = 2 \cdot 10^5 МПа$.

Как и в предыдущем примере, в результате действия нагрузки возникает две реакции R_1 и R_2, так как зазор δ закрывается. Стержень один раз статически неопределимый, поскольку можно составить только одно уравнение статики (12):

$$F = R_1 + R_2.$$

Как и ранее, выразим неизвестные внутренние усилия через реакцию R_1, в связи с чем, продольные силы на трех участках будут равны:

$$N_1 = R_1; \quad N_2 = R_1 - F; \quad N_3 = R_1 - F = R_2. \qquad (17)$$

Под действием силы F стержень может удлиниться только на величину δ, так как большей деформации будет препятствовать жесткая заделка. В результате уравнение совместности деформаций для данной задачи будет иметь вид:

$$\Delta l = \delta. \qquad (18)$$

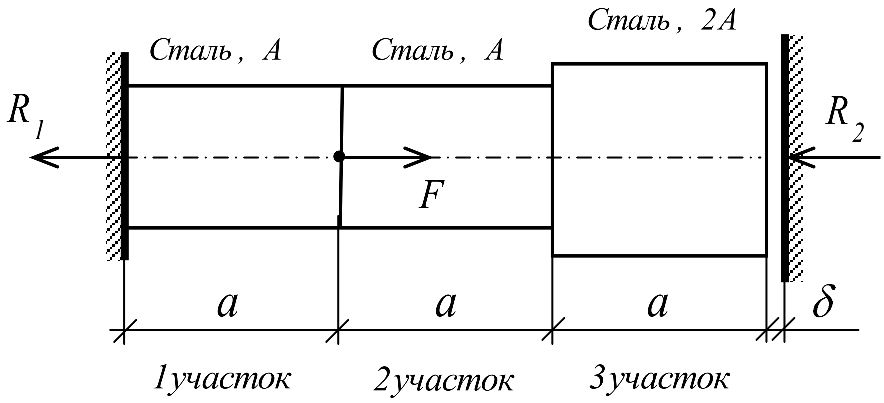


Рис. 5.

По аналогии с *примером 2* распишем и преобразуем левую часть выражения (18) по формулам (15) и (4):

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} + \frac{N_3 \cdot l_3}{E_3 \cdot A_3} = \delta. \qquad (19)$$

Подставляя теперь в (19) исходные данные, а также выражения (17) получим:

$$\frac{N_1 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 10^8 \cdot 100 \cdot 10^{-4}} + \frac{N_2 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 10^8 \cdot 100 \cdot 10^{-4}} + \frac{N_3 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 10^8 \cdot 200 \cdot 10^{-4}} = 0{,}1 \cdot 10^{-3},$$

$$0{,}25N_1 + 0{,}25N_2 + 0{,}125N_3 = 100,$$

$$0{,}25R_1 + 0{,}25(R_1 - 1500) + 0{,}125(R_1 - 1500) = 100,$$

$$R_1 = 1060\,кН.$$

Тогда продольные силы на участках стержня согласно (17) будут равны:

$$N_1 = R_1 = 1060\,кН \text{ - растяжение;}$$

$$N_2 = N_3 = R_1 - F = -440\,кН \text{ - сжатие.}$$

Определяем напряжения на каждом участке стержня по формуле (1):

$$\sigma_z^I = \frac{N_1}{A_1} = \frac{1060}{100 \cdot 10^{-4}} = 106 \cdot 10^3\,кПа = 106\,МПа;$$

$$\sigma_z^{II} = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{440}{100 \cdot 10^{-4}} = -44 \cdot 10^3\,кПа = -44\,МПа;$$

$$\sigma_z^{III} = \frac{N_3}{A_3} = -\frac{440}{200 \cdot 10^{-4}} = -22 \cdot 10^3\,кПа = -22\,МПа.$$

Знаки «минус» указывают на то, что на втором и третьем участках стержня возникают сжимающие напряжения.

На рисунке 6 приведены эпюры продольных сил и напряжений в брусе (зазор уже закрыт).

ПРИМЕР 4.

Стальной ступенчатый стержень нагревается на 40^0C. Определить возникающие в нем напряжения, если модуль упругости стали $E = 2 \cdot 10^5\,МПа$, коэффициент температурного расширения $\alpha_{ст} = 1{,}25 \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{{}^0C}$. Остальные данные приведены на рис. 7.

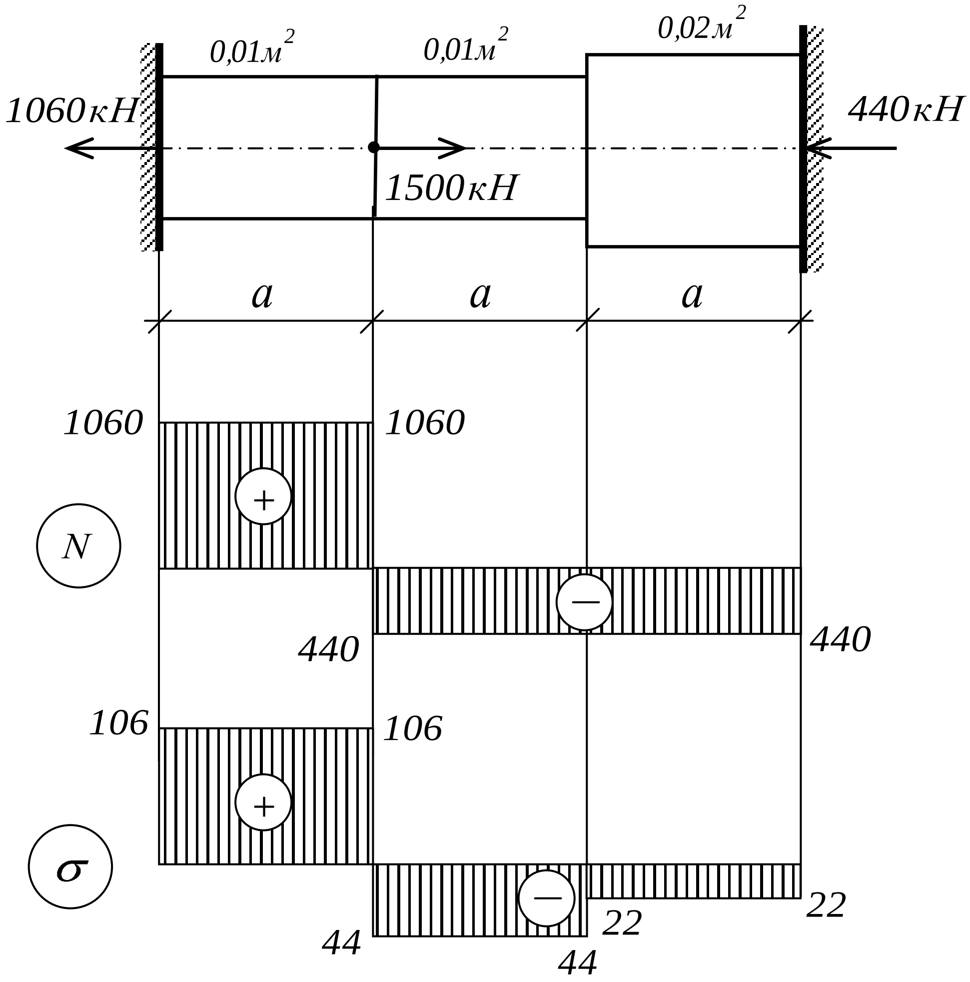


Рис. 6.

