



TyumGASU.ru

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОУВПО ТЮМЕНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ



КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

*МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ*

ПО

**СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ**

ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ:

«ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ

ДЛЯ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ».

ДЛЯ СТУДЕНТОВ

ЗАОЧНОЙ И ДИСТАНЦИОННОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

ТЮМЕНЬ – 2004 ГОД

Методические указания по теме «Построение эпюр внутренних усилий для прямолинейных стержней», разработаны доцентом кафедры строительной механики Куриленко Е.Ю.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения всех инженерных специальностей.

Тюмень, ТюмГАСА, 2004г., методические указания – издания первое.

Рецензент: доцент, к.ф.–м.н Нарута Т.А.  
(Степень, звание, фамилия, имя, отчество)

Учебно-методический материал утвержден на заседании кафедры:

протокол № \_\_\_\_\_ от «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2004 г.

Учебно-методический материал утвержден УМС ТюмГАСА:

протокол № \_\_\_\_\_ от «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2004г.

Тираж \_\_\_\_\_ экземпляров

**СОДЕРЖАНИЕ:**

1. Объекты изучения сопротивления материалов.....	4стр.
2. Нагрузки.....	4стр.
3. Связи.....	5стр.
4. Внутренние усилия.....	6стр.
5. Определение внутренних усилий.....	7стр.
6. Эпюры внутренних усилий.....	12стр.
7. Дифференциальные зависимости между внешними нагрузками и внутренними усилиями.....	12стр.
8. Виды деформаций стержня.....	14стр.
9. Метод характерных сечений.....	14стр.
10.Примеры построения эпюр.....	17стр.
Задачи для самоконтроля.....	28стр.
Литература.....	31стр.

## 1. ОБЪЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ.

Основным объектом изучения в курсе сопротивления материалов является стержень - элемент, длина  $\ell$  которого значительно превосходит два других размера (характерные размеры поперечного сечения  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{h}$ ). (Рис. 1).

Многие сложные конструкции могут рассматриваться состоящими из элементов, имеющих форму стержня. Их называют стержневыми системами.

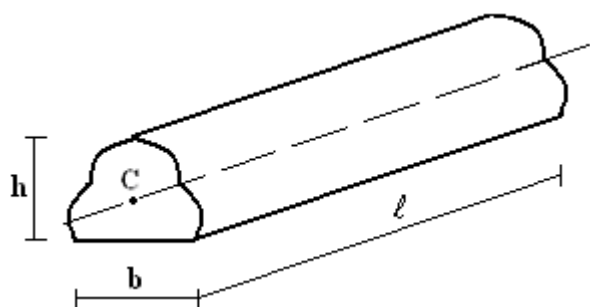


Рис.1

Линию, проходящую через центры тяжести поперечных сечений, называют осью стержня. В свою очередь поперечное сечение всегда перпендикулярно оси. В зависимости от формы оси стержень может быть прямым, кривым или пространственно-изогнутым.

Наиболее часто в строительной практике встречаются стержни с прямолинейной осью (прямой брус). В зависимости от

назначения и роли, выполняемой стержнем в конструкции, различают:

*колонны и стойки* – вертикальные стержни, работающие преимущественно на сжатие;

*балки* – стержни, работающие на изгиб;

*подвески, затяжки, оттяжки* – стержни, воспринимающие осевые растягивающие усилия;

*валы* – стержни, испытывающие кручение.

## 2. НАГРУЗКИ.

Все усилия, участвующие в работе бруса, делятся на внешние и внутренние. К внешним силам относятся заданные нагрузки, а также вызываемые ими опорные реакции. Нагрузки, с которыми приходится иметь дело в сопротивлении материалов, представляют собой силы или пары сил. Они могут быть сосредоточенными или распределенными по длине, поверхности, объему (рис.2).

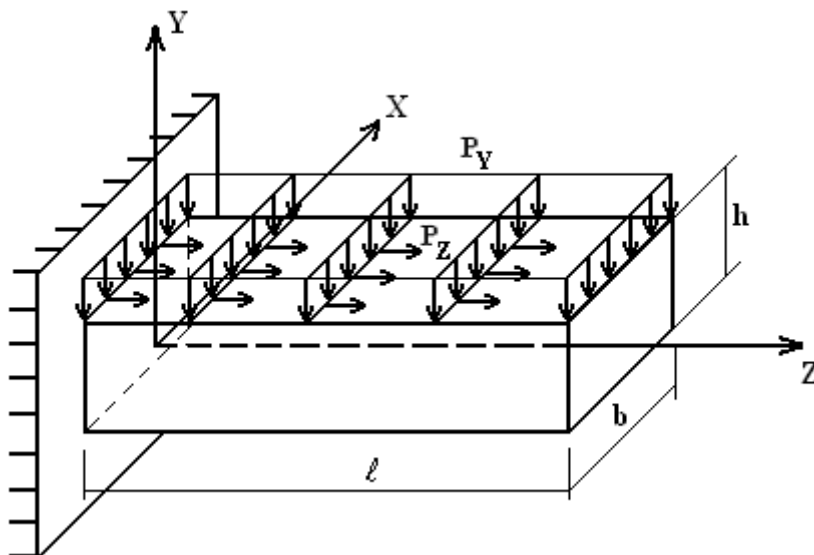


Рис.2

В практических расчетах все внешние нагрузки переносят на ось стержня. В результате такого приведения получают расчетную схему стержня (рис.3).

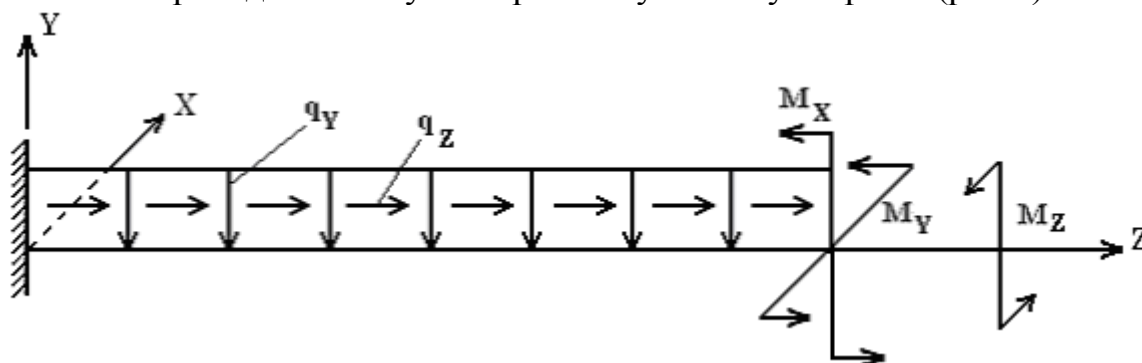


Рис.3

Размерность нагрузок:

1) сосредоточенные нагрузки:

- а) силы  $\mathbf{F}$  (с компонентами  $F_x, F_y, F_z$ ) измеряются в единицах силы – ньютон (Н), килоньютон (кН);
- б) пары сил (с компонентами  $M_x, M_y, M_z$ ) измеряются в единицах силы, умноженных на единицу длины: Н·м, кН·м.

2) Распределенные нагрузки:

- а) объемно-распределенные нагрузки с интенсивностью  $\mathbf{f}$  ( $f_x, f_y, f_z$ ) имеют размерность  $[F \cdot \ell^{-3}]$ : Н/м<sup>3</sup>, кН/м<sup>3</sup>;
- б) поверхностно-распределенные с интенсивностью  $\mathbf{p}$  (с компонентами  $p_x, p_y, p_z$ ) имеют размерность  $[F \cdot \ell^{-2}]$ : Н/м<sup>2</sup>, кН/м<sup>2</sup>;
- в) линейно-распределенные с интенсивностью  $\mathbf{q}$  (с компонентами  $q_x, q_y, q_z$ ) имеют размерность  $[F \cdot \ell^{-1}]$ : Н/м, кН/м;
- г) распределенные пары сил с интенсивностью  $\mathbf{m}$  (с компонентами  $m_x, m_y, m_z$ ) имеют размерность силы: Н; кН.

По продолжительности действия нагрузки делятся на постоянные, действующие в течение всего времени существования конструкции (например, собственный вес) и временные, действующие на протяжении лишь некоторого промежутка времени (например, атмосферные нагрузки – снеговая и ветровая).

По характеру действия различают нагрузки статические, прилагаемые к брусу настолько медленно, что можно пренебречь вызываемыми ими ускорениями перемещений частиц бруса, и динамические, связанные с возникновением больших ускорений. В дальнейшем будем рассматривать статическое нагружение стержня.

### 3. СВЯЗИ.

Для обеспечения неподвижности одного тела относительно другого в одной плоскости необходимо наличие трех связей в виде шарнирно закрепленных, не пересекающихся в одной точке и не параллельных друг другу стержней. В связи с этим различают три вида опор.

- 1) жесткое защемление или жесткая заделка, которая сводится к наложению на этот конец трех связей (рис.4,а);
- 2) шарнирно-неподвижная опора, равносильная наложению двух связей (рис.4,б, сечение В);
- 3) шарнирно-подвижная опора, равносильная наложению одной связи (рис. 4,б, сечение Д).

При нагружении стержня в пространстве число необходимых связей увеличивается до 6.

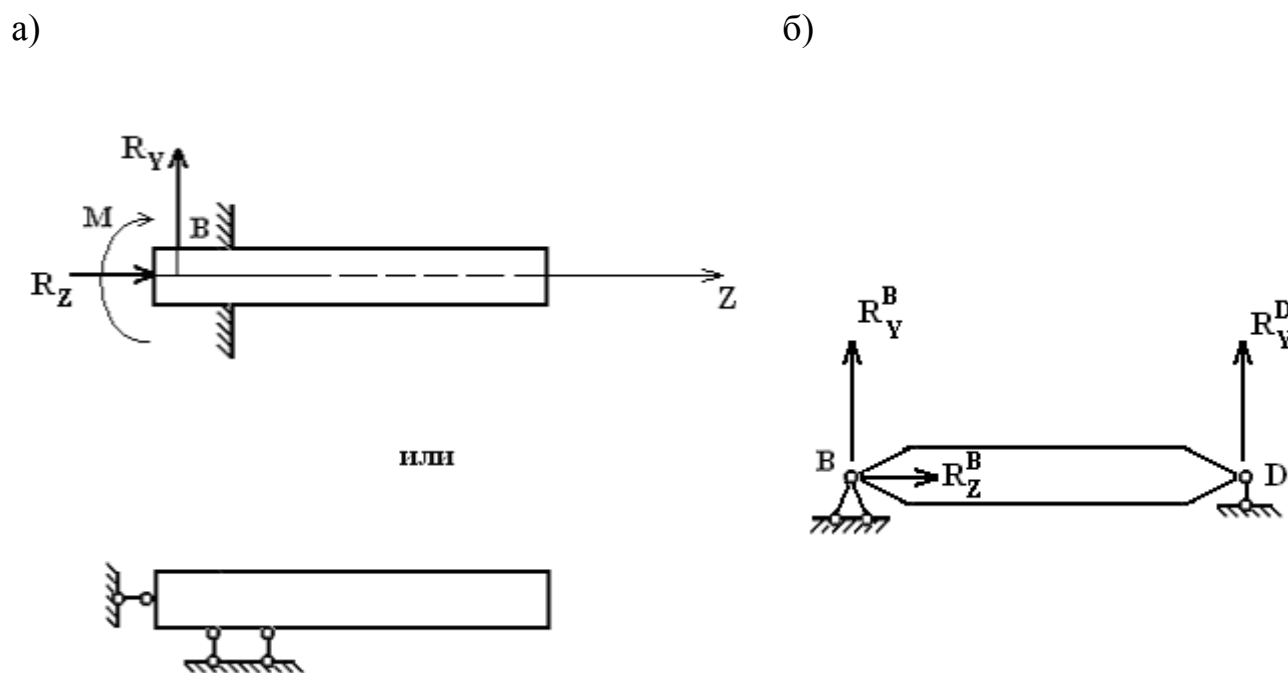


Рис.4

В приведенных примерах число неизвестных опорных реакций соответствует числу независимых уравнений равновесия. Такие стержни, не имеющие лишних закреплений, носят название статически определимых.

Стержни, в которых число неизвестных реакций превышает число уравнений равновесия, называются статически неопределимыми. Для определения реакций в этом случае необходимо к уравнениям равновесия привлекать дополнительные уравнения, которые носят название уравнений совместности деформаций.