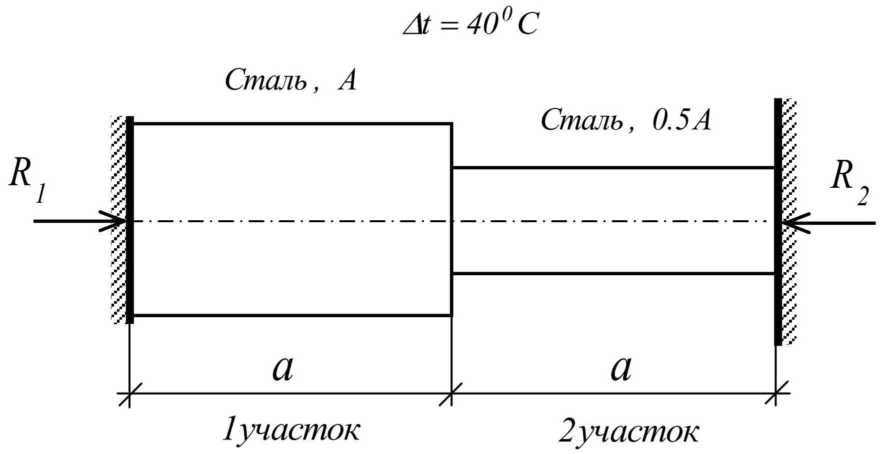


Рис. 7.

Известно, что при повышении температуры (нагревании), материал расширяется, то есть конструкция удлиняется, а при отрицательных температурах, наоборот, - укорачивается. Абсолютные деформации стержня в результате температурных воздействий определяются по формуле:

$$\Delta l_T = \alpha \cdot \Delta t \cdot l, \tag{20}$$

где α $\left[\frac{1}{{}^0C}\right]$ - коэффициент температурного расширения, зависит от материала стержня; Δt [redacted] C - перепад (изменение температуры, $\Delta t = t_к - t_н$); l - длина стержня (участка).

В статически определимых стержнях температурные деформации не вызывают напряжений (как видно из формулы (20), Δl_T никак не зависит и не связано с σ_z). Если же стержень жестко закреплен с обоих концов (статически неопределимый), то заделки препятствуют его свободному удлинению (укорочению), в связи с чем, в точках закрепления возникают реактивные усилия.

Полная деформация стержня в данном случае будет складываться из температурных деформаций и деформаций, вызванных реакциями R_1 и R_2 $\Delta l = \Delta l_T + \Delta l_R$ и будет равна нулю, поскольку стержень жестко защемлен с обоих концов, то есть:

$$\Delta l_T + \Delta l_R = 0. \tag{21}$$

Выражение (21) является уравнением совместности деформаций для данной задачи.

По аналогии с предыдущими примерами разбиваем стержень на расчетные участки и расписываем слагаемые формулы (21) по формулам (4) и (20), учитывая, что $N_1 = N_2 = -R_1$:

$$\Delta l_T = \Delta l_T^I + \Delta l_T^{II} = \alpha_I \cdot \Delta t_I \cdot l_I + \alpha_{II} \cdot \Delta t_{II} \cdot l_{II} = 2\alpha \cdot \Delta t \cdot a, \tag{22}$$

$$\Delta l_R = \Delta l_R^I + \Delta l_R^{II} = \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} = -\frac{R_1 \cdot a}{E \cdot A} - \frac{R_1 \cdot a}{E \cdot 0{,}5A} = -\frac{3R_1 \cdot a}{E \cdot A}. \tag{23}$$

Подставляем полученные выражения в уравнение (21):

$$2\alpha \cdot \Delta t - \frac{3R_1}{E \cdot A} = 0,$$

тогда, с учетом исходных данных реакция R_1 будет равна:

$$2 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-5} \cdot 40 - \frac{3R_1}{2 \cdot 10^6 \cdot A} = 0,$$

$$R_1 = 667 \cdot A\ (кг).$$

В результате внутренние усилия, возникающие на участках стержня:

$$N_1 = N_2 = -R_1 = -667 \cdot A\ (кг) \text{ - сжатие.}$$

Определяем напряжения на участках стержня по формуле (1):

$$\sigma_z^I = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{667A}{A} = -667 кг/см^2,$$

$$\sigma_z^{II} = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{667A}{0.5A} = -1334 кг/см^2.$$

Со знаком «минус» записаны сжимающие напряжения.

II. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СЖАТЫХ И РАСТЯНУТЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ.

Статически неопределимые стержневые системы - это системы, в которых неизвестные реакции и внутренние усилия нельзя определить только из уравнений равновесия (уравнений статики).

Также как и для статически неопределимых стержней, при расчете таких систем, кроме уравнений статики, необходимо составление дополнительных уравнений – *уравнений совместности деформаций.*

Разность количества неизвестных и количества независимых уравнений равновесия равна *степени статической неопределимости системы*. Другими словами, степень статической неопределимости равна количеству уравнений совместности деформаций.

Для составления дополнительных уравнений, которые для каждой конкретно задачи будут различными, необходимо рассмотреть *картину деформаций* системы. На основании картины деформации выявляется геометрическая зависимость (соотношение) между деформациями отдельных стержней системы. Далее, используя выражение (4) для определения абсолютной деформации Δl, полученное на основании физического и геометрического уравнений (закона Гука и уравнения Коши), устанавливается физическая зависимость между деформациями и напряжениями (внутренними усилиями) элементов системы.

Уравнения равновесия в данном случае отражают статическую зависимость между внутренними усилиями в стержнях системы и реакциями связей.

Усилия в элементах статически определимых систем возникают только от действия внешней нагрузки (включая собственный вес конструкции). В элементах статически неопределимых систем усилия могут возникать и при отсутствии внешней нагрузки – в результате, например, изменения температуры, смещения опорных закреплений, неточности изготовления отдельных элементов конструкции.

Рассмотрим для начала две задачи, в которых изложим только общий ход решения.

ПРИМЕР 5.

На рис. 8 (*а*) изображена стержневая система, состоящая из трех стержней, соединенных в *точке А* общим шарниром и загруженная вертикальной силой F. Требуется определить усилия в стержнях от действия этой силы.

Так как соединения всех концов стержней шарнирные, то реакции в них будут направлены вдоль осей стержней и равны внутренним усилиям N_1, N_2, N_3 соответственно (рис. 8, б). Поскольку все стержни пересекаются в узле A, то и внутренние усилия будут пересекаться в нем, также как и сила F. Таким образом, рассматривается плоская сходящаяся система сил, для которой можно составить только два независимых уравнения равновесия – суммы проекций всех сил на оси координат:

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad \sum F_{ky} = 0. \tag{24}$$

Для решения данной задачи рассмотрим схему деформации системы при $l_1 = l_2$ (рис. 8, *в*), где пунктирными линиями изображена система до приложения нагрузки, а сплошными линиями – после нагружения. Под действием силы F узел A (поскольку система симметрична относительно третьего стержня) переместится вертикально вниз. При этом стержни получат удлинения $\Delta l_1 = \Delta l_2$ и Δl_3. В силу малости перемещений точек и удлинений стержней в сравнении с их первоначальными длинами можно пренебречь изменением углов между стержнями после деформации системы.

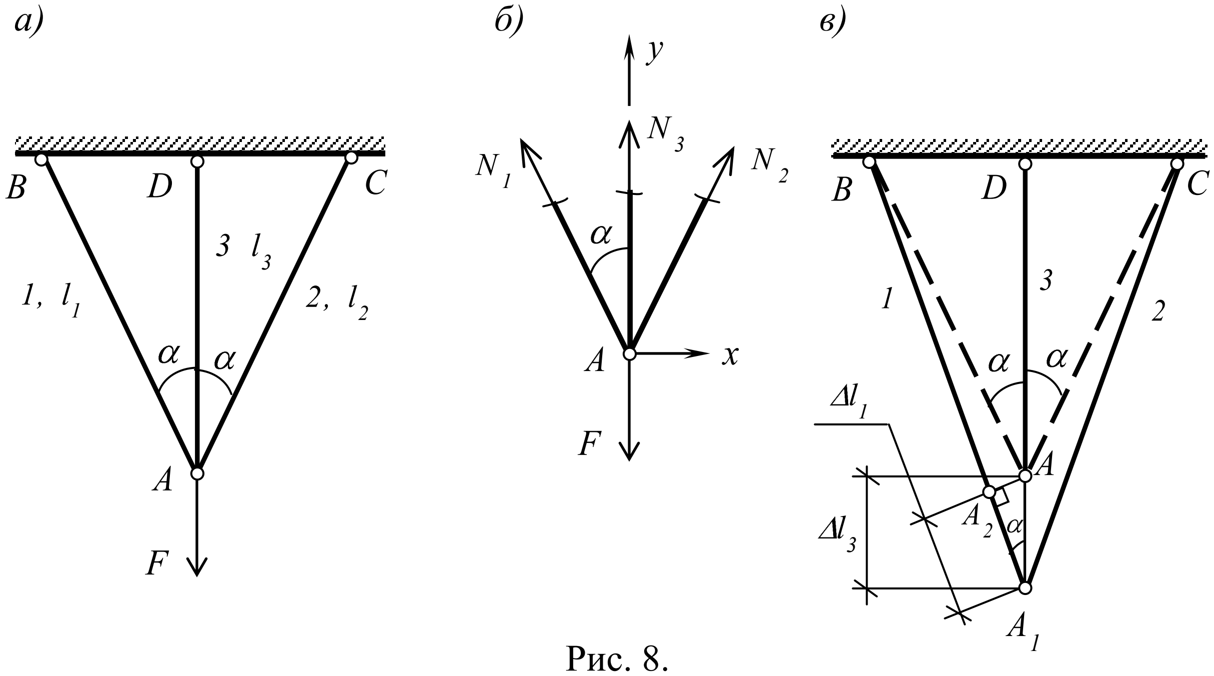


Рис. 8.

Удлинение третьего стержня Δl_3 будет равно длине отрезка AA_1. Для того, чтобы определить удлинение первого стержня, необходимо опустить перпендикуляр из точки A его первоначальной длины AB на его конечную длину A_1B, тогда деформация первого стержня Δl_1 будет равна отрезку A_1A_2. Связь между удлинениями устанавливается из прямоугольного треугольника ΔAA_1A_2:

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2}{AA_1} = \frac{\Delta l_1}{\Delta l_3} \quad \Rightarrow \Delta l_1 = \Delta l_3 \cos\alpha,$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 \cos\alpha\,. \tag{25}$$

Выражение (25) – уравнение совместности деформаций для данной задачи.

В результате получили общий вид системы трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = \sin\alpha \cdot (N_2 - N_1) = 0, \\ \sum F_{ky} = \cos\alpha \cdot (N_1 + N_2) + N_3 - F = 0, \\ \Delta l_1 = \Delta l_3 \cos\alpha. \end{cases} \tag{26}$$

ПРИМЕР 6.

Рассмотрим теперь ту же стержневую систему до приложения нагрузки, причем *стержни № 1* и *№ 2* имеют одинаковые длины l_1 и l_2, а *стержень № 3* изготовлен короче проектной длины на величину δ (рис. 9, а). Для окончательной сборки данной конструкции необходимо, чтобы *стержень № 3* имел длину l_3. Для этого его нагревают, он удлиняется на величину δ (в стержне возникает усилие растяжения), после чего его соединяют в узле *А* с остальными стержнями. В дальнейшем, при охлаждении, *стержень № 3* пытается вернуться к своей исходной длине, а будучи соединенным с остальными стержнями укорачивает и их (в стержнях № 1 и № 2 возникают усилия сжатия). В силу симметрии задачи (из подобия прямоугольных треугольников) $\Delta l_1 = \Delta l_2$. Однако, *стержни № 1* и *№ 2* препятствуют возврату *стержня № 3* к первоначальной длине $(l_3 - \delta)$, в результате чего его конечная деформация будет меньше δ (рис. 9, в).

Таким образом, даже при отсутствии внешней нагрузки, в *стержне № 3* возникает усилие растяжения, а в *стержнях № 1* и *№ 2* – усилия сжатия (рис. 9, б).

Для расчета данной системы также можно составить только <u>два независимых уравнения равновесия</u> (24) при <u>трех неизвестных усилиях</u> в стержнях.