#### 4. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ.

Под действием внешних сил между отдельными смежными частицами внутри объекта возникают внутренние силы. Их можно выявить, если рассечь мысленно стержень на две части сечением, перпендикулярным оси (рис.5,а)

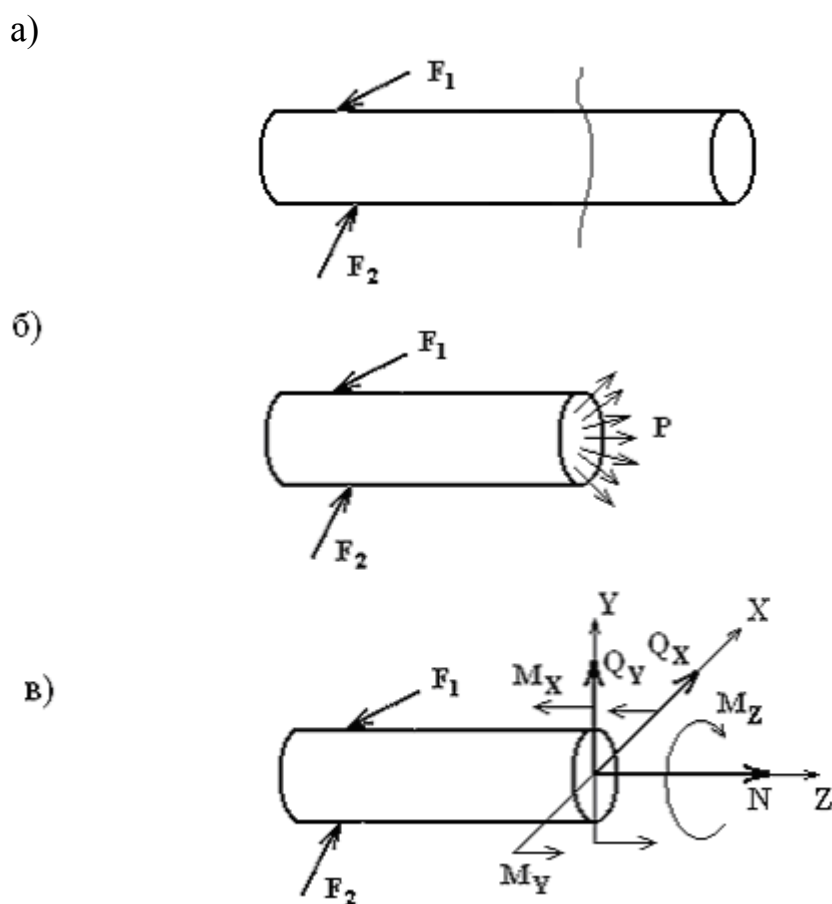


Рис.5

Так как связи между выделенными частями тела устранены, необходимо действие правой части на левую и левой на правую заменить в сечении системой сил  $P$  (рис.5,б) Эти внутренние силы распределены по всей площади сечения и закон распределения этих сил мы пока установить не можем. Однако ясно, что они должны быть такими, чтобы удовлетворялись условия равновесия оставленной части.

Приведем систему сил  $P$  к центру тяжести сечения. В результате получим главный вектор  $R$  и главный момент  $M$ . Выберем далее систему координат  $X, Y, Z$ . Ось  $Z$  направим по нормали к сечению: оси  $X, Y$  расположим в его плоскости. Спроекти-

ровав главный вектор и главный момент на оси  $X, Y, Z$ , получим шесть составляющих: три силы ( $N, Q_x, Q_y$ ) и три момента ( $M_z, M_x, M_y$ ) (рис.5,в). Эти составляющие называются внутренними силовыми факторами или внутренними усилиями в сечении бруса. Каждая составляющая имеет свое название:

$N$  – продольная (нормальная сила) – проекция главного вектора на ось  $Z$ ;

$Q_x, Q_y$  – поперечные (перерезывающие) силы – проекции главного вектора на главные центральные оси поперечного сечения  $X, Y$ ;

$M_z$  или  $M_k$  – крутящий момент – проекция главного момента на ось  $Z$ ;

$M_x, M_y$  – изгибающие моменты – проекции главного момента на главные центральные оси поперечного сечения  $X, Y$ .

### 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ.

При определении внутренних усилий используют специальный прием, являющийся основным в сопротивлении материалов и носящий название метода сечений. Его сущность заключается в следующем:

- 1) Брус в интересующем месте мысленно рассекают на две части, плоскостью перпендикулярной оси стержня (рис.5,а).
- 2) Одну часть отбрасывают.
- 3) Действие отброшенной части заменяют усилиями  $N, Q_x, Q_y, M_z, M_x, M_y$  (рис.5,в).
- 4) Из условий равновесия оставшейся части определяют численное значение внутренних усилий.

#### Пример 1.

Определить внутренние усилия в сечении А стержня, изображенного на рис. 5,а.

#### Решение:

Рассмотрим сначала сечение в т.А.

1) Рассечем стержень на две части и отбросим одну из них. Отбрасывать можно любую часть, но если стержень имеет жесткую заделку, то отбрасывать лучше ту часть, которая содержит жесткую заделку.

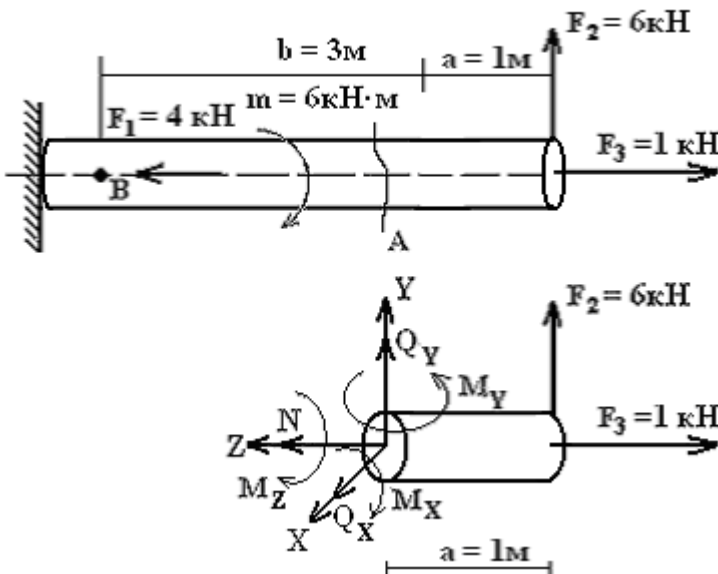


Рис.6

2) Поместим в проведенном сечении систему координат  $X, Y, Z$  и покажем внутренние усилия  $N, Q_x, Q_y, M_z, M_x, M_y$ , которые смогут возникнуть в данном сечении при отбрасывании одной части стержня (рис.6,б).

3) Запишем шесть уравнений статики и их решения:



$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0; & Q_x &= 0; \\ \sum F_{ky} &= 0; & Q_y + F_2 &= 0; & Q_y &= -F_2 = -6 \text{ кН}; \\ \sum F_{kz} &= 0; & N - F_3 &= 0; & N &= F_3 = 1 \text{ кН}; \\ \sum \text{mom}_x &= 0; & M_x - F_2 \cdot a &= 0; & M_x &= F_2 \cdot a = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ \sum \text{mom}_y &= 0; & M_y &= 0; \\ \sum \text{mom}_z &= 0; & M_z &= 0. \end{aligned}$$

Внутренние усилия в сечении **A** найдены.

Можно определять внутренние усилия немного проще и быстрее, если выписывать не уравнения статики, а сразу их решения. Для этого надо руководствоваться определенными правилами.

1. Продольная сила **N** в поперечном сечении прямого бруса равна сумме проекций на его ось (**Z**) всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

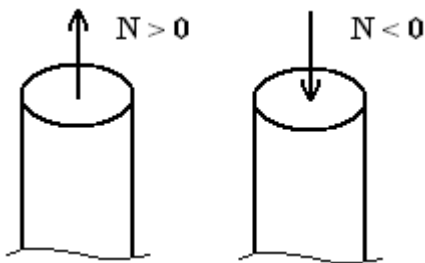


Рис.7

Правило знаков.

Проекция внешней силы, вызывающая растяжение оставшейся части, создает продольную силу положительного знака. Положительная продольная сила направлена от сечения, сжимающая - к сечению. (Рис.7).

2. Поперечная (перерезывающая) сила **Q<sub>y</sub>** в произвольном сечении балки равна алгебраической сумме всех внешних сил, проектирующихся на ось **Y**, приложенных по одну сторону (левую или правую) от рассматриваемого сечения балки.

Правило знаков. Внешняя сила, вызывающая вращение оставшейся части балки по ходу часовой стрелки вокруг проведенного сечения вызывает в этом сечении поперечную силу положительного знака. (Рис.8).

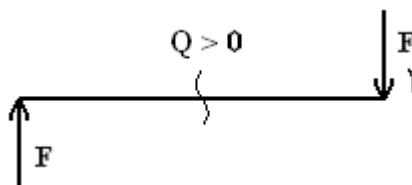
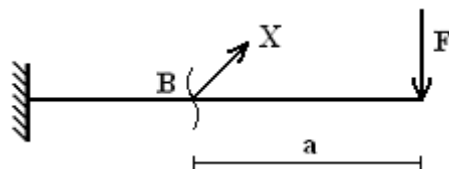


Рис.8

3. Изгибающий момент **M<sub>x</sub>** равен алгебраической сумме моментов всех внешних нагрузок, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения относительно оси **X**. Поскольку ось **X** перпендикулярна поперечному сечению, то фактически мы будем далее вычислять моменты сил относительно самого сечения (рис.9,а).

а)



б)

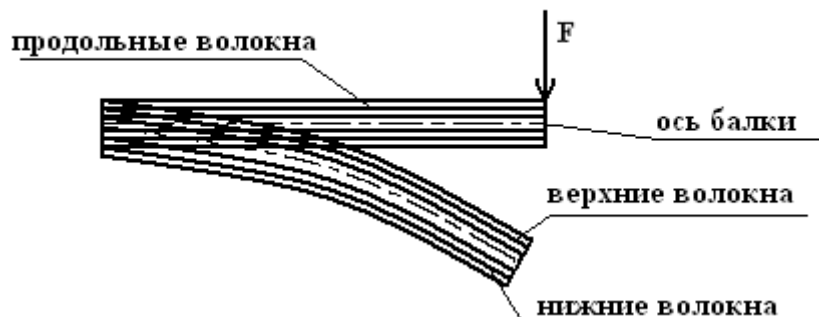


Рис.9

Правило знаков. Представим себе, что стержень состоит из бесконечно большого количества бесконечно тонких волокон, параллельных оси стержня, которые в дальнейшем будем называть продольными волокнами. При действии на балку вертикальной силы длина этих волокон будет меняться. Например, сила, изображенная на рис.9. деформирует балку так, что волокна, находящиеся выше оси балки, становятся длиннее, а находящиеся ниже оси – короче. В таком случае говорят, что сила растягивает верхние волокна.

Изгибающий момент  $M_X$  положителен, если соответствующие внешние нагрузки растягивают нижние волокна (рис.10).

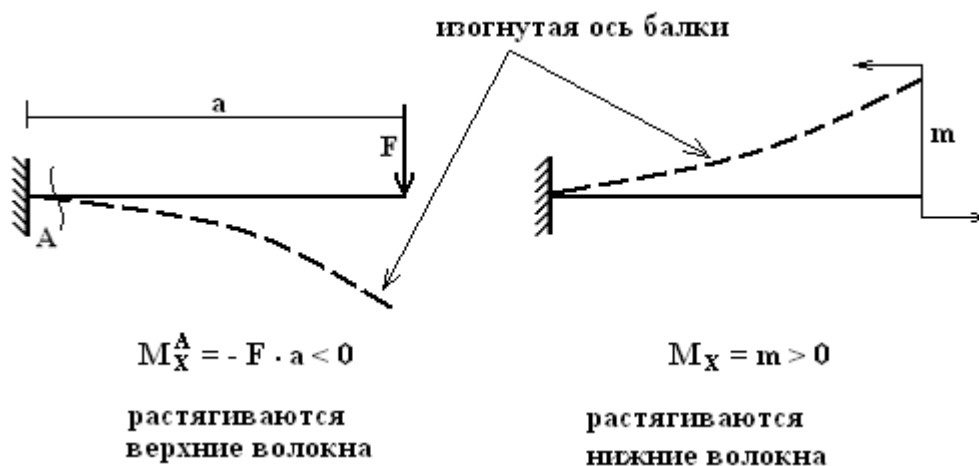


Рис. 10

Поперечная сила  $Q_X$  определяется аналогично силе  $Q_Y$ , а изгибающий момент  $M_Y$  – аналогично моменту  $M_X$ .

4. Крутящий момент  $M_Z$  равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно оси  $Z$ .

Правило знаков. Крутящий момент считается положительным, если при взгляде на сечение со стороны внешней нормали он направлен по ходу часовой стрелки (рис.11).

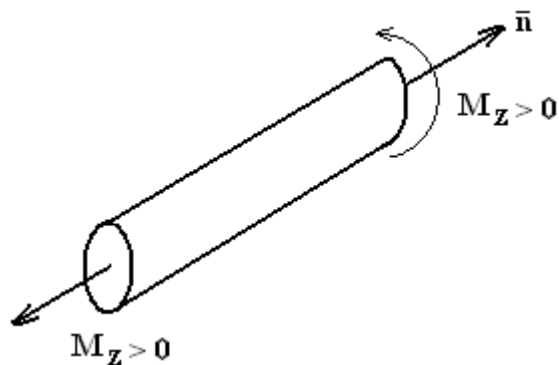


Рис.11

Пример 2.

Определить внутренние усилия в сечении **В** стержня, изображенного на рис.5,а.

Решение:

Будем решать задачу, руководствуясь вышеизложенными правилами.

- 1) Проведем через **т.В** сечение и отбросим часть стержня с жесткой заделкой.
- 2) Поместим в сечение **В** систему координат (рис.12).

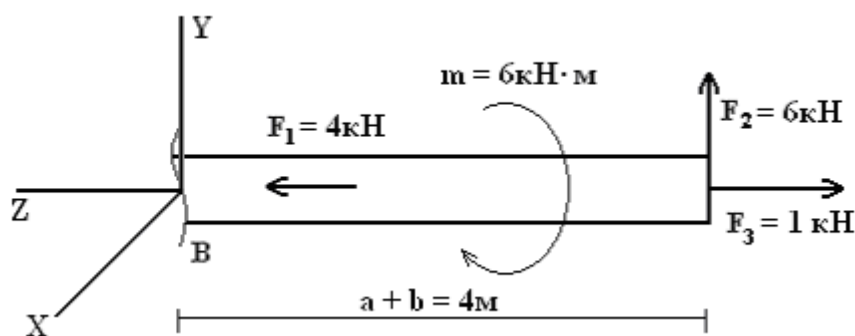


Рис.12

- 3) Получим продольную силу **N**, суммировав все силы, лежащие на оси **Z**. При этом силу **F<sub>3</sub>** берем со знаком «+», так как она растягивает продольные волокна, а силу **F<sub>1</sub>** со знаком «-», так как она продольные волокна сжимает.

$$N = F_3 - F_1 = 1 - 4 = -3\text{кН}$$

Силу **Q<sub>Y</sub>** получим, суммируя все силы, параллельные оси **Y**. Так как сила **F<sub>2</sub>** поворачивает брус вокруг сечения **В** против часовой стрелки, берем ее со знаком «-».

$$Q_Y = -F_2 = -6\text{кН}$$

Сила **Q<sub>X</sub> = 0**, так как силы, параллельные оси **X**, на стержень не действуют.

Крутящий момент **M<sub>Z</sub>** будет создавать только пара сил **m**. Если смотреть на сечение **В** со стороны оси **Z**, то направление пары сил **m** будет совпадать с направлением часовой стрелки, поэтому принимаем знак «+».

$$M_Z = m = 6\text{кН} \cdot \text{м}.$$

Изгибающий момент **M<sub>X</sub>** будет возникать только от действия силы **F<sub>2</sub>**. Она растягивает нижние волокна, принимаем знак «+».

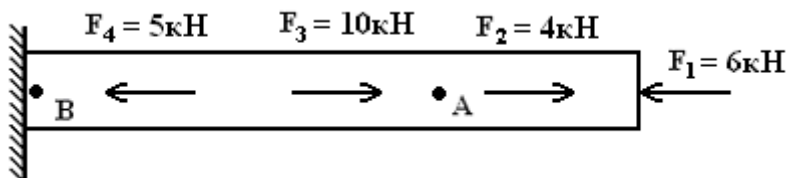
$$M_X = F_2(a + b) = 6 \cdot 4 = 24\text{кН} \cdot \text{м}.$$

Силы, создающие момент относительно оси **Y**, на брус не действуют, поэтому **M<sub>Y</sub> = 0**.

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ.

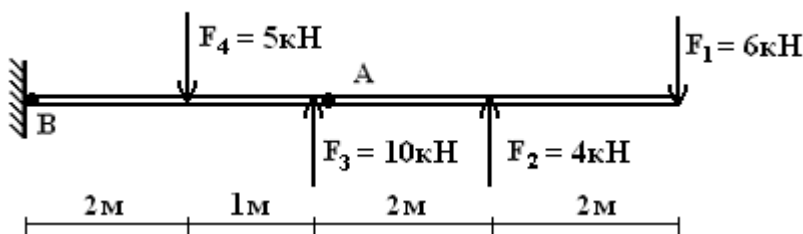
Для всех изображенных ниже стержней, определить внутренние усилия в сечениях **А** и **В**.

1)



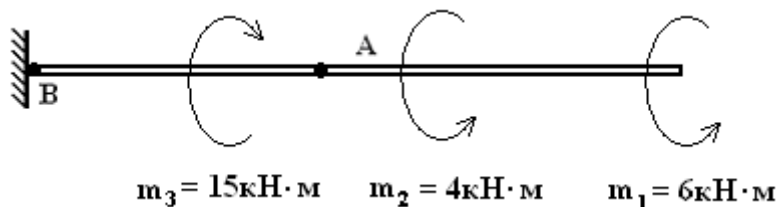
Ответ: в сечении **А**:  $N = -2\text{кН}$ ;  $Q_X = Q_Y = 0$ ;  $M_Z = M_X = M_Y = 0$ ; в сечении **В**:  $N = +3\text{кН}$ ;  $Q_X = Q_Y = M_Z = M_X = M_Y = 0$ .

2)



Ответ: в сечении **А**:  $Q_Y = 2\text{кН}$ ;  $N = Q_X = 0$ ,  $M_X = -16\text{кН}\cdot\text{м}$ ;  $M_Z = M_Y = 0$ ; в сечении **В**:  $Q_Y = -3\text{кН}$ ;  $N = Q_X = 0$ ,  $M_X = -2\text{кН}\cdot\text{м}$ ;  $M_Z = M_Y = 0$ .

3)



Ответ: в сечении **А**:  $N = Q_X = Q_Y = 0$ ;  $M_X = M_Y = 0$ ;  $M_Z = -10\text{кН}\cdot\text{м}$ ; в сечении **В**:  $N = Q_X = Q_Y = 0$ ;  $M_X = M_Y = 0$ ;  $M_Z = 5\text{кН}\cdot\text{м}$ .

### 6. ЭПЮРЫ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ.

Из всех рассмотренных выше примеров следует, что значение внутренних усилий меняется при переходе от одного сечения к другому. При расчете стержня на прочность необходимо будет определить наибольшее значение внутренних усилий. Сечения стержня, в которых внутренние усилия достигают наибольших значений, называются опасными. Определить положения опасных сечений проще всего, построив графики распределения внутренних усилий вдоль оси стержня. Такие графики называются эпюрами.

Существуют два метода построения эпюр – аналитический метод и метод характерных сечений.

Сущность аналитического метода в том, что для установления закона изменения внутренних усилий по длине бруса составляют их аналитические выражения в виде функций от положения сечения, т.е. его координаты **Z**.

После того, как составлены выражения, координатам  $Z$  дают последовательно конкретные значения, мысленно перемещая сечение, и вычисляют соответствующие значения (ординаты) внутренних усилий, откладывая их в принятом масштабе. Таким образом, эпюры представляют собой графики изменения функций внутренних усилий вдоль длины стержня.

Аналитический метод построения эпюр подробно рассмотрен во всех учебниках по сопротивлению материалов, поэтому в этом пособии будет рассмотрен только второй метод – метод характерных сечений. Этот метод позволяет максимально сократить и упростить процесс построения эпюр.

### 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ВНЕШНИМИ НАГРУЗКАМИ И ВНУТРЕННИМИ УСИЛИЯМИ.

Рассматривая условия равновесия элемента прямолинейного стержня можно установить, что между внутренними усилиями и интенсивностью внешних нагрузок существуют следующие дифференциальные зависимости.

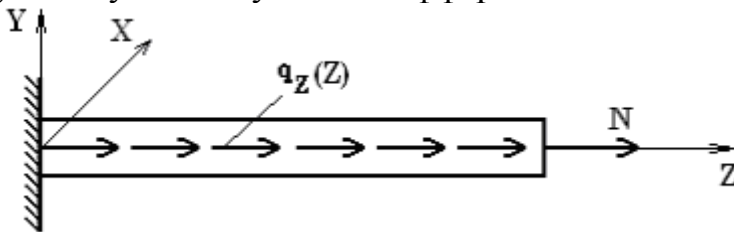


Рис. 13

$$\frac{dN}{dZ} = -q_z(Z) \quad (1)$$

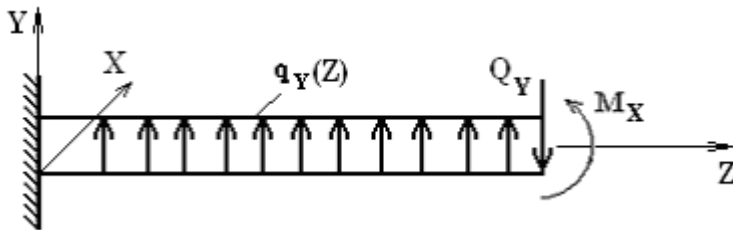


Рис.14

$$\frac{dQ_y}{dZ} = q_y(Z) \quad (2)$$

$$\frac{dM_x}{dZ} = -Q_y(Z) \quad (3)$$

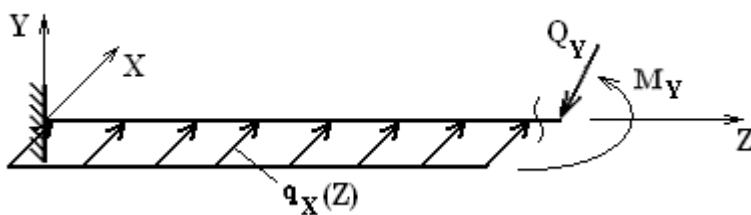


Рис.15

$$\frac{dQ_x}{dZ} = -q_x(Z) \quad (4)$$

$$\frac{dM_y}{dZ} = -Q_x(Z) \quad (5)$$

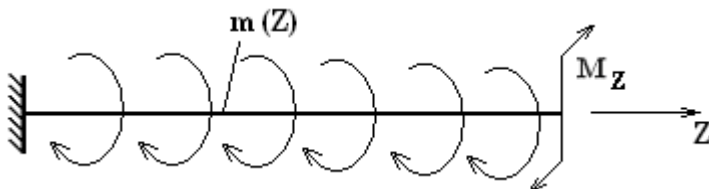


Рис.16

$$\frac{dM_z}{dZ} = -m(Z) \quad (6)$$

Выражения (1) – (6) представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения. Запишем их решения, предполагая, что нагрузки  $q_z, q_y, q_x$  и  $m$  распределены равномерно, то есть  $q_z, q_y, q_x, m = \text{const}$ . Получим

$$N(Z) = -q_z \cdot Z + C_1 \quad (7)$$

$$Q_Y(Z) = q_Y \cdot Z + C_2 \quad (8)$$

$$M_X(Z) = -q_Y \cdot Z^2 - C_2 \cdot Z + C_3 \quad (9)$$

$$Q_X(Z) = q_X Z + C_4 \quad (10)$$

$$M_Y(Z) = -q_X \cdot Z^2 - C_4 Z + C_5 \quad (11)$$

$$M_Z(Z) = -mZ + C_6 \quad (12)$$

Здесь  $C_1, C_2, \dots, C_6$  – постоянные интегрирования.