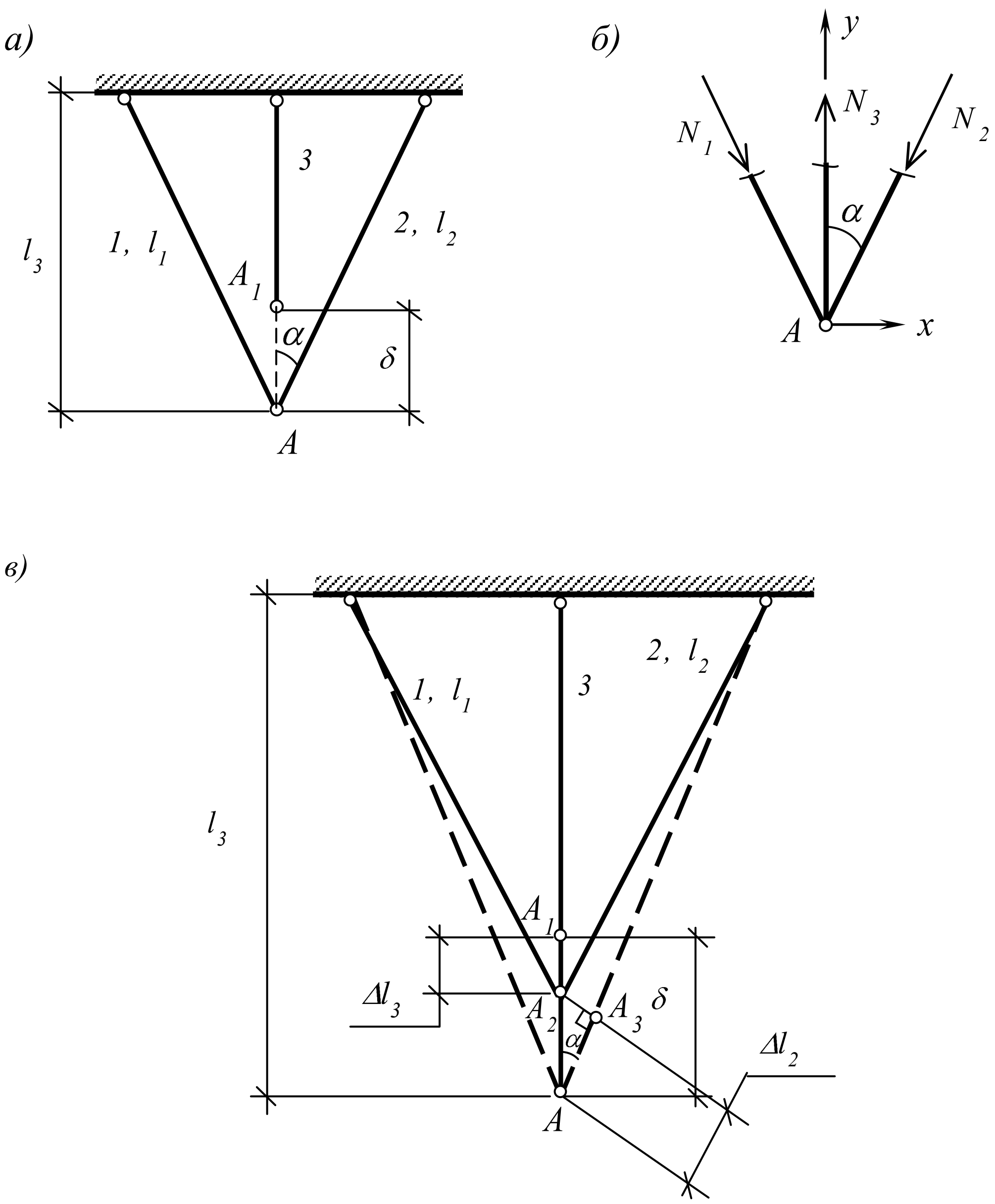


Рис. 9.

Уравнение совместности деформаций снова получим из картины деформаций системы (рис. 9, в), рассмотрев прямоугольный треугольник $\Delta A_1 A_2 A_3$:

$$\cos\alpha = \frac{AA_3}{AA_2} = \frac{\Delta l_2}{\delta - \Delta l_3} \quad \Rightarrow \Delta l_2 = \cos\alpha \cdot (\delta - \Delta l_3),$$

$$\Delta l_2 = \cos\alpha \cdot (\delta - \Delta l_3). \tag{27}$$

Выражение (27) – уравнение совместности деформаций для данного примера.

В результате получили общий вид системы трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = \sin\alpha \cdot (N_1 - N_2) = 0, \\ \sum F_{ky} = N_3 - \cos\alpha \cdot (N_1 + N_2) = 0, \\ \Delta l_2 = \sin\alpha \cdot (\delta - \Delta l_3). \end{cases} \qquad (28)$$

ПРИМЕР 7.

Абсолютно жесткий брус (изгибная жесткость $EJ = \infty$) закреплен с помощью шарнирно-неподвижной опоры O и двух стальных стержней одинаковой длины l и площади A (рис. 10). Определить усилия в стержнях от действия нагрузки F.

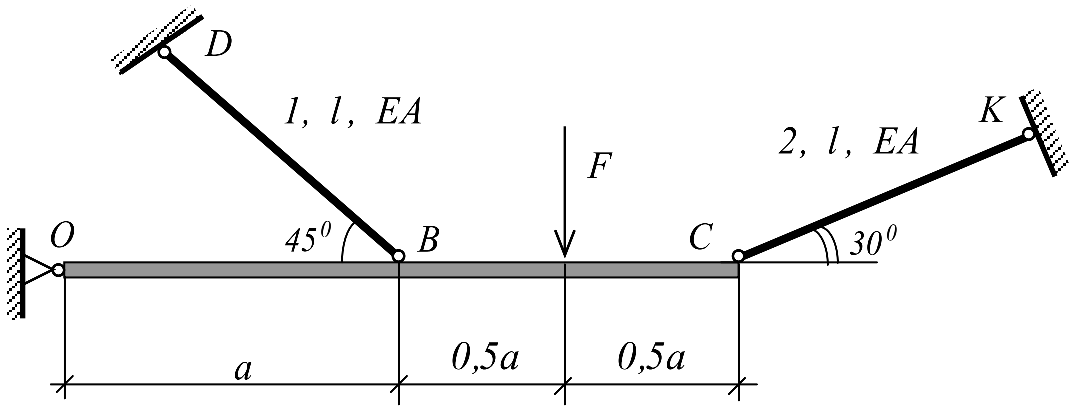


Рис. 10.

Под действием внешней нагрузки в опоре O возникают реакции R_O и H_O, а также внутренние усилия в стержнях N_1 и N_2 (рис. 11).

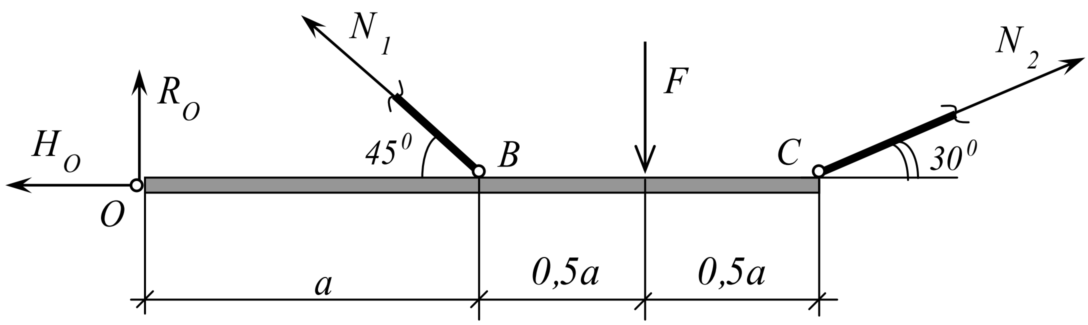


Рис. 11.