Анализируя выражения (7) – (12), можно сделать следующие выводы:

- 1) Если на участке стержня действует равномерно распределенная нагрузка  $q_Z(q_Y, q_X, m)$ , то внутренние усилия  $N(Q_Y, Q_X, M_Z)$  меняются на этих участках по закону прямой линии, а изгибающие моменты  $M_X(M_Y)$  – по закону квадратной параболы.
- 2) Если на участке стержня распределенная нагрузка отсутствует, то есть  $(q_Z, q_Y, q_X, m) = 0$ , то внутренние усилия  $N(Q_Y, Q_X, M_Z)$  на этих участках являются постоянной величиной, а изгибающие моменты  $M_X(M_Y)$  меняются по линейному закону.

Таким образом, функции, описывающие характер изменения того или иного внутреннего усилия, можно установить по виду внешней нагрузки. Это обстоятельство положено в основу метода характерных сечений.

## 8. ВИДЫ ДЕФОРМАЦИЙ СТЕРЖНЯ.

В общем случае нагружения стержня в его сечении возникает шесть внутренних усилий –  $N, Q_Y, Q_X, M_Z, M_X, M_Y$ .

Однако в реальных условиях нагружения могут встретиться случаи, когда некоторые внутренние усилия равны нулю. Такие виды деформации называются простыми.

Назовем некоторые из них:

- 1) Все внешние силы лежат на продольной оси стержня (рис.13). В этом случае только  $N \neq 0$ , а все остальные внутренние усилия равны нулю. Этот вид деформации называется осевым растяжением-сжатием.
- 2) Все внешние силы действуют перпендикулярно оси стержня: или только в вертикальной плоскости (рис. 14), или только в горизонтальной плоскости (рис.15). В этом случае отличны от нуля или только  $Q_Y, M_X$ , или только  $Q_X, M_Y$ ; остальные внутренние усилия равны нулю. Этот вид деформации называется плоским изгибом.
- 3) Все внешние силы создают пары сил относительно оси  $Z$  (рис.16). В этом случае только  $M_Z \neq 0$ , остальные внутренние усилия отсутствуют, вид деформации называется кручением.

Таким образом, по виду внешнего нагружения стержня можно определить вид деформации стержня, и, следовательно, выяснить, сколько и каких именно эпюр следует строить для рассматриваемого стержня.

## 9. МЕТОД ХАРАКТЕРНЫХ СЕЧЕНИЙ.

Основываясь на выводах, сделанных в пунктах 7 и 8, можно сформулировать план построения эпюры внутреннего усилия с помощью метода характерных сечений.

- 1) Определим вид деформации стержня с тем, чтобы выяснить, эпюру каких именно внутренних усилий следует построить в данной задаче (см. пункт 8).
- 2) Проведем ось, параллельную оси стержня, от которой будем откладывать полученные значения внутреннего усилия.
- 3) Разбиваем стержень на участки, в пределах которых внешняя нагрузка не изменяется; они называются участками загрузки.
- 4) Определяем внутреннее усилие в начале и конце каждого участка (см. пункт 5) и откладываем полученные значения от оси.
- 5) Соединяем отложенные от оси значения соответствующими линиями (см. пункт 7).
- 6) На полученной таким образом эпюре ставим знак, штрихуем ее (штриховка всегда идет перпендикулярно оси) и обозначаем.
- 7) Проверяем эпюру. Проверка эпюры состоит из двух этапов:
  - а. Проверка по дифференциальным зависимостям: еще раз проверяем, соответствует ли полученный график закономерностям, изложенных в пункте 7.
  - б. Проверка по скачкам: можно показать, что в тех сечениях, где приложены внешние сосредоточенные силы, на эпюрах соответствующих внутренних сил  $N(Q_Y, Q_X)$  появляются скачки (ступеньки) на величину внешней силы. В сечениях, где приложены внешние сосредоточенные моменты на эпюрах соответствующих моментов  $M_Z(M_X, M_Y)$  появляются скачки на величину приложенного внешнего момента. Для проверки эпюр удобно воспользоваться схемой 1.

Такова общая схема построения эпюры любого внутреннего усилия с помощью метода характерных сечений. Отдельные особенности, касающиеся эпюр конкретных внутренних усилий, будут рассмотрены ниже при решении задач.

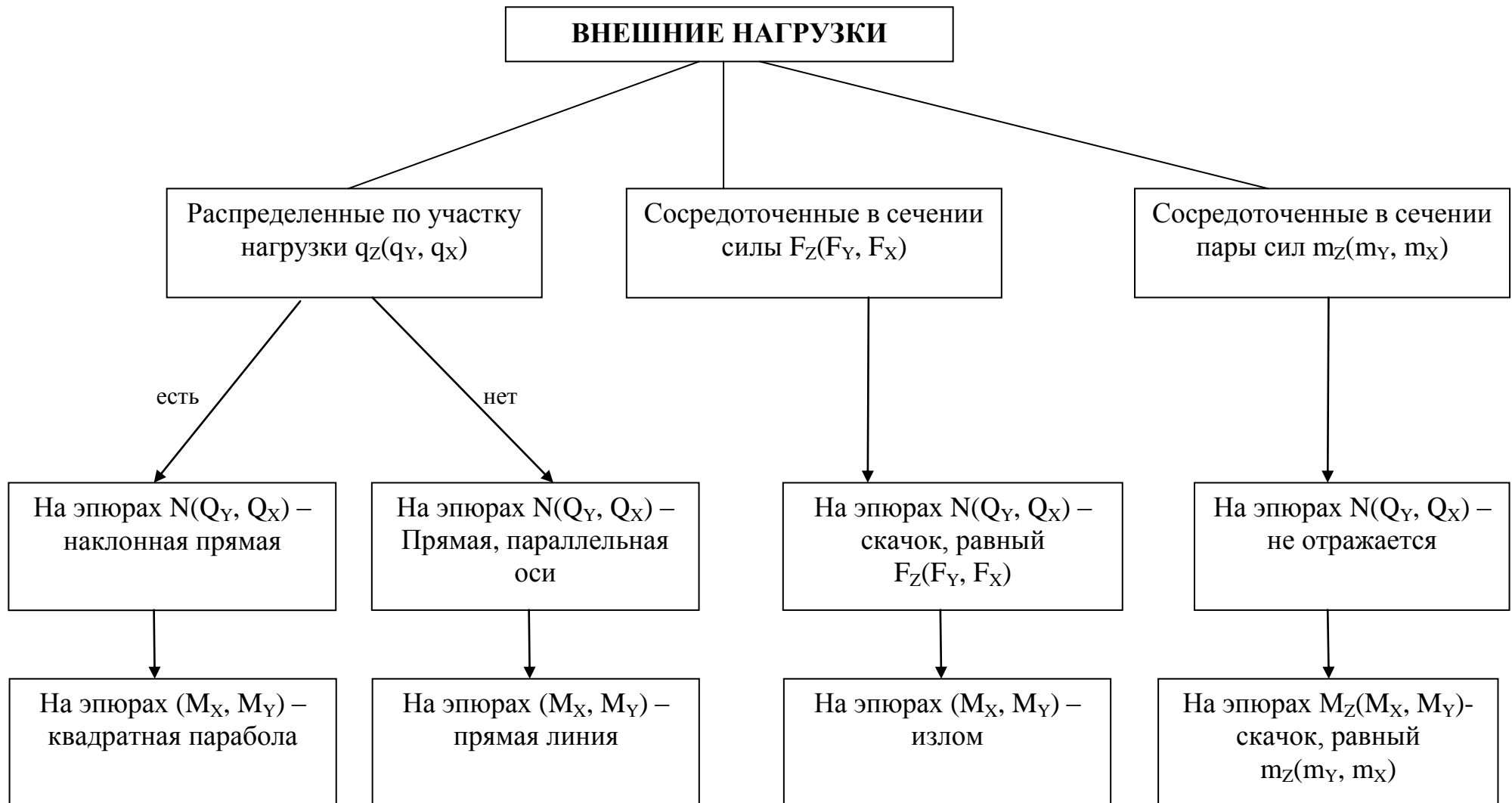


Схема 1



## 10. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ.

### Пример 1.

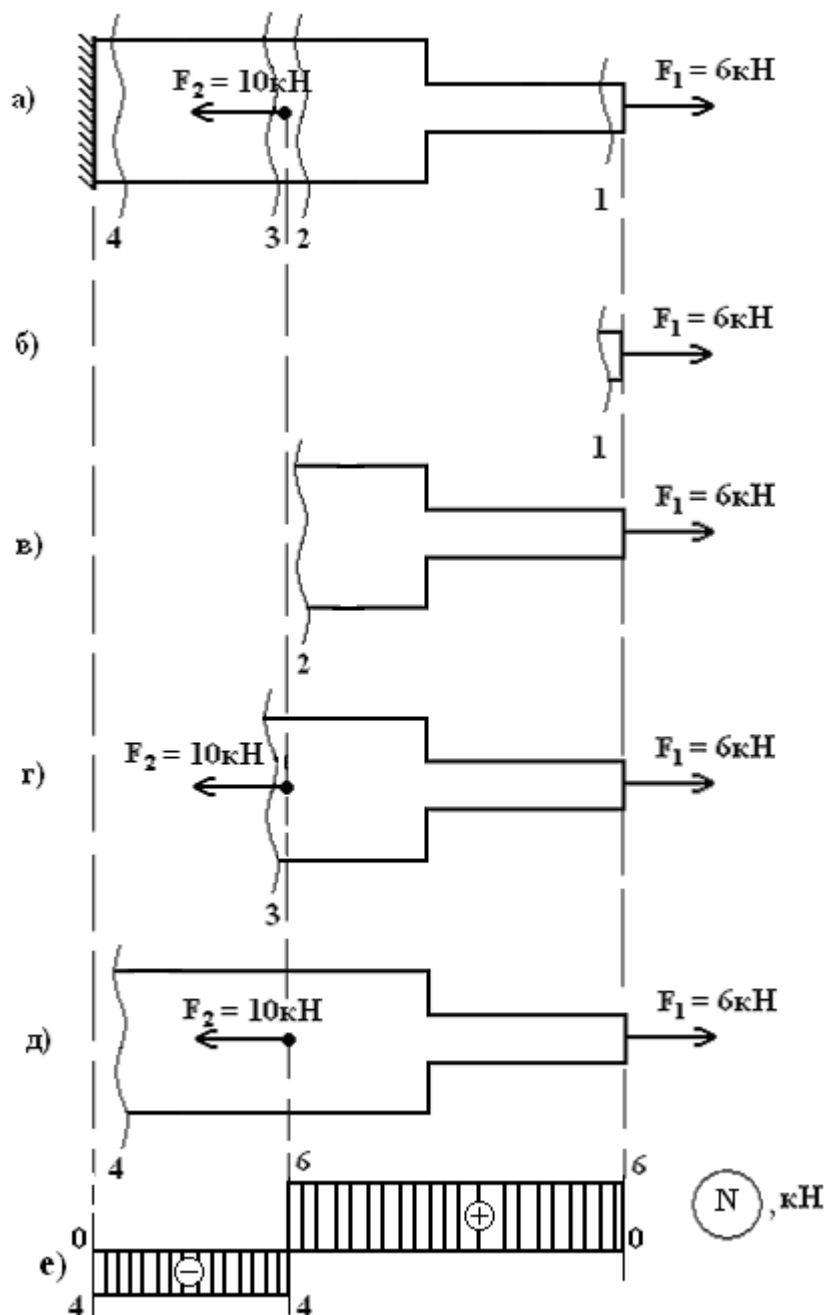


Рис.17

### Решение:

- 1) Определяем вид деформации стержня. Все силы лежат на оси стержня, значит, имеем осевое растяжение-сжатие, будем строить эпюру продольных сил  $N$ .
- 2) Проводим ось, параллельную оси стержня.
- 3) Разбиваем стержень на два участка. В качестве участка загрузки будем понимать часть стержня между двумя ближайшими точками приложения сил. Отметим, что изменение площади поперечного сечения не влияет на определение границ участков.
- 4) Делаем сечения в начале и конце первого участка загрузки и определяем  $N$  (см. пункт 5). В сечении 1 (рис.17,б)  $\Rightarrow N_1 = F_1 = 6 \text{ кН}$ ; в сечении 2 (рис.17,в)

$\Rightarrow N_2 = F_1 = 6\text{кН}$ . Знак определяем по правилу, изложенному в пункте 5:  $N_1, N_2 > 0$ , так как сила  $F_1$  растягивает продольные волокна. Откладываем значения  $N_1, N_2$ , например, выше оси (строгое правило для продольной силы не существует) и соединяем прямой линией. Внутри ставим в кружочке знак «+» (рис.17,е). Переходим ко второму участку. В сечении 3 (рис. 17,г)  $\Rightarrow N_3 = F_1 - F_2 = 6 - 10 = -4\text{кН}$ ; в сечении 4 (рис.17,д)  $\Rightarrow N_4 = F_1 - F_2 = 6 - 10 = -4\text{кН}$ . Поскольку  $N_3, N_4 < 0$ . откладываем полученные значения ниже оси и внутри эпюры ставим в кружочке знак «-». Числовые значения  $N_1 - N_4$  обязательно проставляем на эпюре (рис.17,е).

- 5) Эпюру штрихуем и обозначаем.
- 6) Эпюру проверяем. Так как к стержню не приложены распределенные нагрузки, на эпюре не образуются наклонные прямые. В сечении (1) приложена сила  $F_1 = 6\text{кН} \Rightarrow$  на эпюре в этом сечении скачок равный 6; на границе первого и второго участков приложена сила  $F_2 = 10\text{кН} \Rightarrow$  на эпюре имеем скачок на величину  $6 + 4 = 10$ ; скачок, равный 4 в сечении (4) соответствует реакции в заделке, которую мы заранее не определяли. Эпюра построена верно.

Пример 2.

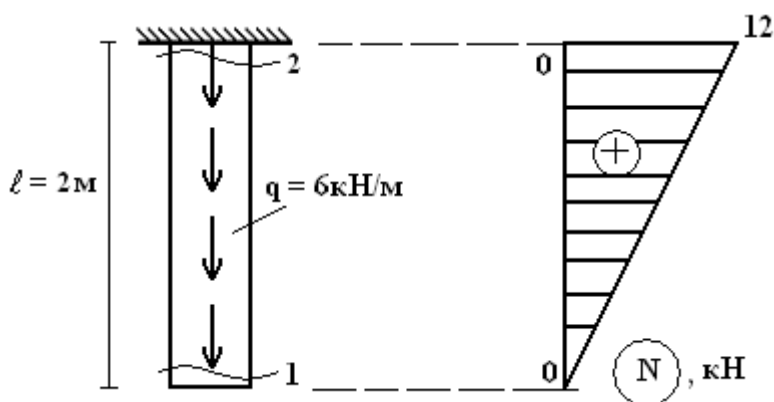


Рис.18

**Решение:**

- 1) Вид деформации – осевое растяжение-сжатие, строим эпюру N.
- 2) Проводим вертикальную ось, параллельную оси стержня.
- 3) Имеем один участок загрузки.
- 4) Делаем сечение в начале и конце участка. В целях упрощения решения задачи оставшиеся после отбрасывания жесткой заделки части стержня, как на рис.17 изображать не станем. Будем эту процедуру проделывать мысленно. Для наглядности можно просто закрывать отброшенную часть стержня листом бумаги. Имеем  $N_1 = 0$ ;  $N_2 = q \cdot \ell = 6 \cdot 2 = 12\text{кН}$ .
- 5) Откладываем  $N_1, N_2$  от оси, например, вправо и соединяем прямой линией (рис.18).
- 6) Ставим знак, штрихуем и обозначаем эпюру.
- 7) Проверка эпюры: так как на стержень действует равномерно-распределенная нагрузка, на графике должна быть наклонная прямая. Сосредоточенных сил нет, поэтому нет и скачков (скачок в заделке соответствует реакции в заделке).

Пример 3.

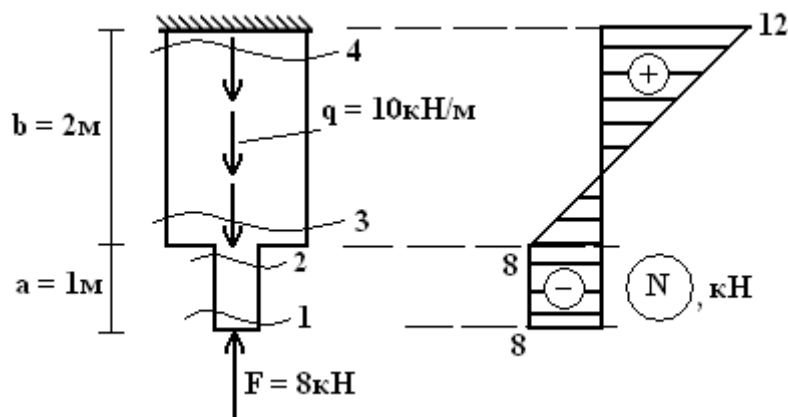


Рис. 19

**Решение:**

- 1) Вид деформации – осевое растяжение-сжатие.
- 2) Проводим вертикальную ось.
- 3) Делим на участки загрузки – в данном примере будет два участка.
- 4) Делаем сечения на первом участке:  $N_1 = - F = - 8\text{ кН}$ ;  $N_2 = - F = - 8\text{ кН}$ . Откладываем значения, например, влево от оси, соединяем прямой линией. Делаем сечение на втором участке.  $N_3 = - F + q \cdot 0 = - 8\text{ кН}$ ;  $N_4 = - F + q \cdot b = - 8 + 10 \cdot 2 = 12\text{ кН}$ . Значение  $N_3 < 0$ , откладываем влево от оси;  $N_4 > 0$  – вправо и соединяем прямой.
- 5) Ставим знаки, штрихуем и обозначаем эпюру (рис.19).
- 6) Проверка эпюры: на первом участке нет распределенной нагрузки – на эпюре прямая, параллельная оси; на втором участке распределена нагрузка – на эпюре наклонная прямая. В сечении (1) приложена сосредоточенная сила  $F = 8\text{ кН}$   $\Rightarrow$  на эпюре скачок, равный 8.

Пример 4.

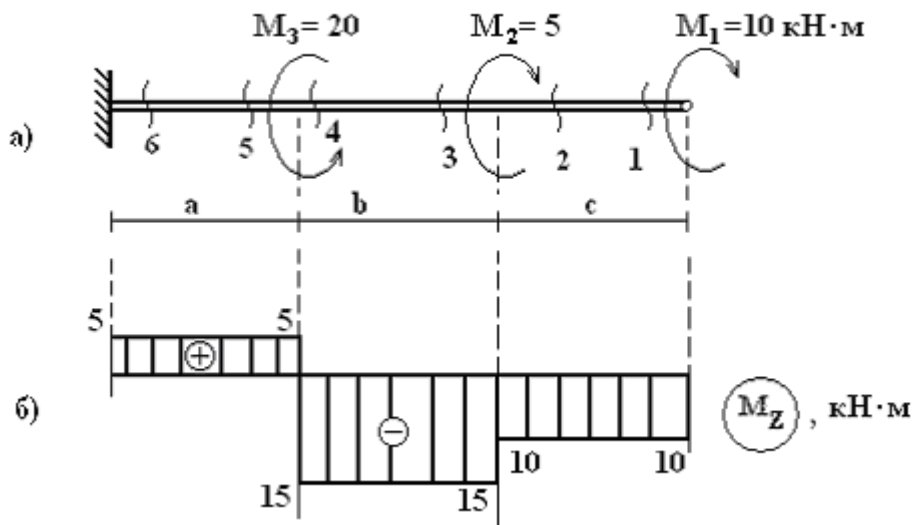


Рис.20

**Решение:**

- 1) Вид деформации – кручение. Следует построить эпюру крутящего момента  $M_Z$ .
- 2) Проводим ось.
- 3) Стержень имеет три участка загрузения. Делаем сечения в начале и конце каждого участка, отбрасываем жесткую заделку и определяем  $M_Z$ , используя правило знаков, изложенное в пункте 5. Полученные положительные значения откладываем, например, вверх, отрицательные – вниз и соединяем прямой линией (рис.20):  
 $M_Z^{(1)} = -M_1 = -10 \text{кН} \cdot \text{м}; \quad M_Z^{(2)} = -M_1 = -10 \text{кН} \cdot \text{м};$   
 $M_Z^{(3)} = -M_1 - M_2 = -10 - 5 = -15 \text{кН} \cdot \text{м}; \quad M_Z^{(4)} = -15 \text{кН} \cdot \text{м};$   
 $M_Z^{(5)} = -M_1 - M_2 + M_3 = -15 + 20 = 5 \text{кН} \cdot \text{м}; \quad M_Z^{(6)} = 5 \text{кН} \cdot \text{м}$
- 4) Ставим знак, эпюру штрихуем и обозначаем.
- 5) Проверка эпюры: к стержню не приложены распределенные нагрузки, поэтому на эпюре нет наклонных прямых. В сечении (1) приложена пара сил  $M_1 = 10 \Rightarrow$  на эпюре имеем скачок, равный 10; на границе первого и второго участка приложена пара сил  $M_2 = 5 \Rightarrow$  на эпюре скачок  $15 - 10 = 5$ ; на границе второго и третьего участка приложена пара сил  $M_3 = 20 \Rightarrow$  на эпюре получился скачок  $15 + 5 = 20$ .

Пример 5.

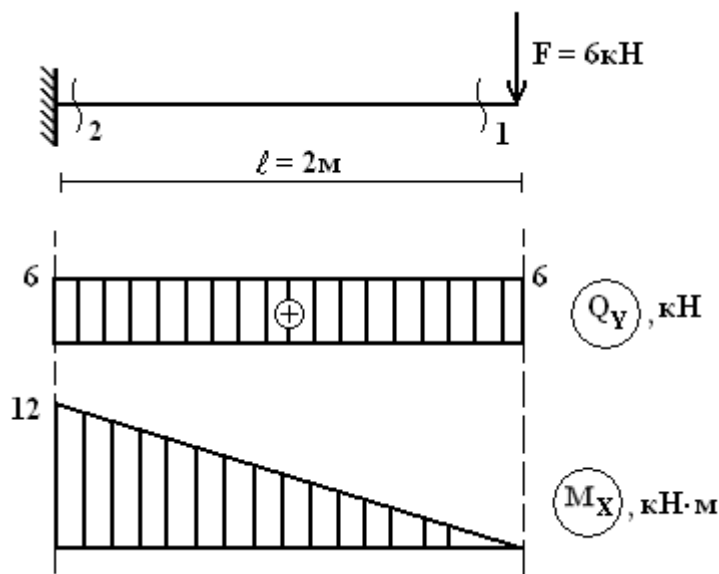


Рис.21

**Решение:**

- 1) Вид деформации – плоский изгиб (пункт 8). Следовательно, будем строить две эпюры – поперечных сил  $Q_Y$  и изгибающего момента  $M_X$ .
- 2) Проведем две оси, параллельные оси балки (одну для эпюры  $Q_Y$ , вторую для эпюры  $M_X$ ).
- 3) Балка имеет один участок загрузения.
- 4) Строим эпюру  $Q_Y$ . Сделаем сечение (1), отбросим жесткую заделку. Учитывая правило знаков из пункта 5, получим  $Q_Y^{(1)} = F = 6 \text{кН}$ . В сечении (2) получим

$Q_Y^{(2)} = F = 6 \text{ кН}$ . Силы  $Q_Y^{(1)}, Q_Y^{(2)} > 0$ , так как сила  $F$  поворачивает оставшуюся часть балки вокруг сечения по часовой стрелке (рис.22,а).

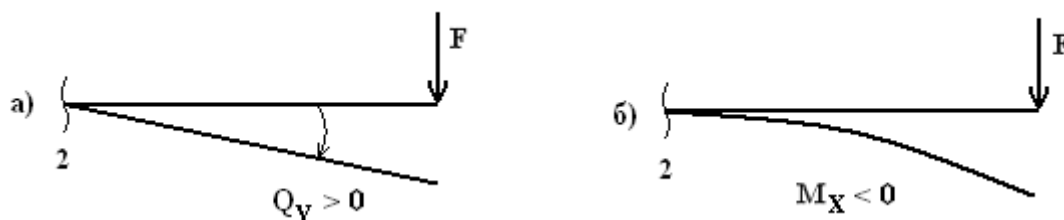


Рис. 22

Положительные значения поперечной силы откладываются всегда выше оси. Соединим их прямой линией, поставим знак, эпюру заштрихуем, обозначим.