Таким образом, рассматривается плоская система сил, для которой можно составить только три независимых уравнения равновесия при четырех неизвестных:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum M_o = 0. \end{cases} \tag{29}$$

В результате система один раз статически неопределима, для ее решения необходимо составить одно дополнительное уравнение. Поскольку по условию задачи необходимо определить только усилия в стержнях, то оставляем в рассмотрении уравнение равновесия, не содержащее опорные реакции R_O и H_O, то есть

$$\sum M_o = 0, \qquad \sum M_o = F \cdot 1{,}5a - N_1 \cdot \sin 45^0 \cdot a - N_2 \cdot \sin 30^0 \cdot 2a = 0, \tag{30}$$

$$0{,}71 N_1 + N_2 = 1{,}5F. \tag{31}$$

Для составления уравнения совместности деформаций рассмотрим картину деформирования системы (рис. 12).

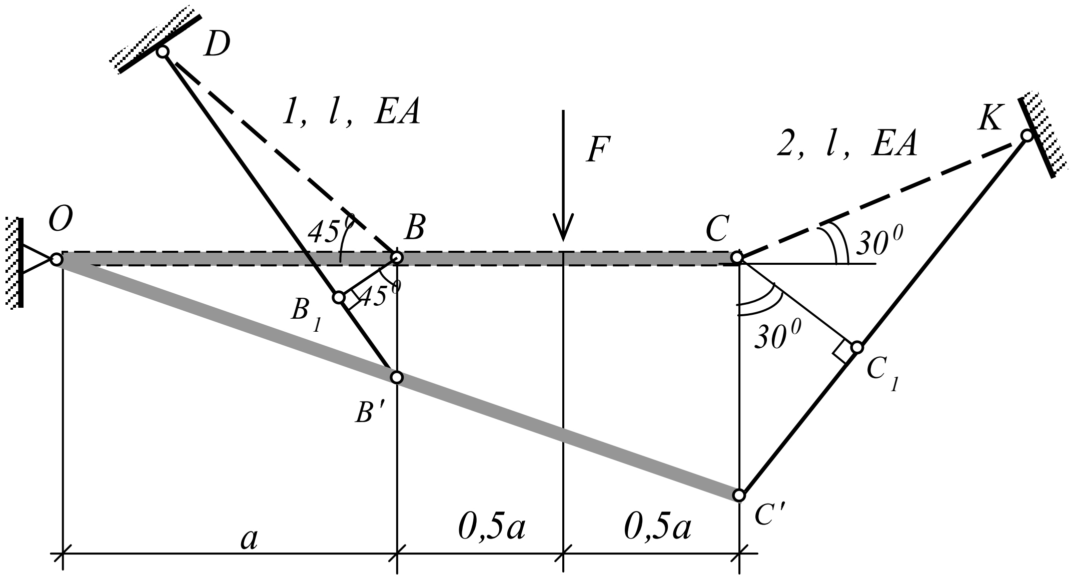


Рис. 12.

Под действием нагрузки F абсолютно жесткий (недеформируемый) брус OC повернется относительно точки O на некоторый угол. В результате точка B переместится вниз в точку B', а точка C в точку C', стержень BD

получит удлинение $B'B_1 = \Delta l_1$, а стержень CK удлинение $C'C_1 = \Delta l_2$. Из условия подобия треугольников $\Delta OBB'$ и $\Delta OCC'$ получим следующие соотношения сторон:

$$\frac{BB'}{OB} = \frac{CC'}{OC}, \qquad \frac{BB'}{a} = \frac{CC'}{2a}. \tag{32}$$

Для определения катетов BB' и CC' рассмотрим прямоугольные треугольники $\Delta BB'B_1$ и $\Delta CC'C_1$:

$$\Delta BB'B_1: \qquad \sin 45^0 = \frac{B'B_1}{BB'} \Rightarrow BB' = \frac{B'B_1}{\sin 45} = \frac{\Delta l_1}{\sin 45} = 1{,}41\Delta l_1;$$

$$\Delta CC'C_1: \qquad \sin 30^0 = \frac{C'C_1}{CC'} \Rightarrow CC' = \frac{C'C_1}{\sin 30} = \frac{\Delta l_2}{\sin 30} = 2\Delta l_2.$$

Подставляя полученные значения в выражения (32) получаем уравнение совместности деформаций:

$$\Delta l_2 = 1{,}41\Delta l_1 \tag{33}$$

Так как каждый из стержней рассматриваемой системы находится под действием постоянной продольной силы, то, считая жесткости всех стержней одинаковыми, используя формулу (4) можно записать:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EA}; \qquad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA}. \tag{34}$$

Подставляя (34) в (33) получим:

$$\frac{N_2 l}{EA} = 1{,}41\frac{N_1 l}{EA}, \Rightarrow N_2 = 1{,}41 N_1.$$

Полученное соотношение между N_1 и N_2 совместно с уравнением равновесия (31) позволяет решить задачу:

$$\begin{cases} N_2 = 1{,}41 N_1; \\ 0.71 N_1 + N_2 = 1{,}5F; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N_2 = 1{,}41 N_1; \\ 2{,}12 N_1 = 1{,}5F; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N_1 = 0{,}71F; \\ N_2 = F. \end{cases}$$

ПРИМЕР 8.

В конструкции абсолютно жесткий брус должен быть закреплен с помощью шарнирно неподвижной опоры и двух стальных стержней. Длина одного из стержней короче проектной длины на величину $\delta = 1 мм$. Определить напряжения, возникающие в стержнях после сборки конструкции (монтажные напряжения), если: $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^5 МПа$; $A_1 = 3 см^2$; $A_2 = 4 см^2$, остальные данные указаны на рис. 13.

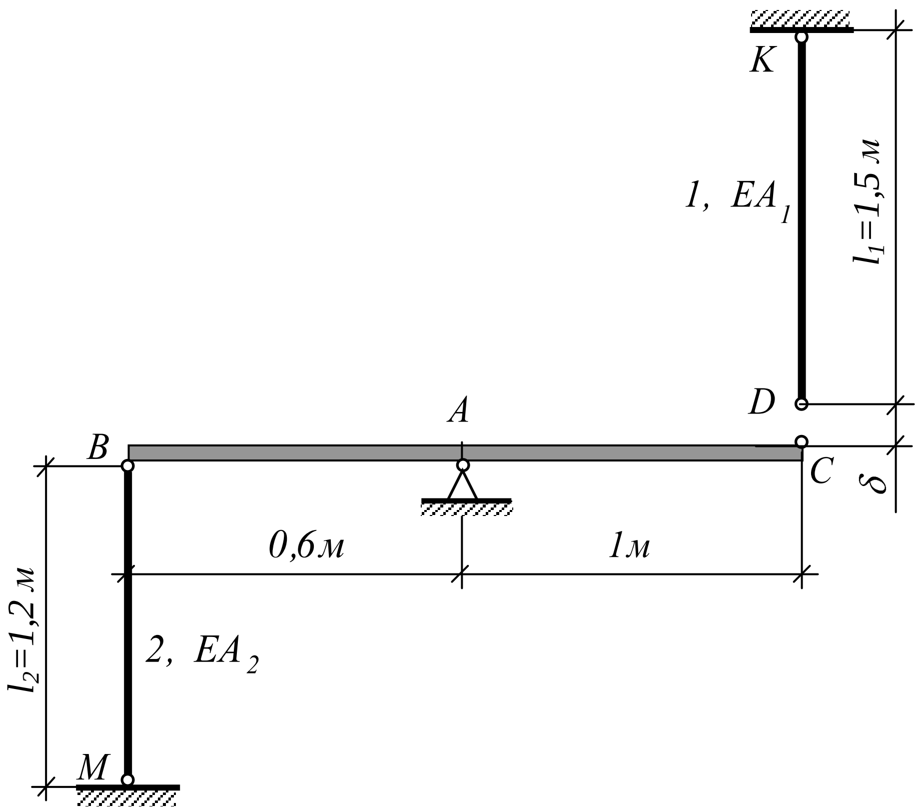
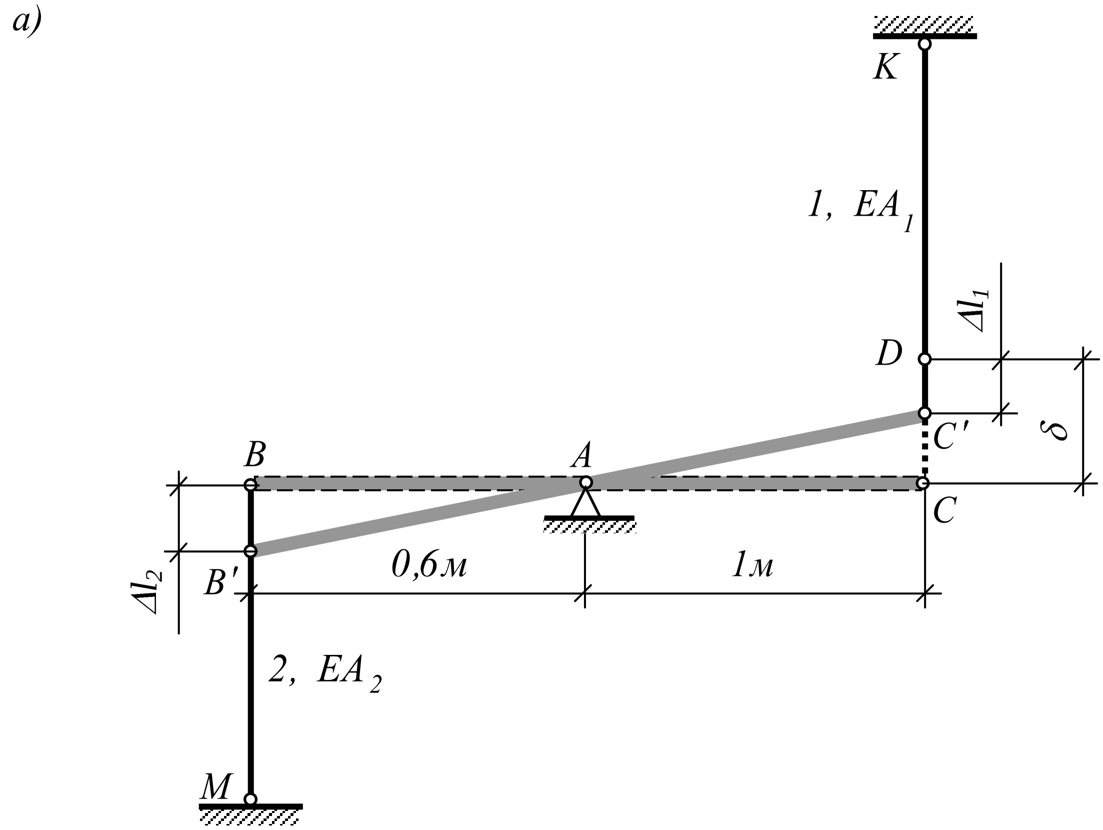


Рис. 13.

Для сборки конструкции нагреваем стержень DK и соединяем точку D с точкой C, в результате стержень DK получит удлинение δ и станет обозначаться CK (рис. 14, а). В процессе охлаждения данный стержень попытается укоротиться и вернуться к исходной длине. Однако этому будет препятствовать стержень BM, в результате чего недеформируемый брус BC повернется вокруг шарнира A на некоторый угол. При этом точка B стержня BM перемесится вниз в точку B', стержень укоротиться на величину $BB' = \Delta l_2$, следовательно, в нем возникнет усилие сжатия N_2 (рис. 14, б). Стержень CK после охлаждения не вернется к своей первоначальной длине DK, а будет иметь новую длину $C'K$, причем его абсолютная деформация удлинения теперь будет равна $DC' = \Delta l_1$, а возникающее при этом усилие

N_1 - растягивающее. Кроме того, в шарнирно-неподвижной опоре будут возникать реакции R_A и H_A.



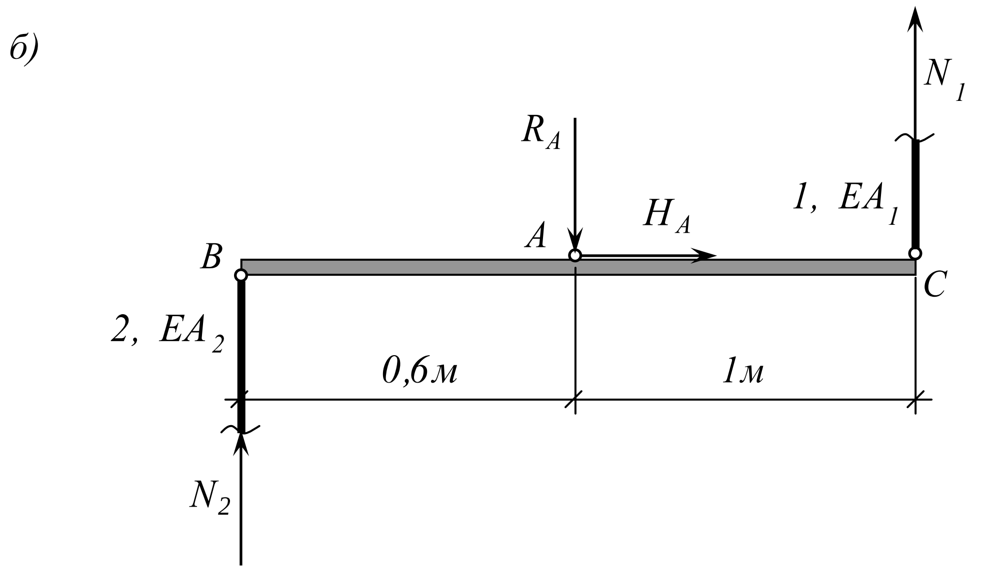


Рис. 14.