- 5) Строим эпюру  $M_X$ . Сделаем сечение и отбросив часть с жесткой заделкой, считаем момент от силы  $F$  относительно сделанного сечения. Получим  $M_X^{(1)} = F \cdot 0 = 0$ ;  $M_X^{(2)} = -F \cdot l = -12 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . Для эпюры изгибающих моментов принимается следующее правило: значения моментов откладываются от оси в сторону растянутого волокна. Из рис.22,б, следует, что сила  $F$  растягивает верхние волокна, поэтому полученное значение  $M_X$  откладываем выше оси. Соединяем отложенные значения прямой линией. Знак на эпюре изгибающих моментов можно не ставить. Эпюру штрихуем и обозначаем (рис.21).
- 6) Проверка эпюр. К балке не приложена распределенная нагрузка, следовательно, на графиках  $Q_Y$  и  $M_X$  имеем прямые линии, причем на эпюре  $Q_Y$  это прямая, параллельная оси. На свободном конце балки приложена сосредоточенная сила  $F = 6 \text{ кН} \Rightarrow$  в этом сечении на эпюре  $Q_Y$  образовался скачок, равный 6.

Пример 6.

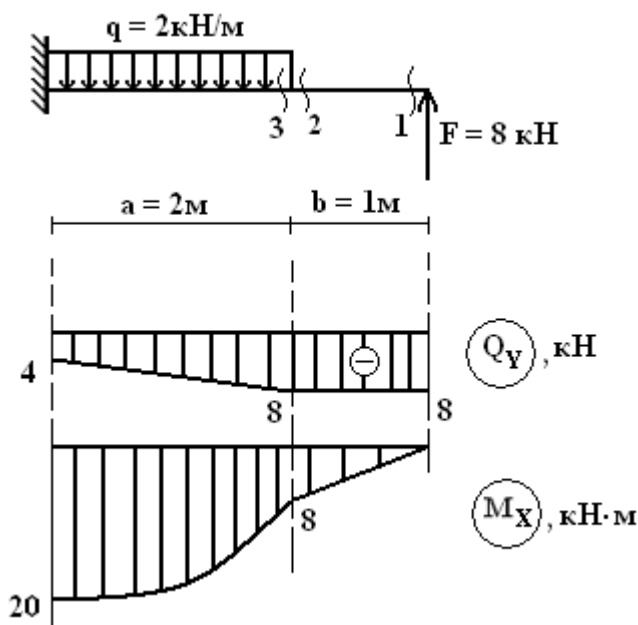


Рис.23

**Решение:**

- 1) Вид деформации – плоский изгиб, строим эпюры  $Q_Y$  и  $M_X$ .
- 2) Проводим оси для построения эпюр.
- 3) Делим балку на два участка загрузки.

4) Строим эюру  $Q_Y$ .

1-й участок:

$$Q_Y^{(1)} = -F = -8 \text{ кН}; \quad Q_Y^{(2)} = -F = -8 \text{ кН}.$$

Откладываем значения ниже оси, соединяем прямой линией.

2-й участок:

$$Q_Y^{(3)} = -F + q \cdot 0 = -8 \text{ кН}; \quad Q_Y^{(4)} = -F + q \cdot a = -8 + 2 \cdot 2 = -4 \text{ кН}.$$

Значение  $Q_Y^{(3)}, Q_Y^{(4)}$  откладываем ниже оси, соединяем прямой линией.

Ставим знаки, эюру штрихуем и обозначаем (рис.23).

5) Строим эюру  $M_X$ .

1-й участок:

$$M_X^{(1)} = F \cdot 0 = 0; \quad M_X^{(2)} = -F \cdot b = 8 \cdot 1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Откладываем значения  $M_X^{(2)}$  ниже оси, так как сила  $F$  растягивает нижние волокна, соединяем прямой линией.

2-й участок:

$$M_X^{(3)} = F \cdot b - q \cdot 0 = F \cdot b = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_X^{(4)} = F(a + b) - q \cdot a \cdot 0,5a = 8 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Значения  $M_X^{(3)}, M_X^{(4)}$  откладываем ниже оси и соединяем параболой. При этом выпуклость параболы должна быть обращена в сторону действия распределенной нагрузки. Это правило называют «правилом паруса». Роль паруса здесь играет эюра, а роль ветра – нагрузка (рис.23).

б) Проверка эюр. На участке балки с распределенной нагрузкой получаем на эюре  $Q_Y$  наклонную прямую, на эюре  $M_X$  – параболу. В сечении с приложенной сосредоточенной силой  $F = 8$  на эюре  $Q_Y$  образовался скачек равный 8.

Пример 7.

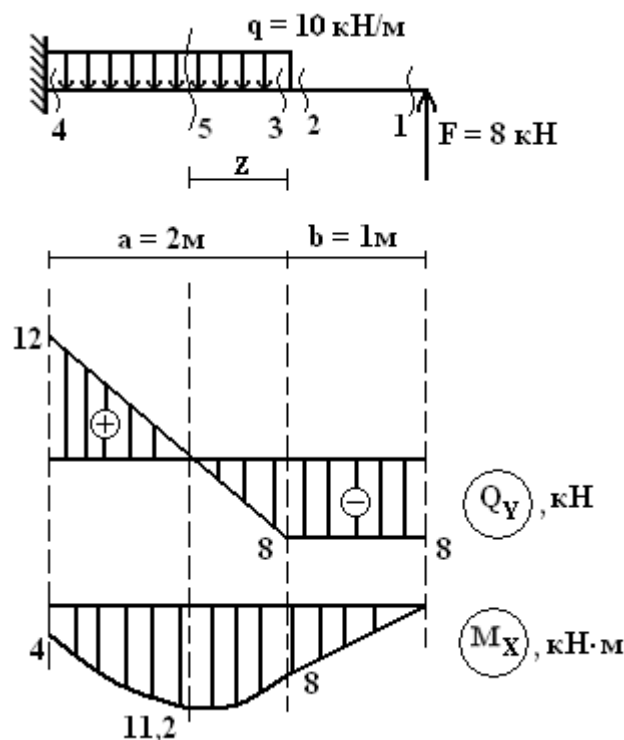


Рис.24

**Решение:**

- 1) Первые три пункта – как в предыдущем примере.
- 2) Строим эпюру  $Q_Y$ .

1-й участок.

$$Q_Y^{(1)} = -F = -8\text{кН}; \quad Q_Y^{(2)} = -F = -8\text{кН}.$$

Откладываем значения ниже оси, соединяем прямой линией.

2-й участок.

$$Q_Y^{(3)} = -F + q \cdot 0 = -8\text{кН}; \quad Q_Y^{(4)} = -F + q \cdot a = -8 + 10 \cdot 2 = 12\text{кН}.$$

Откладываем  $Q_Y^{(3)} < 0$  ниже оси, а  $Q_Y^{(4)} > 0$  - выше оси, соединяем прямой линией (рис. 24).

- 3) Строим эпюру  $M_X$ .

1-й участок:

$$M_X^{(1)} = F \cdot 0 = 0; \quad M_X^{(2)} = F \cdot b = 8\text{кН} \cdot \text{м}.$$

Откладываем  $M_X^{(2)}$  ниже оси, соединяем с нулем прямой линией.

2-й участок:

Из рис.24 следует, что эпюра поперечных сил  $Q_Y$  на этом участке пересекает ось, то есть в некотором сечении (5) сила  $Q_Y^{(5)} = 0$ . Из дифференциальных зависимостей (2), (3) следует, что в сечении (5) изгибающий момент  $M_X$  достигает экстремального значения (максимума или минимума). Таким образом, на этом участке следует просчитать момент в трех точках.

$$M_X^{(3)} = F \cdot b = 8\text{кН} \cdot \text{м}. \quad M_X^{(4)} = F(a + b) - q \cdot a \cdot 0,5a = 8 \cdot 3 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 4\text{кН} \cdot \text{м}.$$

Определим экстремальное значение момента. Выясним сначала, на каком расстоянии  $Z$  от правой границы участка находится сечение (5), в котором поперечная сила равна нулю.

$$Q_Y^{(5)} = F - qZ = 8 - 10Z = 0; \quad Z = 0,8\text{м}.$$

Найдем значение момента.

$$M_X^{(5)} = M_X^{\text{экт}} = F(b + Z) - q \cdot Z \cdot 0,5Z = 8(1 + 0,8) - 10 \cdot 0,8 \cdot 0,4 = 11,2\text{кН} \cdot \text{м}.$$

Откладываем значения  $M_X^{(3)}$ ,  $M_X^{(4)}$ ,  $M_X^{(5)}$  ниже оси и соединяем параболой по правилу «паруса», то есть выпуклостью вниз (рис.24).

- 4) Проверка эпюр. Все линии на эпюрах соответствуют приложенным нагрузкам, силе  $F = 8$  соответствует скачок, равный 8 на эпюре  $Q_Y$ .

Пример 8.

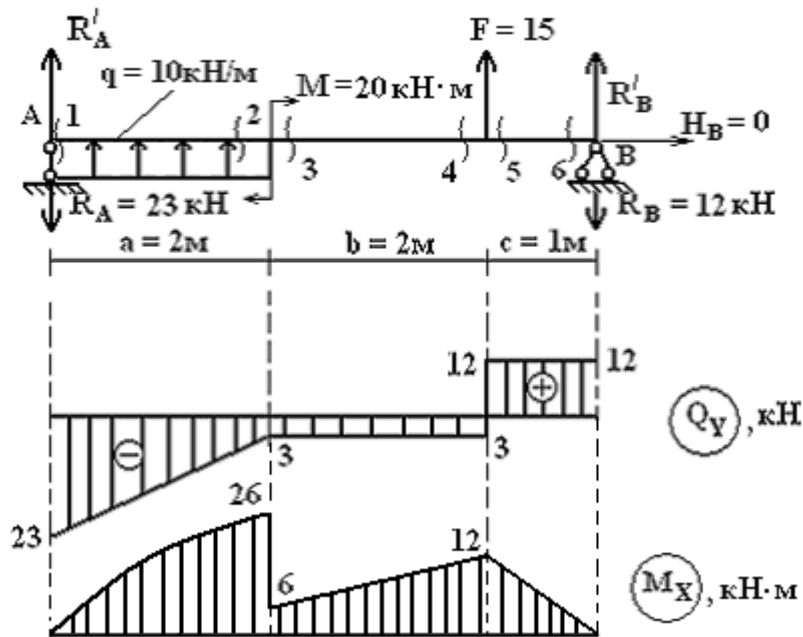


Рис.25

Решение:

- 1) Вид деформации – плоский изгиб.
- 2) Расчет балки с шарнирным закреплением следует начинать с определения реакций связей. Расставим эти реакции. В шарнирно –подвижной опоре А возникает одна вертикальная реакция  $R'_A$ . В шарнирно-неподвижной опоре В, вообще говоря, возникает две реакции – вертикальная  $R'_B$  и горизонтальная  $H_B$ , однако, поскольку в случае вертикального плоского изгиба все силы действуют перпендикулярно оси балки, горизонтальная реакция  $H_B$  всегда будет равна нулю, поэтому в дальнейшем показывать ее на схеме балки не будем. Вертикальные реакции найдем из уравнений статики.

$$\sum \text{mom}_A = 0;$$

$$-q \cdot a \cdot 0,5a + M - F(a + b) - R'_B(a + b + c) = 0$$

$$-10 \cdot 2 \cdot 1 + 20 - 15 \cdot 4 - R'_B \cdot 5 = 0; \quad R'_B = -12 \text{ кН}$$

$$\sum \text{mom}_B = 0;$$

$$R'_A(a + b + c) + q \cdot a(0,5a + b + c) + M + F \cdot c = 0$$

$$5R'_A + 10 \cdot 2 \cdot 4 + 20 + 15 \cdot 1 = 0; \quad R'_A = -23 \text{ кН}$$

При записи уравнений использовалось следующее правило знаков: если сила поворачивает балку вокруг т.А (т.В) по часовой стрелке, то момент от этой силы берется со знаком «+».