Таким образом, задача один раз статически неопределима, поскольку, также как и в предыдущем примере, для определения неизвестных усилий и реакций опоры можно составить только три независимых уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum M_A = 0. \end{cases} \tag{35}$$

Так как напряжения в стержнях системы определяются по формуле (1):

$$\sigma_z = \frac{N}{A},$$

то для решения задачи необходимо знать только усилия в стержнях, а реакции не обязательно. Тогда, как и раньше, оставим в рассмотрении только одно уравнение равновесия:

$$\sum M_A = 0, \qquad \sum M_A = -N_1 \cdot 1 + N_2 \cdot 0{,}6 = 0;$$

$$N_1 = 0{,}6 N_2. \tag{36}$$

Рассмотрим подобие треугольников $\Delta ABB'$ и $\Delta ACC'$, то есть:

$$\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC}, \tag{37}$$

Учитывая, что $BB' = \Delta l_2$; $CC' = \delta - \Delta l_1$; $AB = 0{,}6 м$; $AC = 1 м$, получим:

$$\frac{\Delta l_2}{0{,}6} = \frac{\delta - \Delta l_1}{1},$$

или

$\Delta l_2 = 0{,}6$ [redacted] $\cdot 10^{-3} - \Delta l_1$. (38)

Выражение (38) является уравнением совместности деформации для данной задачи, которое с учетом формулы (4) примет вид:

$$\frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = 0{,}6 \left[1 \cdot 10^{-3} - \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} \right]. \tag{39}$$

Подставляя исходные данные задачи, получим:

$$\begin{cases} N_1 = 0{,}6 N_2; \\ \dfrac{N_2 \cdot 1{,}2}{2 \cdot 10^8 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 0{,}6 \left[1 \cdot 10^{-3} - \dfrac{N_1 \cdot 1{,}5}{2 \cdot 10^8 \cdot 3 \cdot 10^{-4}} \right]; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N_1 = 15 кН, \\ N_2 = 25 кН. \end{cases}$$

Напряжения в стержнях вычисляем по формуле (1):

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{15}{3\cdot10^{-4}} = 50МПа; \qquad \sigma_2 = \frac{-N_2}{A_1} = \frac{-25}{4\cdot10^{-4}} = -62{,}5МПа.$$

Поскольку второй стержень сжат, то в нем возникают сжимающие напряжения, на что указывает знак "минус".

ПРИМЕР 9.

Конструкция, состоящая из абсолютно жесткого бруса AB и поддерживающих его стержней 1 и 2, нагревается на 60^0C. *Стержень № 1* - стальной площадью $A_1 = 20см^2$, коэффициент температурного расширения стали $\alpha_1 = \alpha_{ст} = 1{,}25\cdot10^{-5}\frac{1}{^0C}$, *стержень № 2* - медный, площадью сечения $A_2 = 80см^2$, коэффициент температурного расширения меди $\alpha_2 = \alpha_м = 1{,}65\cdot10^{-5}\frac{1}{^0C}$. Определить возникающие в стержнях конструкции напряжения. Конструкция изображена на рис. 15.

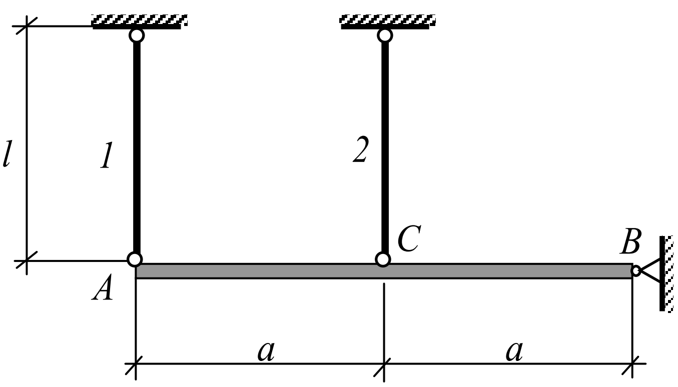


Рис. 15.

В результате температурных воздействий в стержнях конструкции будут возникать внутренние усилия N_1 и N_2, а в шарнирно неподвижной опоре B реакции R_B и H_B. Прежде чем непосредственно перейти к составлению уравнений статики и совместности деформаций, выясним, какие усилия будут возникать стержнях: растягивающие или сжимающие.

Предположим, что конструкцию нагревали до сборки, когда абсолютно жесткого бруса AB еще не было. Тогда стержни бы получили удлинения $AA_2 = \Delta l_{T,1}$ и $BB_2 = \Delta l_{T,2}$ (рис. 16, а). После этого к ним присоединили брус AB, и попытались привести конструкцию к виду, изображенному на рис. 15. В результате брус AB повернулся вокруг шарнира B на некоторый угол и занял некоторое промежуточное положение, при котором точка A_1 переместилась в точку A_2, а точка C_1 - в точку C_2 (рис. 16, б).