Для проверки найденных реакций используем уравнение статики:  $\sum F_{KY} = 0$  (сумма всех вертикальных сил должна быть равна нулю). При этом силы, изображенные на схеме балки направленными вверх, берем со знаком «+».

$$\sum F_{KY} = R'_A - q \cdot a + F + R'_B = 0.$$

Подставим сюда найденные значения реакций со своими знаками.

$$- 23 + 10 \cdot 2 + 15 - 12 = 0; \quad 35 - 25 = 0; \quad 0 = 0.$$



Поскольку направления вертикальных реакций поначалу были взяты произвольно, то полученные в результате знаки «-» у реакций  $R_A$ ,  $R_B$  показывают, что мы не угадали направление реакций, в действительности они направлены вниз. Удобно изменить направление этих реакций на обратное и в дальнейшем считать эти реакции положительными (рис.25).

- 3) Проводим оси для построения эпюр.
- 4) Делим балку на три участка загрузки.
- 5) Так как все реакции в закреплениях балки найдены, то, сделав сечение, можно отбрасывать любую (обычно более загруженную) часть балки .
- 6) Строим эпюру  $Q_Y$ .

1-й участок.

$Q_Y^{(1)} = -R_A = -23\text{кН}$  (отбросили правую часть балки),

$Q_Y^{(2)} = R_B - F = 12 - 15 = -3\text{кН}$  (отбросили левую часть балки).

Пару сил  $M = 20\text{кН}\cdot\text{м}$  при вычислении  $Q_Y$ , естественно, не учитываем. Откладываем значения от оси, соединяем прямой линией.

2-й участок.

$Q_Y^{(3)} = R_B - F = 12 - 15 = -3\text{кН}$ ;  $Q_Y^{(4)} = R_B - F = -3\text{кН}$ .

3-й участок.

$Q_Y^{(5)} = R_B = 12\text{кН}$ ;  $Q_Y^{(6)} = R_B = 12\text{кН}$ .

- 7) Строим эпюру  $M_X$ .

1-й участок:

$M_X^{(1)} = R_A \cdot 0 = 0$ ;  $M_X^{(2)} = -R_B(b+c) + F \cdot b - M = -12 \cdot 3 + 15 \cdot 2 - 20 = -26$ .

Чтобы не ошибиться в знаке изгибающего момента, сечение, в котором он определяется, следует представлять защемленным, а опоры – отброшенными (рис.26):

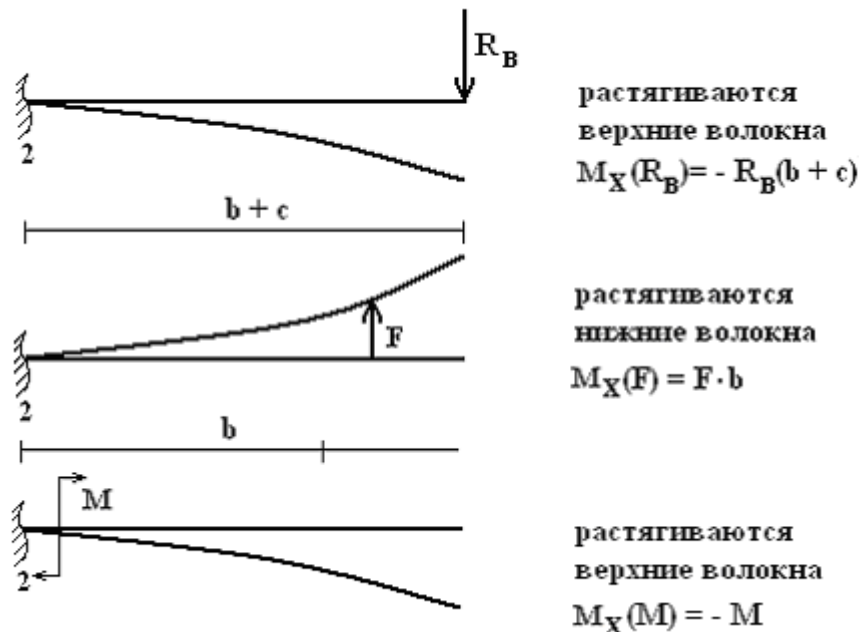


Рис.26

Откладываем значения от оси и соединяем параболой по правилу «паруса», то есть направленной выпуклостью вверх.

2-й участок:

$$M_X^{(3)} = -R_B(b+c) + F \cdot b = -12 \cdot 3 + 15 \cdot 2 = -6$$

$$M_X^{(4)} = -R_B \cdot c + F \cdot 0 = -12 \cdot 1 = -12.$$

Откладываем значения выше оси, соединяем прямой линией.

3-й участок:

$$M_X^{(5)} = -R_B \cdot c = -12 \cdot 1 = -12$$

$$M_X^{(6)} = R_B \cdot 0 = 0.$$

Отложенные от оси значения соединяем прямой линией (рис.25).

8) Проверка эпюр. Все линии на эпюрах соответствуют действующим нагрузкам.

К балке приложены три сосредоточенные силы –  $R_A$ ,  $F$ ,  $R_B$ . На эпюре  $Q_Y$  получили три скачка  $\Rightarrow$  на опоре  $A$  – равный  $R_A = 23$ , на границе 2-го и 3-го участков – равный  $F = 3 + 12 = 15$ , на опоре  $B$  – равный  $R_B = 12$ . К балке приложена пара сил  $M = 20$ . На эпюре  $M_X$  на границе 1-го и 2-го участков имеем скачок, равный  $M = (26 - 6) = 20$ .

Пример 9.

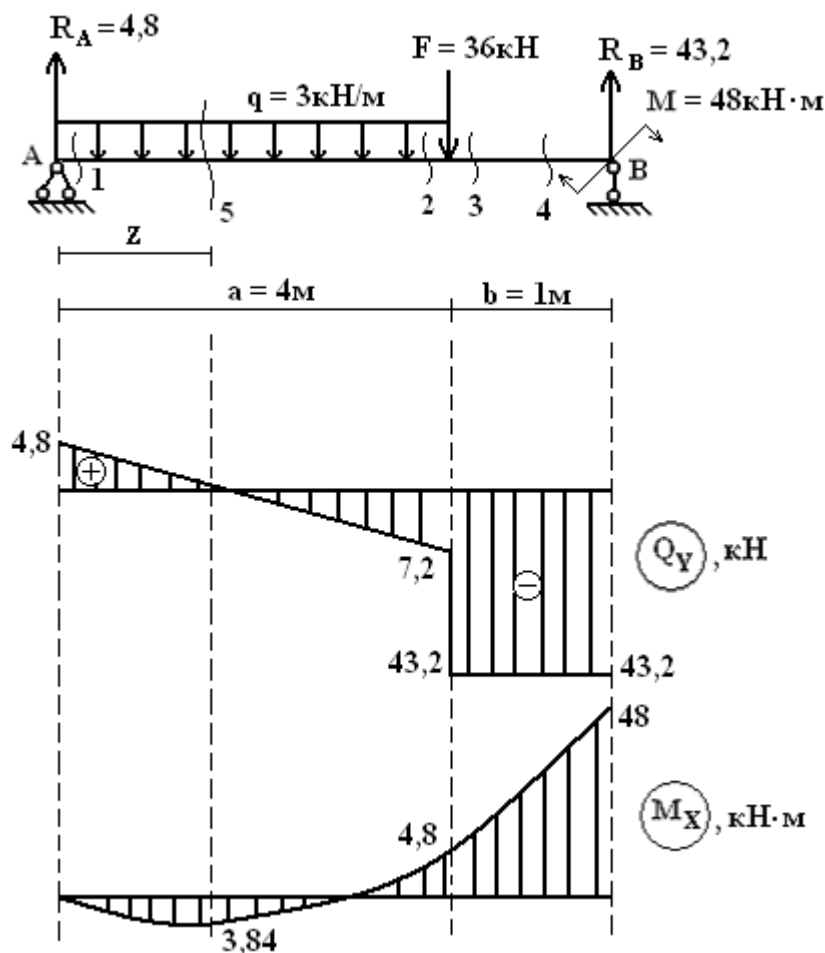


Рис.27

**Решение:**

- 1) Вид деформации – плоский изгиб.
- 2) Найдем реакции опор  $R_A$ ,  $R_B$ .

$$\sum \text{mom}_A = 0;$$

$$q \cdot a \cdot 0,5a + F \cdot a + M - R_B (a + b) = 0$$

$$3 \cdot 4 \cdot 2 + 36 \cdot 4 + 48 - 5R_B = 0; \quad R_B = 43,2 \text{ кН}$$

$$\sum \text{mom}_B = 0;$$

$$R_A (a + b) - q \cdot a(0,5a + b) - F \cdot b + M = 0$$

$$5R_A - 3 \cdot 4 \cdot 3 - 36 \cdot 1 + 48 = 0; \quad R_A = 4,8 \text{ кН}$$

Проверка:

$$\sum F_{KY} = 0;$$

$$R_A - q \cdot a - F + R_B = 0$$

$$4,8 - 3,4 - 36 + 43,2 = 0 \quad 48 - 48 = 0; \quad 0 = 0.$$

Обе реакции получились положительными, то есть мы угадали их направление, они действительно направлены вверх.

3) Балка имеет два участка загрузки.

4) Строим эпюру  $Q_Y$ .

1-й участок.

$$Q_Y^{(1)} = R_A = 4,8 \text{ кН}; \quad Q_Y^{(2)} = R_A - q \cdot a = 4,8 - 3 \cdot 4 = -7,2 \text{ кН}.$$

Откладываем значения от оси и соединяем прямой линией.

2-й участок.

$$Q_Y^{(3)} = -R_B = -43,2 \text{ кН}; \quad Q_Y^{(4)} = -R_B = -43,2 \text{ кН}.$$

Откладываем значения от оси и соединяем прямой (рис.27).

5) Строим эпюру  $M_X$ .

1-й участок:

Из эпюры сил следует, что на этом участке будет возникать экстремальный момент, поэтому будем определять  $M_X$  в трех сечениях.

$$M_X^{(1)} = R_A \cdot 0 = 0 \text{ (отбрасываем правую часть балки);}$$

$$M_X^{(2)} = R_B \cdot b - M = 43,2 \cdot 1 - 48 = -4,8 \text{ кН} \cdot \text{м (отбрасываем левую часть балки).}$$

Находим координату  $Z$  сечения (5):

$$Q_Y^{(5)} = R_A - qZ = 4,8 - 3Z = 0; \quad Z = 1,6 \text{ м}.$$

Находим экстремальный момент.

$$M_X^{\text{экт}} = M_X^{(5)} = R_A \cdot Z - q \cdot Z \cdot 0,5Z = 4,8 \cdot 1,6 - 3 \cdot 1,6 \cdot 0,8 = 3,84 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Откладываем значения от оси и соединяем параболой по правилу «паруса», то есть выпуклостью вниз.

2-й участок.

$$M_X^{(3)} = R_B \cdot b - M = 43,2 - 48 = -4,8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_X^{(4)} = -M = -48 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Отложенные от оси значения соединяем прямой (рис.27).

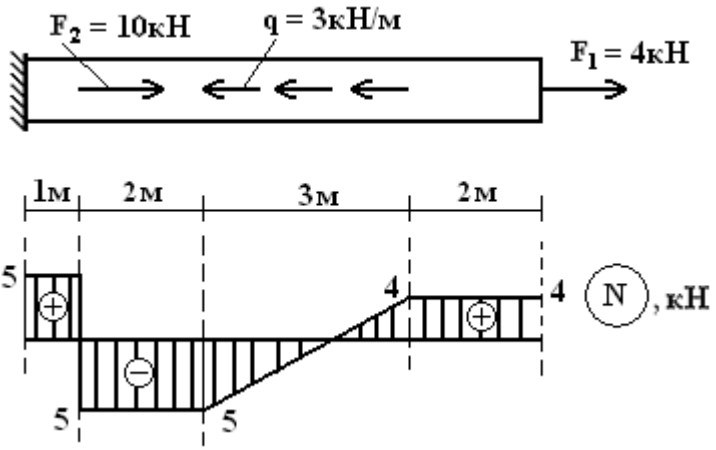
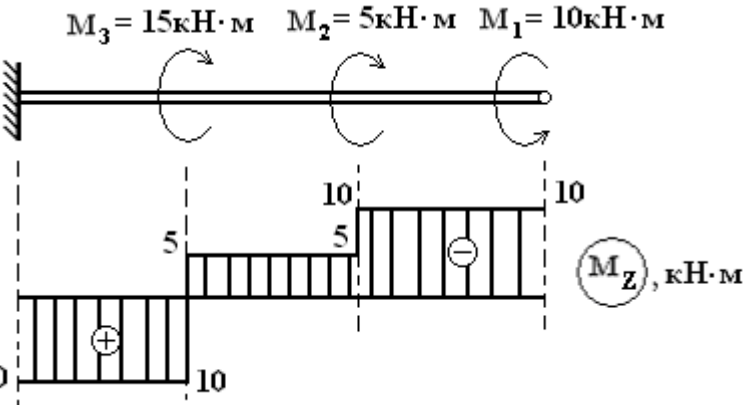
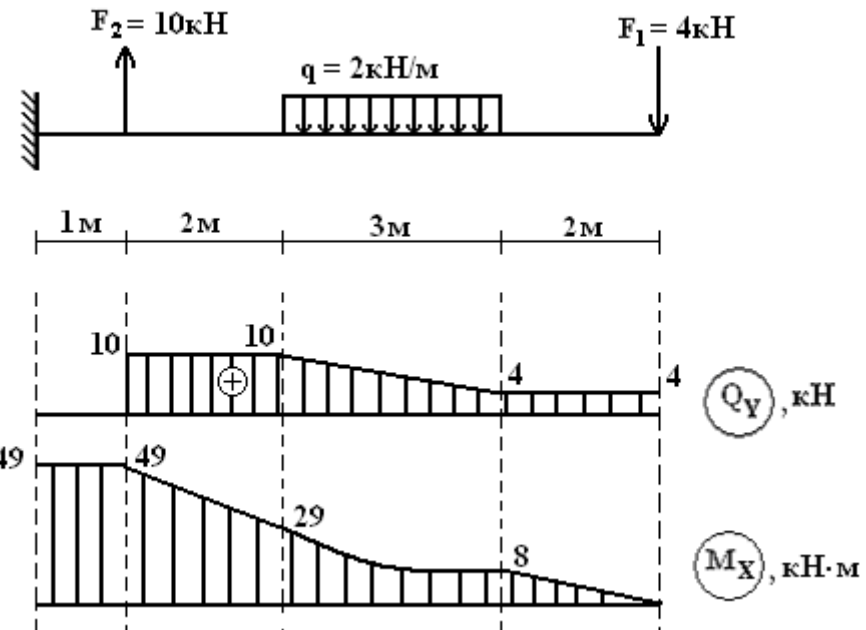
6) Проверка эпюр.

Линии эпюры соответствуют приложенным нагрузкам. К балке приложены три сосредоточенные силы –  $R_A$ ,  $F$ ,  $R_B \Rightarrow$  на эпюре  $Q_Y$  в соответствующих сечениях имеем скачки.

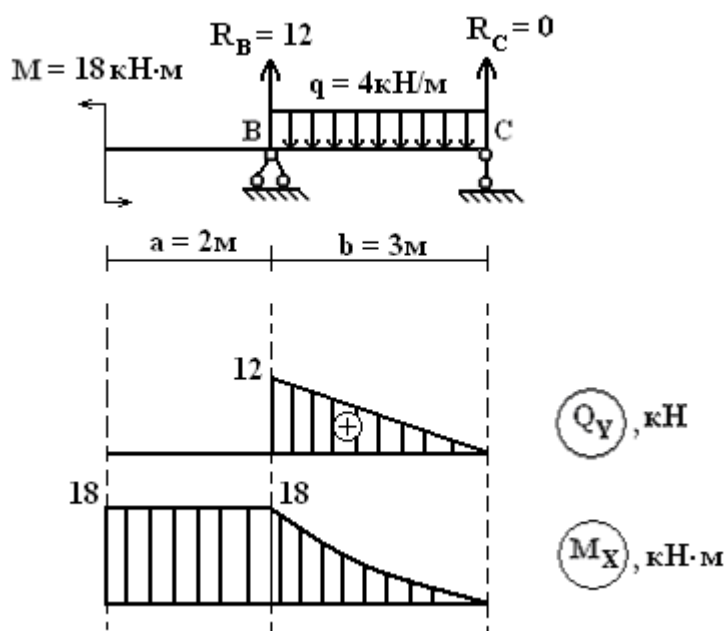
К балке на опоре В приложена пара сил  $M$ : на эпюре  $M_X$  имеем на правом конце скачок, равный  $M = 48$ .

**ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ.**

Для всех стержней, изображенных ниже, определить вид деформации и построить эпюры соответствующих внутренних усилий.

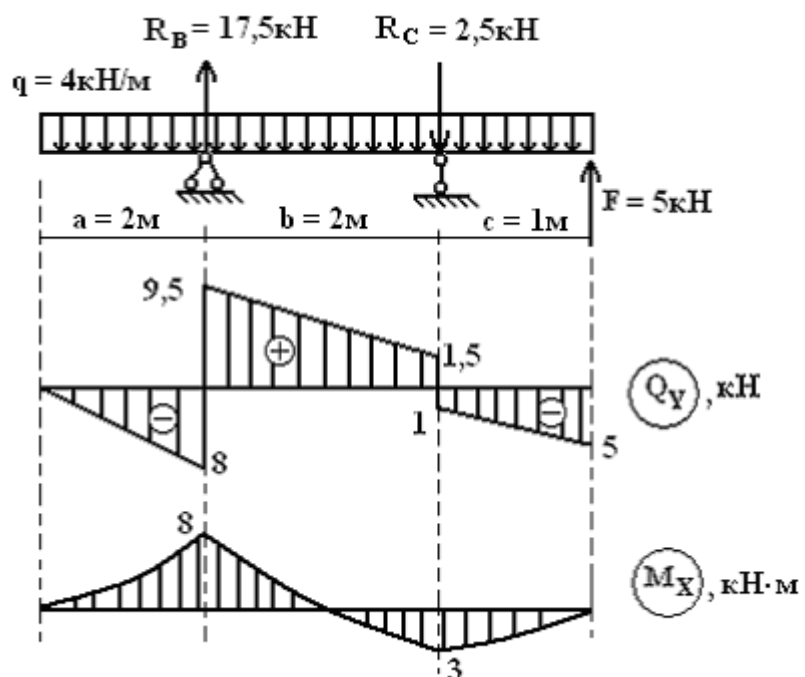
<p>1)</p>  <p>The diagram shows a horizontal bar of total length 8m, fixed at the left end. It is subjected to a force <math>F_2 = 10\text{ кН}</math> pointing right at <math>x = 1\text{ м}</math>, a distributed load <math>q = 3\text{ кН/м}</math> pointing left from <math>x = 2\text{ м}</math> to <math>x = 5\text{ м}</math>, and a force <math>F_1 = 4\text{ кН}</math> pointing right at the free end (<math>x = 8\text{ м}</math>). The segments are 1m, 2m, 3m, and 2m long. Below the bar is the normal force diagram <math>N</math> in kN. It shows a constant positive force of 5 kN from <math>x = 0</math> to <math>x = 1\text{ м}</math>, a linear decrease from 5 kN to -5 kN from <math>x = 1\text{ м}</math> to <math>x = 5\text{ м}</math>, and a constant positive force of 4 kN from <math>x = 5\text{ м}</math> to <math>x = 8\text{ м}</math>.</p>	<p>Вид деформации – осевое растяжение-сжатие.</p>
<p>2)</p>  <p>The diagram shows a horizontal bar of total length 8m, fixed at the left end. It is subjected to three moments: <math>M_3 = 15\text{ кН}\cdot\text{м}</math> at <math>x = 2\text{ м}</math>, <math>M_2 = 5\text{ кН}\cdot\text{м}</math> at <math>x = 5\text{ м}</math>, and <math>M_1 = 10\text{ кН}\cdot\text{м}</math> at the free end (<math>x = 8\text{ м}</math>). Below the bar is the torque diagram <math>M_z</math> in kN·m. It shows a constant positive torque of 10 kN·m from <math>x = 0</math> to <math>x = 2\text{ м}</math>, a constant positive torque of 5 kN·m from <math>x = 2\text{ м}</math> to <math>x = 5\text{ м}</math>, and a constant negative torque of 10 kN·m from <math>x = 5\text{ м}</math> to <math>x = 8\text{ м}</math>.</p>	<p>Вид деформации – кручение.</p>
<p>3)</p>  <p>The diagram shows a horizontal bar of total length 8m, fixed at the left end. It is subjected to a force <math>F_2 = 10\text{ кН}</math> pointing up at <math>x = 1\text{ м}</math>, a distributed load <math>q = 2\text{ кН/м}</math> pointing down from <math>x = 2\text{ м}</math> to <math>x = 5\text{ м}</math>, and a force <math>F_1 = 4\text{ кН}</math> pointing down at the free end (<math>x = 8\text{ м}</math>). The segments are 1m, 2m, 3m, and 2m long. Below the bar are two diagrams: the shear force diagram <math>Q_y</math> in kN and the bending moment diagram <math>M_x</math> in kN·m. The shear force diagram shows a constant positive shear of 10 kN from <math>x = 0</math> to <math>x = 1\text{ м}</math>, a linear decrease from 10 kN to 4 kN from <math>x = 1\text{ м}</math> to <math>x = 5\text{ м}</math>, and a constant negative shear of 4 kN from <math>x = 5\text{ м}</math> to <math>x = 8\text{ м}</math>. The bending moment diagram shows a linear increase from 0 to 49 kN·m at <math>x = 1\text{ м}</math>, a parabolic decrease from 49 kN·m to 29 kN·m at <math>x = 5\text{ м}</math>, and a linear decrease from 29 kN·m to 8 kN·m at <math>x = 8\text{ м}</math>.</p>	<p>Вид деформации – плоский изгиб.</p>

4)



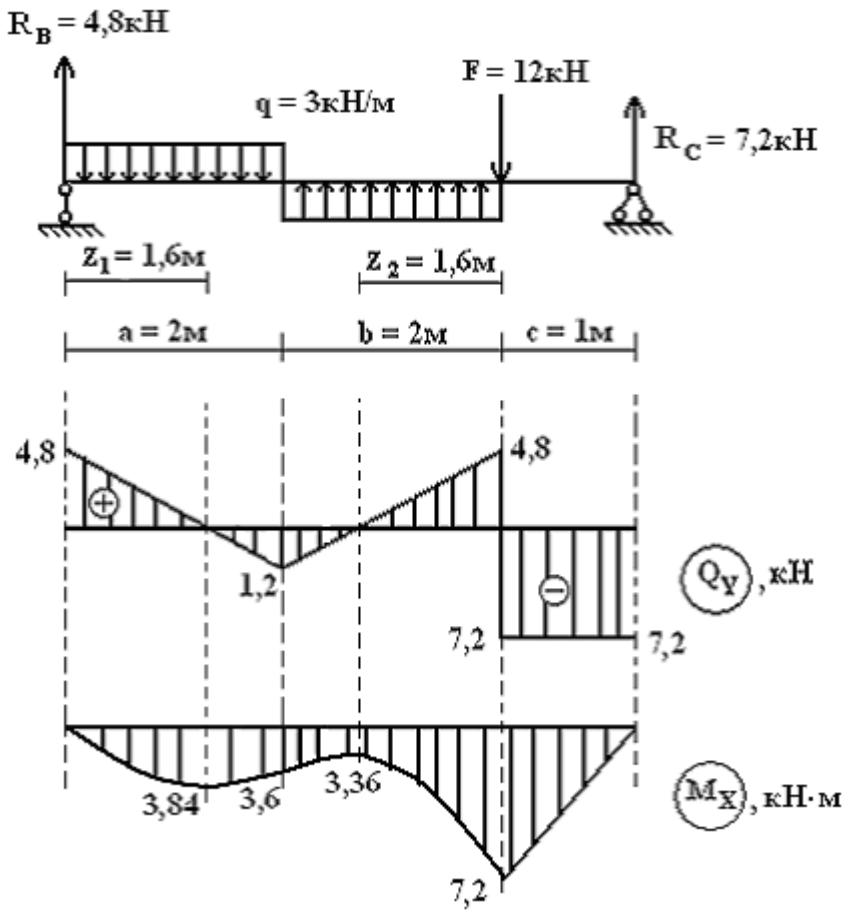
Вид деформации – плоский изгиб.

5)



Вид деформации – плоский изгиб.

6)



Вид деформации – плоский изгиб.

### **ЛИТЕРАТУРА.**

1. Дарков А.В., Шпиро Г.С. «Сопротивление материалов». М.: «Высшая школа», 1989г., 624с.
2. Александров А.В. и др. «Сопротивление материалов». М.: «Высшая школа», 2000г., 560с.