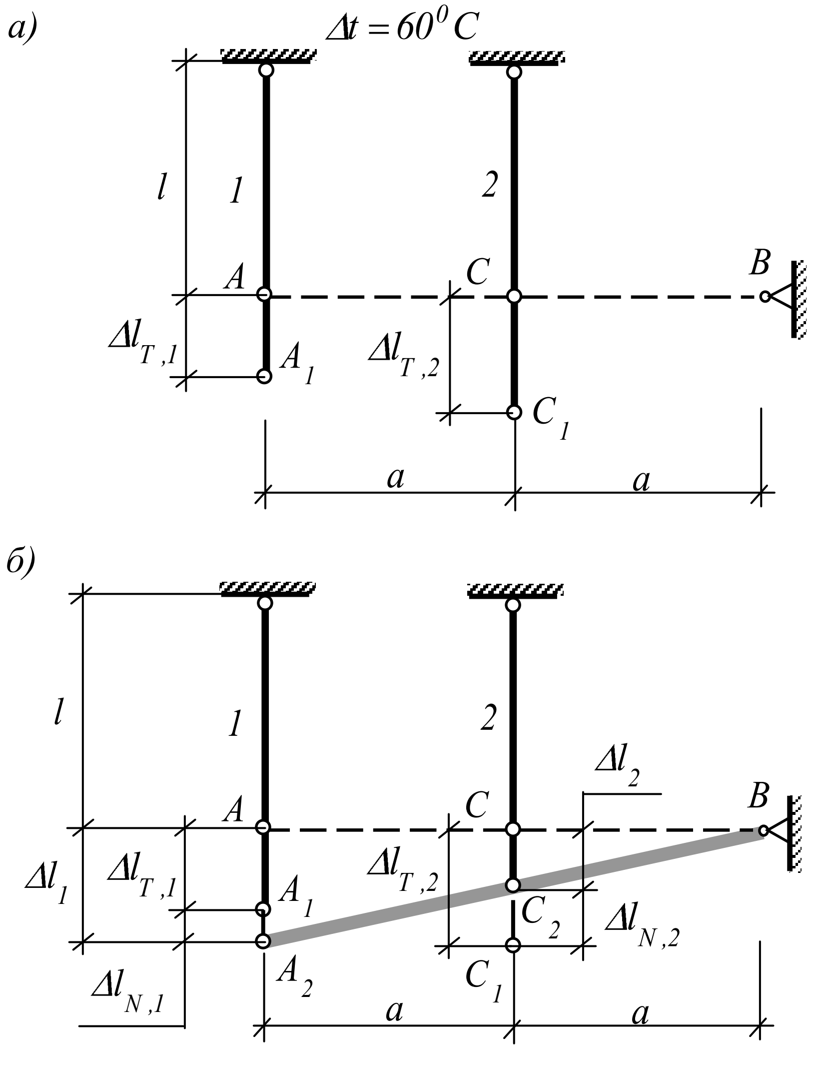


Рис. 16

Как видно из рисунка 16, (*б*), полная деформация стержня 1, равная длине отрезка $AA_2 = \Delta l_1$, будет удлинением, а полная деформация стержня 2, равная длине отрезка $CC_2 = \Delta l_2$, будет укорочением. Таким образом, усилие в стержне 1 будет растягивающим, а стержне 2 - сжимающим (рис. 17).

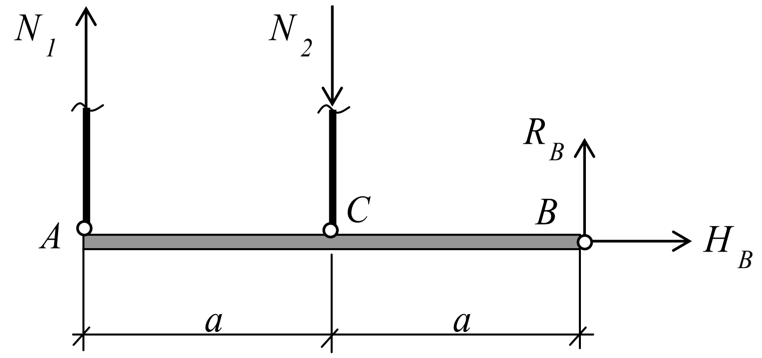


Рис. 17

Для определения неизвестных можно использовать только три независимых уравнения статики:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum M_B = 0. \end{cases} \qquad (40)$$

Поскольку в данной задаче нам необходимо знать только усилия в стержнях N_1 и N_2, то оставляем уравнение равновесия, не содержащее реакции опоры B. В результате остается уравнение моментов, которое запишется в виде:

$$\sum M_B = N_1 \cdot 2a - N_2 \cdot a = 0,$$

откуда

$$N_2 = 2N_1. \qquad (41)$$

Уравнение совместности деформаций получим из подобия треугольников ΔABA_2 и ΔCBC_2:

$$\frac{AB}{AA_2} = \frac{CB}{CC_2}. \qquad (42)$$

Распишем каждый член пропорции:

$$AB = 2a; \quad CB = a; \quad AA_2 = \Delta l_1 = \Delta l_{T,1} + \Delta l_{N,1}; \quad CC_2 = \Delta l_2 = \Delta l_{T,2} - \Delta l_{N,2}, \qquad (43)$$

где Δl_1 и Δl_2 – полные деформации соответственно первого и второго стержней; $\Delta l_{T,1}$ и $\Delta l_{T,2}$ – деформации первого и второго стержней, вызванные температурой, определяются по формуле (20); $\Delta l_{N,1}$ и

$\Delta l_{N,2}$ и - деформации, которые получили стержни в процессе сборки конструкции, определяются по формуле (4).

Подставляя теперь (43) в (42) получаем уравнение совместности деформаций в общем виде:

$$\frac{2}{\Delta l_{T,1} + \Delta l_{N,1}} = \frac{1}{\Delta l_{T,2} - \Delta l_{N,2}}$$

или

$$\Delta l_{T,1} + \Delta l_{N,1} = 2 \cdot (\Delta l_{T,2} - \Delta l_{N,2}). \quad (44)$$

Преобразуем уравнение (44) с учетом исходных данных и формул (20) и (4):

$$\Delta t \cdot \alpha_1 \cdot l + \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = 2 \cdot \left(\Delta t \cdot \alpha_2 \cdot l - \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} \right), \quad (45)$$

$$60 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-5} + \frac{N_1}{2 \cdot 10^8 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 2 \cdot \left(60 \cdot 1{,}65 \cdot 10^{-5} + \frac{N_2}{1 \cdot 10^8 \cdot 80 \cdot 10^{-4}} \right),$$

$$N_1 + N_2 = 492. \quad (46)$$

В результате получили систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} N_2 = 2N_1 \\ N_1 + N_2 = 492, \end{cases} \quad (47)$$

решение которой имеет вид:

$$\begin{cases} N_1 = 164 кН, \\ N_2 = 328 кН. \end{cases}$$

Согласно (1) напряжения в стержнях равны:

$$\sigma_{z,1} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{164 \cdot 10^2 кг}{20 см^2} = 820 кг/см^2,$$

$$\sigma_{z,2} = -\frac{N_2}{A_2} = \frac{328 \cdot 10^2 кг}{80 см^2} = -410 кг/см^2.$$

Знак "минус" указывает на то, что напряжения в стержне 2 сжимающие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. – М.: Издательство "Наука", 1965. - 856 с.

2. Варданян Г.С. и др. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. – М.: Издательство АСВ, 1995. - 575 с.

3. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. – М.: "Высшая школа", 1989. - 624 с.

4. Качурин В.К. Сборник задач по сопротивлению материалов. – М.: Издательство "Наука", 1970. - 432 с.

5. Саргсян А.Е. Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности. Основы теории с примерами расчетов. – М.: Издательство АСВ, 1998. - 240 с.

6. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Том 1. – М.: Издательство "Наука", 1965. - 363 с.

7. Пономарев А.Т., Зорин В.А. Сопротивление материалов. Курс лекций. Учебное пособие. – М.: Приор-издпт, 2002. – 336 с.

8. В.З. Васильев. Краткий курс сопротивления материалов с основами теории упругости. Учебное пособие. – СПб.: Иван Федоров, 2001. – 256 с.